



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2022

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) Il faut vérifier le dénominateur, la positivité, la régularité et la normalisation de g .

Puisque f est une densité, $F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$. La stricte positivité et la continuité de f donnent $\int_{a-1}^a f(t) dt > 0$, donc $F(a) > 0$. De même, $\int_a^{a+1} f(t) dt > 0$, donc $F(a) < 1$.

Ainsi, g est bien définie, positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et son intégrale impropre converge, avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^a f(t) dt = 1.$$

Toutes les conditions sont vérifiées : g est une densité de probabilité.

2) a) Par définition d'une fonction de répartition à partir d'une densité, si $x \leq a$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = \frac{F(x)}{F(a)}.$$

Si $x > a$, l'intégrale de g jusqu'à x contient toute sa masse et vaut 1. En conclusion :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

2) b) L'événement $[X \leq a]$ a la probabilité strictement positive $F(a)$. La probabilité conditionnelle demandée existe donc et vaut :

$$P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \frac{P([X \leq x] \cap [X \leq a])}{F(a)}.$$

Pour $x \leq a$, l'intersection est $[X \leq x]$; pour $x > a$, elle est $[X \leq a]$. Le quotient vaut donc respectivement $F(x)/F(a)$ et 1, ce qui coïncide avec $G(x)$.

La loi de Y est ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $[X \leq a]$.

- 3) a) L'événement $[M_n \leq x]$ est l'intersection des événements $[Y_i \leq x]$, pour $1 \leq i \leq n$.
 Leur indépendance résulte de l'indépendance mutuelle des variables Y_i .
 Puisqu'elles ont toutes la même loi :

$$G_n(x) = P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) = G(x)^n.$$

Ainsi :

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

- 3) b) La stricte positivité de f entraîne, pour tout $x < a$:

$$F(a) - F(x) = \int_x^a f(t) dt > 0.$$

Par conséquent, $0 \leq F(x)/F(a) < 1$ et $G_n(x) \rightarrow 0$. Pour $x > a$, $G_n(x) = 1$ pour tout n .

La variable certaine égale à a a pour fonction de répartition $D(x) = 0$ si $x < a$ et $D(x) = 1$ si $x \geq a$. Les seuls points à vérifier pour la convergence en loi sont ses points de continuité, donc les réels différents de a . La convergence y est établie :

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a.$$

À $x = a$, $G_n(a) = 1$; aucune condition supplémentaire n'est requise en ce point de discontinuité de D .

- 4) a) On a $P(Y_i \leq a) = 1$ pour chaque i , donc $P(M_n \leq a) = 1$. Ainsi, $Z_n \geq 0$ presque sûrement et $H_n(x) = 0$ pour $x < 0$.

Pour $x \geq 0$, l'inégalité $n(a - M_n) \leq x$ équivaut à $M_n \geq a - x/n$. Puisque M_n est à densité, il n'a pas d'atome au réel $a - x/n$, d'où :

$$H_n(x) = 1 - P\left(M_n < a - \frac{x}{n}\right) = 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right).$$

Comme $a - x/n \leq a$, on obtient bien :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left[\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \right]^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

4) b) Le réel x est fixé dans cette question ; le reste peut dépendre de x .

Méthode 1 — Développement au premier ordre.

La continuité de f implique que F est dérivable en a et que $F'(a) = f(a)$. La définition de la dérivée donne :

$$F(a + h) = F(a) + f(a)h + o(h).$$

Pour $x \neq 0$, en prenant $h = -x/n$, le reste est $o(1/n)$, donc :

$$F\left(a - \frac{x}{n}\right) = F(a) - \frac{xf(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La division par $F(a) > 0$ fournit la formule demandée. Pour $x = 0$, elle est exacte avec un reste nul.

Méthode 2 — Contrôle de l'intégrale par continuité.

Par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$F\left(a - \frac{x}{n}\right) - F(a) + \frac{xf(a)}{n} = \int_a^{a-x/n} (f(t) - f(a)) dt.$$

La valeur absolue du membre de droite est majorée par :

$$\frac{|x|}{n} \sup_{|t-a| \leq |x|/n} |f(t) - f(a)|.$$

La borne supérieure tend vers 0 par continuité de f en a . Le membre de droite est donc $o(1/n)$. On divise encore par $F(a)$ pour conclure.

La première méthode utilise directement la dérivabilité de F ; la seconde montre précisément pourquoi la continuité de la densité contrôle le reste.

