



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2021

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

- 1) Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et de limite réelle ℓ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- 1a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 1b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

- 1c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}.$$

- 1d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

- 2a) Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.

- 2b) Étudier les variations de la suite (u_n) , puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

- 2c)** Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

Python

```
import numpy as np

n = 1
u = 1.0
S = 1.0 # S_1 = u_0 = 1
while S <= 1000:
    u = ...
    S = ...
    n = n + 1
print(...)
```

- 3)** Recherche d'un équivalent de u_n .

- 3a)** Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

- 3b)** Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- 3c)** Utiliser la première question pour établir que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2}$.

- 4a)** Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

- 4b)** Compléter le script Python suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2c sans calculer S_n .

Python

```
import numpy as np
```

```
n = 0
u = 1.0 # u_0 = 1
while u <= ...:
    u = ...
    n = n + 1
print(...)
```

Exercice 2

1) On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y = e^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z .

1a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.

1b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p avec $0 < p < 1$, définie par :

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On considère de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire

$$T_n = \prod_{k=1}^n X_k.$$

- 2a)** Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n .
- 2b)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.
- 2c)** Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n .
- 2d)** Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.
- 3)** Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n .

3a) Établir l'inclusion suivante :

$$\left\{ |T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ |T_n - T'| < \frac{1}{2} \right\} \subset \{|T_{n+1} - T_n| < 1\}.$$

3b) En déduire l'inégalité :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right).$$

3c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p.$$

3d) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4) Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

et $U_n = e^{n\bar{X}_n}$.

- 4a)** On rappelle que $\bar{X}_n^*$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\bar{X}_n$. Exprimer $\bar{X}_n^*$ en fonction de $\bar{X}_n$.
- 4b)** Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $(U_n^{1/\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y .

Exercice 3

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E .

On considère aussi un endomorphisme f de E , différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

- 1)** Montrer que $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.
- 2)** Établir l'égalité $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
- 3)** On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.
- 4)** On note g l'application qui à tout vecteur x de $\text{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

4a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\text{Im}(f)$.

4b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5) On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

5a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.

5b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6) Soit $k \in \{1, \dots, p\}$.

6a) Montrer que $\|g(e_k)\|^2 = -\lambda