4) c) Posons $c = f(a)/F(a) > 0$. Pour $x > 0$ fixé, la question précédente donne

$$r_n = F(a - x/n)/F(a) = 1 - cx/n + o(1/n).$$

Les nombres r_n sont strictement positifs. En utilisant le développement usuel $\ln(1 + u) = u + o(u)$ lorsque $u \rightarrow 0$, on obtient :

$$n \ln r_n = -cx + o(1).$$

En effet, pour $u_n = r_n - 1$, on a $nu_n \rightarrow -cx$ et le reste logarithmique s'écrit $u_n \varepsilon(u_n)$, avec $\varepsilon(u_n) \rightarrow 0$. Ainsi, $nu_n \varepsilon(u_n) \rightarrow 0$.

Par continuité de l'exponentielle, $r_n^n \rightarrow e^{-cx}$. À $x = 0$, $H_n(0) = 0$ exactement; à $x < 0$, $H_n(x) = 0$. On a donc, pour tout réel x :

$$H_n(x) \rightarrow H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est la fonction de répartition, continue sur $\mathbb{R}$, de la loi exponentielle de taux c . En conclusion :

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right).$$

Exercice 2

- 1) Question adaptée au programme actuel : la formulation est clarifiée pour déterminer les endomorphismes satisfaisant la majoration avec $k = 0$, et non pour modifier la définition existentielle de l'ensemble F .

L'inégalité devient $\|f(x)\| \leq 0$ pour tout x . Comme une norme est positive ou nulle, $\|f(x)\| = 0$, donc $f(x) = 0$ pour tout x .

Réciproquement, l'endomorphisme nul vérifie cette inégalité. Le seul endomorphisme convenable pour $k = 0$ est donc l'endomorphisme nul.

- 2) a) Posons $B = 27A$. Le produit matriciel donne :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 + 64 + 16 & -8 - 8 + 16 & 4 - 32 + 28 \\ -8 - 8 + 16 & 64 + 1 + 16 & -32 + 4 + 28 \\ 4 - 32 + 28 & -32 + 4 + 28 & 16 + 16 + 49 \end{pmatrix} = 81I_3.$$

Ainsi, $A^2 = 81I_3/27^2 = I_3/9$.

Si $Av = \theta v$ pour un vecteur $v \neq 0$, alors $A^2v = \theta^2v = v/9$. D'où $\theta^2 = 1/9$. Les seules valeurs propres possibles sont :

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = -\frac{1}{3}.$$

- 2) b) La matrice A est réelle symétrique. Le théorème spectral assure donc qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Ses valeurs propres appartiennent à $\{1/3, -1/3\}$. Si une seule des deux valeurs était présente, toute sa matrice diagonale de réduction serait égale à θI_3 , donc

$A = P(\theta I_3)P^{-1} = \theta I_3$. C'est impossible, puisque le coefficient $A_{1,2} = 8/27$ est non nul.

Les deux nombres $1/3$ et $-1/3$ sont donc effectivement valeurs propres de A .

- 2) c) La diagonalisation montre que la somme des espaces propres est $\mathbb{R}^3$, et les espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Comme la base canonique est orthonormale et la matrice de f symétrique, f est un endomorphisme symétrique. Si $y \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ et $z \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id})$, alors :

$$\lambda \langle y, z \rangle = \langle f(y), z \rangle = \langle y, f(z) \rangle = \mu \langle y, z \rangle.$$

Puisque $\lambda \neq \mu$, $\langle y, z \rangle = 0$. Ainsi, les deux espaces propres sont supplémentaires orthogonaux, sans avoir à les déterminer.

- 2) d) Méthode 1 — Décomposition orthogonale imposée par l'énoncé.

D'après la question précédente, tout x s'écrit $x = y + z$ avec y et z dans les deux espaces propres et $\langle y, z \rangle = 0$. On a $f(x) = \lambda y + \mu z$, donc, par Pythagore :

$$\|f(x)\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + \mu^2 \|z\|^2 = \frac{1}{9}(\|y\|^2 + \|z\|^2) = \frac{1}{9} \|x\|^2.$$

Ainsi, $\|f(x)\| = \|x\|/3$. Le choix $k = 1/3 \in [0, 1[$ prouve que $f \in F$.

Méthode 2 — Produit scalaire et carré de la matrice.

Pour la colonne X des coordonnées de x dans la base canonique orthonormale, on a $\|f(x)\|^2 = {}^t X {}^t A A X$. Or ${}^t A = A$ et $A^2 = I_3/9$. Par conséquent :

$$\|f(x)\|^2 = {}^t X \frac{I_3}{9} X = \frac{1}{9} \|x\|^2.$$

On retrouve le même choix de k . Cette seconde méthode est particulièrement efficace quand ${}^t A A$ est un multiple de l'identité ; la première explique le rôle des espaces propres orthogonaux.

- 3) a) Si $\text{Id} \in F$, il existe $k < 1$ tel que $\|x\| \leq k\|x\|$ pour tout x . En choisissant $x \neq 0$ et en divisant par $\|x\| > 0$, on obtient $1 \leq k$, contradiction.

Ainsi, $\text{Id} \notin F$.

- 3) b) L'endomorphisme $h = \frac{1}{2} \text{Id}$ appartient à F , puisque $\|h(x)\| = \|x\|/2$. S'il s'agissait d'un espace vectoriel pour les opérations usuelles, $2h = \text{Id}$ lui appartiendrait également.

La question précédente exclut cette possibilité. Donc F n'est pas un espace vectoriel.

- 3) c) Soient $f, g \in F$ et deux constantes $k_f, k_g \in [0, 1[$ convenables. Pour tout x :

$$\|f(g(x))\| \leq k_f \|g(x)\| \leq k_f k_g \|x\|.$$

Or $0 \leq k_f k_g < 1$. Ainsi, $f \circ g \in F$, ce qui établit la stabilité par composition.

- 3) d) Si f est un automorphisme appartenant à F et si $f^{-1} \in F$, la stabilité par composition entraînerait $f \circ f^{-1} = \text{Id} \in F$.

Cette conclusion est contradictoire. Donc $f^{-1} \notin F$.

- 4) a) Soit r un projecteur non nul. Il existe u tel que $v = r(u) \neq 0$. Puisque $r^2 = r$, on a $r(v) = v$.

Si $r \in F$, il existe $k < 1$ tel que $\|v\| = \|r(v)\| \leq k\|v\|$, ce qui est impossible pour $v \neq 0$.

Le projecteur nul appartient à F d'après la question 1). C'est donc le seul projecteur appartenant à F .

- 4) b) La définition de «symétrie» a été explicitée dans le sujet : il s'agit d'un endomorphisme s vérifiant $s^2 = \text{Id}$.

Si une telle symétrie appartenait à F , la stabilité par composition donnerait $s^2 = \text{Id} \in F$, ce qui contredit 3) a).

Ainsi, F ne contient aucune symétrie.

- 5) a) Le théorème spectral s'applique à l'endomorphisme symétrique f de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Il existe donc une base orthonormale (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres, avec $f(u_i) = \lambda_i u_i$.

Le spectre est un ensemble fini non vide de réels, donc $k = \max_i |\lambda_i|$ existe. Pour

$$x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i,$$

l'orthonormalité donne :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \alpha_i^2 \leq k^2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = k^2 \|x\|^2.$$

En prenant les racines carrées, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.

Cette constante est la plus petite possible : pour un vecteur propre non nul associé à une valeur propre de module k , on a $\|f(x)\| = k\|x\|$.

- 5) b) Supposons $f \in F$. Il existe $c \in [0, 1[$ tel que $\|f(x)\| \leq c\|x\|$ pour tout x . Pour un vecteur propre non nul associé à λ , on obtient $|\lambda|\|x\| \leq c\|x\|$, donc $|\lambda| \leq c < 1$. Toutes les valeurs propres sont dans $] -1, 1[$.

Réciproquement, si toutes les valeurs propres sont dans $] -1, 1[$, le maximum de leurs modules, pris sur un ensemble fini, est strictement inférieur à 1. La question 5) a) fournit alors la majoration définissant F .

Ainsi : $f \in F \iff \text{Sp}(f) \subset] -1, 1[$.

- 6) a) Posons $B = 6A$. On calcule directement :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9B.$$

Par conséquent, $A^3 = B^3/216 = B/24 = A/4$. Le polynôme de degré 3 :

$$P(T) = T^3 - \frac{1}{4}T = T \left(T - \frac{1}{2} \right) \left(T + \frac{1}{2} \right)$$

est donc annulateur de A .

Pour un vecteur propre $v \neq 0$ associé à θ , $P(A)v = P(\theta)v = 0$. On en déduit $P(\theta) = 0$, donc les seules valeurs propres possibles sont 0, $1/2$ et $-1/2$. Aucun déterminant n'intervient.

6) b) La matrice A est réelle symétrique dans la base canonique orthonormale.

L'endomorphisme f est donc symétrique, et toutes ses valeurs propres possibles appartiennent à $] -1, 1[$. La question 5) b) donne $f \in F$.

Leurs modules étant au plus $1/2$, la preuve de 5) a) donne, pour tout x :

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Le choix $k = 1/2$ convient. Il coïncide avec le maximum spectral demandé : pour $v = (2, -1, 2) \neq 0$, on vérifie $Bv = (6, -3, 6) = 3v$, donc $Av = v/2$. La valeur propre $1/2$ est bien présente.

Pour compléter le contrôle du spectre, $B(2, 2, -1) = (-6, -6, 3) = -3(2, 2, -1)$ et $B(1, -2, -2) = 0$. Les trois valeurs possibles sont donc effectivement présentes.

6) c) Code adapté en Python.

Il faut calculer les valeurs propres, prendre leurs modules, puis leur maximum.

Python

```
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

A = np.array([[0, -2, 2], [-2, -1, 0], [2, 0, 1]]) / 6

k = np.max(np.abs(eig(A)[0]))

print(k)
```

`eig(A)[0]` est le tableau des valeurs propres et `np.abs` agit coefficient par coefficient. `np.max` en extrait le maximum. La sortie attendue est 0,5, à l'arrondi numérique près. Le script a été exécuté et sa sortie vérifiée ; la valeur exacte résulte de 6) b), et non du calcul numérique.

Exercice 3

Les Bernoulli X_i sont considérées à valeurs dans $\{0, 1\}$, comme précisé dans le sujet. L'indépendance de N et de la famille (X_i) signifie ici que N est indépendante de tout vecteur fini $(X_1, \dots, X_n)$. En particulier, N est indépendante de

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Cette précision est nécessaire pour les calculs conditionnels qui suivent.

- 1) a) Question adaptée au programme actuel : l'égalité ponctuelle $S(\Omega) = \mathbb{N}$ n'est pas une conséquence des seules hypothèses originales. La condition supplémentaire utilisée pour cette égalité est désormais précisée localement.

Une somme finie de variables de Bernoulli est un entier positif ou nul. Pour toute réalisation ω , $0 \leq S(\omega) \leq N(\omega)$, donc $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Supposons maintenant $P(N = n) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Pour $k \geq 1$, l'événement

$[N = k] \cap [X_1 = \dots = X_k = 1]$ a la probabilité $P(N = k)p^k > 0$, par indépendance. Sur cet événement, $S = k$; ainsi, $k \in S(\Omega)$.

Pour $k = 0$, l'événement $[N = 1] \cap [X_1 = 0]$ a la probabilité $P(N = 1)q > 0$ et entraîne $S = 0$. Donc $0 \in S(\Omega)$.

Sous la condition supplémentaire annoncée, $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

La distinction est utile : une variable peut prendre certaines valeurs uniquement sur des événements de probabilité nulle. La seule identité $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ne garantit donc pas $P(N = n) > 0$ pour chaque n .

- 1) b) La majoration $0 \leq S \leq N$ entraîne $|S| \leq N$. Comme N est positive et possède une espérance finie, le théorème de domination pour les espérances montre que S possède une espérance finie.

On a, sans calculer cette espérance, $0 \leq E(S) \leq E(N) < +\infty$.

- 2) Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. La somme S_n suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\},$$

et cette probabilité est nulle pour les autres entiers. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

- 3) Les événements $[N = n]$, $n \geq 1$, forment un système complet. Sur $[N = n]$, les variables S et S_n coïncident. Pour $k \geq 1$:

$$P(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n = k] \cap [N = n]).$$

L'indépendance de S_n et de N donne :

$$P([S_n = k] \cap [N = n]) = P(S_n = k)P(N = n).$$

Lorsque $n < k$, $S_n \leq n < k$ et le terme est nul. Ainsi :

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k)P(N = n).$$

Cette preuve par intersections reste valable même si certains événements $[N = n]$ ont une probabilité nulle ; elle évite alors d'écrire une probabilité conditionnelle non définie.

4) a) Puisque $N - 1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $n \geq 1$:

$$P(N = n) = P(N - 1 = n - 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ces probabilités sont toutes strictement positives car $\lambda > 0$. La loi est nulle hors de $\mathbb{N}^*$. Enfin, par linéarité : $E(N) = 1 + \lambda$.

4) b) Pour $k \geq 1$, on combine les questions 2), 3) et 4) a) :

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Puisque $n!/(n-1)! = n$ et $\lambda > 0$, on peut factoriser :

$$P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Il reste à calculer cette série. Posons $u = \lambda q > 0$ et effectuons le changement d'indice $m = n - k$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n u^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k) u^m}{m!}.$$

La série exponentielle donne

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u^m / m! = e^u.$$

Pour la série comportant m , le terme d'indice 0 est nul et, pour $m \geq 1$, $mu^m / m! = u u^{m-1} / (m-1)!$. Ainsi :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{mu^m}{m!} = ue^u.$$

Ces deux séries sont convergentes à termes positifs ; leur somme peut être calculée par linéarité. On obtient :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)u^m}{m!} = (u+k)e^u.$$

En remplaçant u par λq et en utilisant $-\lambda + \lambda q = -\lambda p$:

$$P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p} \quad (k \geq 1).$$

4) c) Méthode 1 — Complément à la masse totale, conformément à l'énoncé.

La loi de N a des probabilités strictement positives sur tous les entiers strictement positifs. La question 1) a) donne donc $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$P(S = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S = k).$$

Posons $v = \lambda p > 0$. La formule précédente s'écrit :

$$P(S = k) = e^{-v} \left(q \frac{v^k}{k!} + p \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Les deux séries exponentielles convergent, donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(S = k) = e^{-v} (q(e^v - 1) + pe^v) = 1 - qe^{-v}.$$

Ainsi, $P(S = 0) = qe^{-\lambda p}$.

Méthode 2 — Probabilités totales sur la taille de la somme.

Sur $[N = n]$, la somme est nulle si et seulement si les n Bernoulli sont toutes nulles.

L'indépendance donne $P(S_n = 0) = q^n$. Ainsi :

$$P(S = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = qe^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^m}{m!} = qe^{-\lambda p}.$$

La première méthode exploite l'ensemble des valeurs et la loi déjà calculée ; la seconde traite directement l'événement « aucun succès ».

4) d) Méthode 1 — Espérance totale demandée par l'énoncé.

L'existence de $E(S)$ a été établie en 1) b). Pour tout $n \geq 1$, $P(N = n) > 0$.

Conditionnellement à $[N = n]$, S a la même loi que S_n , puisque N est indépendante de la famille des Bernoulli. D'où :

$$E(S \mid [N = n]) = np.$$

La formule de l'espérance totale donne alors :

$$E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} np P(N = n) = pE(N) = p(1 + \lambda).$$

La série converge car $E(N) < +\infty$. Comme $E(X) = p$, on a bien $E(S) = E(X)E(N)$.

Méthode 2 — Calcul à partir de la loi explicite.

La question 4) c) a fourni, pour $k \geq 1$ et $v = \lambda p$:

$$P(S = k) = e^{-v} \left(q \frac{v^k}{k!} + p \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Puisque S est positive et intégrable, sa formule d'espérance est applicable. Pour la première série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{v^k}{k!} = v e^v.$$

Pour la seconde, avec $j = k - 1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \frac{v^j}{j!} = (v+1)e^v.$$

Les séries convergent par les mêmes identités exponentielles qu'en 4) b). Ainsi :

$$E(S) = e^{-v} (qve^v + p(v+1)e^v) = v + p = p(\lambda + 1).$$

L'espérance totale évite de connaître la loi complète ; le calcul direct fournit un contrôle indépendant de cette loi.

5) Code adapté en Python.

On simule d'abord N comme 1 plus une variable de Poisson. Une fois N obtenu, on simule une binomiale de paramètres N et p , puisque la loi conditionnelle de S sachant N est précisément cette loi.

Python

```
from numpy.random import poisson, binomial

def S(lam, p):
    N = 1 + poisson(lam)
    y = binomial(N, p)
    return y
```

Les paramètres doivent vérifier $\text{lam} > 0$ et $0 < p < 1$. La variable N est un entier strictement positif; y est un entier compris entre 0 et N . La fonction renvoie une réalisation de la loi de S et non son espérance.

Le code a été exécuté. Une simulation répétée a également permis de contrôler la moyenne et la fréquence de zéro par comparaison avec $p(1 + \lambda)$ et $qe^{-\lambda p}$. Ces vérifications expérimentales ne remplacent pas les preuves précédentes.

Problème

1) Question préliminaire.

Un logarithme ne peut pas être appliqué automatiquement à un équivalent. Il faut ici comparer les deux logarithmes.

Pour $x > 0$, posons $r(x) = f(x)/x > 0$. L'hypothèse donne $r(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par continuité du logarithme en 1, $\ln r(x) \rightarrow 0$.

Pour $0 < x < 1$, $\ln x \neq 0$ et :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln r(x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln r(x)}{\ln x}.$$

Comme $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\ln r(x) \rightarrow 0$, le second terme tend vers 0. Ainsi :

$$\ln(f(x)) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln x.$$

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

Les fonctions sh et ch sont définies par des combinaisons d'exponentielles ; elles sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Leur étude utilise uniquement ces définitions.

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x).$$

La fonction sh est donc impaire.

2) b) La dérivation des exponentielles donne :

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) > 0.$$

Ainsi, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $\text{sh}(x) \rightarrow +\infty$. L'imparité donne la limite $-\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, et $\text{sh}(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	+	1	+
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

2) c) Méthode 1 — Dérivée en zéro.

On a $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$. La définition de la dérivée donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} = 1.$$

Donc $\text{sh}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

Méthode 2 — Développements limités des exponentielles.

Au voisinage de 0, les développements usuels donnent $e^x = 1 + x + o(x)$ et

$e^{-x} = 1 - x + o(x)$. La seconde égalité est obtenue en remplaçant la variable par $-x$ dans le développement de l'exponentielle.

Par soustraction :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{(1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x))}{2} = x + o(x).$$

On retrouve le même équivalent. La première méthode suffit pour le premier ordre ; la seconde se prolonge facilement à des développements d'ordre supérieur.

3) a) Pour tout x :

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

Ainsi, ch est paire.

3) b) On dérive sa définition :

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x).$$

Puisque sh est strictement croissante et s'annule en 0, sa valeur est négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$. Donc ch est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ puis strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

On a $\operatorname{ch}(0) = 1$ et, par sa définition et sa parité, $\operatorname{ch}(x) \rightarrow +\infty$ aux deux extrémités de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$	—	0	+
$\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow 1 \nearrow$	$+\infty$

En particulier, $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ pour tout réel x .

4) Méthode 1 — Identité algébrique.

À partir des définitions :

$$\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4}.$$

L'identité $(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$, avec $u = e^x$ et $v = e^{-x}$, donne $4e^x e^{-x} / 4 = 1$.

Ainsi, $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$ pour tout réel x .

Méthode 2 — Fonction de dérivée nulle.

Posons $h(x) = \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2$. Les relations de dérivation établies ci-dessus donnent :

$$h'(x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) - 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x) = 0.$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, une fonction dérivable de dérivée nulle est constante. Puisque $h(0) = 1^2 - 0^2 = 1$, on retrouve $h(x) = 1$ partout.

Le calcul algébrique est le plus direct ; la seconde méthode illustre la recherche d'une quantité constante à partir des relations entre dérivées.

Partie 2 : une troisième fonction

5) a) D'après 3) b), $\operatorname{ch}(x) \geq 1 > 0$ pour tout réel x . Le quotient :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

est donc bien défini sur tout $\mathbb{R}$. Il est également de classe C^∞ , puisque son dénominateur ne s'annule pas.

5) b) Le numérateur est impair et le dénominateur pair. Pour tout réel x :

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x).$$

Ainsi, th est impaire.

- 5) c) La dérivation d'un quotient est permise car ch ne s'annule pas. Grâce à $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et à la question 4) :

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} > 0.$$

Par conséquent, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- 5) d) Pour tout réel x , en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x} :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc $\operatorname{th}(x) \rightarrow 1$. L'imparité donne la limite -1 lorsque $x \rightarrow -\infty$, et $\operatorname{th}(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$	$+$	1	$+$
$\operatorname{th}(x)$	-1	$\nearrow 0 \nearrow$	1

Pour tout $x > 0$, on a en particulier $0 < \operatorname{th}(x) < 1$.

- 6) a) Pour $x > 0$, posons $u = e^{-x} \in]0, 1[$. Les définitions donnent :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

De l'autre côté :

$$\frac{au}{1 - u} + \frac{bu}{1 + u} = \frac{u((a + b) + (a - b)u)}{1 - u^2}.$$

Comme $u > 0$ et $1 - u^2 > 0$, l'identité recherchée équivaut à $(a + b) + (a - b)u = 2$ pour tout $u \in]0, 1[$. L'identification des coefficients donne $a + b = 2$ et $a - b = 0$.

La solution est donc $a = b = 1$, et la substitution vérifie cette identité.

- 6) b) Méthode 1 — Intégration de la décomposition obtenue.

Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $1 - e^{-x}$ et $1 + e^{-x}$ sont strictement positives. Les dérivées logarithmiques sont :

$$\frac{d}{dx} \ln(1 - e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}},$$

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + e^{-x}) = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Avec $a = b = 1$, une primitive est donc :

$$L(x) = \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right).$$

La formule de 5) d), appliquée au réel $x/2$, donne $(1 - e^{-x})/(1 + e^{-x}) = \text{th}(x/2)$. Ainsi :

$$L(x) = \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Toutes les primitives sur cet intervalle s'obtiennent en ajoutant une constante réelle.

Méthode 2 — Vérification directe de la primitive.

La fonction $\text{th}(x/2)$ est strictement positive pour $x > 0$. On peut donc dériver son logarithme :

$$L'(x) = \frac{\frac{1}{2} \text{th}'(x/2)}{\text{th}(x/2)} = \frac{1}{2 \text{ch}(x/2) \text{sh}(x/2)}.$$

L'identité nécessaire se démontre à partir des définitions :

$$2 \text{sh}(x/2) \text{ch}(x/2) = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})(e^{x/2} + e^{-x/2})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x).$$

Ainsi, $L'(x) = 1/\text{sh}(x)$. La première méthode construit la primitive ; la seconde permet de la contrôler sans supposer connue une identité hyperbolique supplémentaire.

7) D'après 2) c), $\text{sh}(u)/u \rightarrow 1$ lorsque $u \rightarrow 0$. Par continuité, $\text{ch}(u) \rightarrow 1$. Donc :

$$\frac{\text{th}(u)}{u} = \frac{\text{sh}(u)/u}{\text{ch}(u)} \rightarrow 1.$$

En posant $u = x/2$, on obtient $\text{th}(x/2) \sim x/2$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour appliquer rigoureusement l'idée de la question préliminaire, posons :

$$r(x) = \frac{2 \text{th}(x/2)}{x} > 0.$$

On a $r(x) \rightarrow 1$, donc $\ln r(x) \rightarrow 0$. Par conséquent :

$$\ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \ln x - \ln 2 + \ln r(x).$$

En divisant par $\ln x$, qui tend vers $-\infty$, les deux derniers termes donnent un quotient tendant vers 0. Ainsi :

$$\ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln x.$$

Cette preuve n'utilise aucun principe général de composition des équivalents par un logarithme.

Partie 3 : une série convergente

On fixe désormais $x > 0$ et on pose, pour $t > 0$, $h_x(t) = 1/\text{sh}(tx)$. Comme $\text{sh}(tx) > 0$ et que sh est strictement croissante, h_x est continue, strictement positive et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

8) a) Pour $t \in [k, k+1]$, la décroissance donne :

$$h_x(k+1) \leq h_x(t) \leq h_x(k).$$

On intègre ces inégalités sur l'intervalle de longueur 1. Par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

8) b) En sommant l'inégalité $\int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq h_x(k)$ pour $k = 1, \dots, n$ et en utilisant

Chasles, on obtient :

$$\int_1^{n+1} h_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^n h_x(k).$$

Pour l'autre borne, appliquons l'inégalité $h_x(k) \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt$ pour $k = 2, \dots, n$. La somme donne :

$$\sum_{k=2}^n h_x(k) \leq \int_1^n h_x(t) dt.$$

En ajoutant $h_x(1)$, on obtient la borne supérieure demandée. Pour $n = 1$, cette seconde somme est vide et l'intégrale de 1 à 1 vaut 0 ; la borne supérieure est alors une égalité. Finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

9) a) Méthode 1 — Encadrement des sommes partielles par une intégrale.

La primitive L déterminée en 6) b) satisfait $L'(u) = 1/\text{sh}(u)$ pour $u > 0$. Par la règle de dérivation, $t \mapsto L(tx)/x$ est une primitive de h_x .

Pour $T \geq 1$, le calcul sur le segment $[1, T]$ donne :

$$\int_1^T h_x(t) dt = \frac{L(Tx) - L(x)}{x}.$$

Lorsque $T \rightarrow +\infty$, $\text{th}(Tx/2) \rightarrow 1$, donc $L(Tx) \rightarrow 0$ par continuité du logarithme en 1. L'intégrale impropre converge et :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} h_x(t) dt = -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

La question 8) b) majore chaque somme partielle par $I(x) + h_x(1)$, quantité finie. Les

sommes partielles sont croissantes car les termes sont positifs. Par le théorème de la limite monotone, elles convergent. La série est donc convergente.

Méthode 2 — Comparaison avec une série géométrique.

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} = \frac{2e^{-nx}}{1 - e^{-2nx}}.$$

Comme $x > 0$ et $n \geq 1$, $1 - e^{-2nx} \geq 1 - e^{-2x} > 0$. Ainsi :

$$0 < \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \leq \frac{2}{1 - e^{-2x}} e^{-nx}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$$

est géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$, donc convergente. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs donne la convergence de la série étudiée.

La première méthode fournit déjà l'intégrale utile à la question suivante ; la seconde explique la convergence pour chaque $x > 0$ par la décroissance exponentielle des termes.

9) b) Notons

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n 1/\operatorname{sh}(kx)$$

et $T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$, dont l'existence vient de 9) a).

L'encadrement de 8) b) est valable pour tout $n \geq 1$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, les intégrales de 1 à $n+1$ et de 1 à n tendent toutes deux vers $I(x)$, par définition de l'intégrale impropre convergente établie ci-dessus.

Le passage à la limite dans les inégalités donne donc :

$$I(x) \leq T(x) \leq I(x) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$$

En remplaçant $I(x)$ par son expression :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Il n'y a ici aucun échange d'une somme infinie et d'une intégrale : on passe à la limite dans un encadrement de sommes et d'intégrales finies dont les limites sont connues.

9) c) Pour $0 < x < 1$, posons $A(x) = -\ln x/x > 0$. La question 7) donne :

$$\frac{I(x)}{A(x)} = \frac{\ln(\operatorname{th}(x/2))}{\ln x} \rightarrow 1.$$

La question 2) c) donne $x/\operatorname{sh}(x) \rightarrow 1$. Par conséquent :

$$\frac{1/\operatorname{sh}(x)}{A(x)} = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} \frac{1}{-\ln x} \rightarrow 0.$$

En divisant l'encadrement de 9) b) par la quantité strictement positive $A(x)$:

$$\frac{I(x)}{A(x)} \leq \frac{T(x)}{A(x)} \leq \frac{I(x)}{A(x)} + \frac{1/\operatorname{sh}(x)}{A(x)}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Le théorème d'encadrement donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.$$

La preuve explicite la négligeabilité du terme ajouté ; elle n'additionne pas des équivalents sans contrôle de leur ordre de grandeur.

10) Code adapté en Python.

Il suffit d'ajouter successivement les termes $1/\operatorname{sh}(kx)$ à une somme initialisée à zéro, en utilisant la définition de sh .

Python

```
from numpy import exp

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = float(input("Entrez une valeur strictement positive pour x : "))
S = 0.0
for k in range(1, n + 1):
    S = S + 2 / (exp(k * x) - exp(-k * x))
print(S)
```

La borne supérieure de `range` est exclue, donc `range(1, n + 1)` produit bien les indices $1, \dots, n$. Après l'itération d'indice k , la variable S contient la somme des k premiers termes. Le dénominateur mathématique est strictement positif car $k \geq 1$ et $x > 0$.

Le script a été exécuté sur plusieurs entrées, et les sommes ont été comparées à un calcul numérique direct. Pour $n = 1$, la sortie est bien $1/\operatorname{sh}(x)$. Il s'agit d'une approximation numérique de la somme finie, et non d'un calcul exact de la série infinie.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, 1) : remplacement de « déterminer l'ensemble F lorsque $k = 0$ » par la recherche des endomorphismes vérifiant la majoration avec $k = 0$. L'ensemble F est défini par l'existence d'un $k < 1$; la formulation originale pouvait faire confondre cet ensemble avec son seul cas $k = 0$.
- Exercice 2, 4) b) : ajout de la définition d'une symétrie par $s^2 = \operatorname{Id}$, pour traiter la question avec les seuls outils élémentaires d'endomorphismes du référentiel.
- Exercice 2, 6) c) : code adapté en Python, avec `numpy.linalg.eig`, `modules` et `maximum` ; la valeur affichée reste la constante définie en 5) a). La sortie de `eig` est explicitée.

- Exercice 3, préambule et 1) a) : les Bernoulli sont explicitement considérées à valeurs dans $\{0, 1\}$ pour la question sur l'image ponctuelle. L'indépendance de N est explicitée vis-à-vis de leur famille, afin de justifier l'indépendance avec chaque somme S_n . La question sur $S(\Omega)$ distingue l'inclusion générale dans $\mathbb{N}$ et l'égalité sous l'hypothèse $P(N = n) > 0$ pour tout $n \geq 1$. L'égalité ponctuelle originale ne découle pas des seules hypothèses initiales ; l'hypothèse locale est satisfaite dans l'exemple de Poisson translatée.
- Exercice 3, 4) : la condition $\lambda > 0$ du paramètre de Poisson est explicitée, notamment pour les puissances et la factorisation en 4) b).
- Exercice 3, 5) : code adapté en Python ; `poisson(lam)` et `binomial(N, p)` remplacent les anciennes commandes, en conservant la simulation de la somme à nombre aléatoire de termes.
- Problème, 10) : code adapté en Python ; conversion des saisies avec `int` et `float`, borne `n + 1` de range, conservation de la somme finie et du blanc à compléter dans le sujet. Les commandes de saisie et de conversion sont expliquées.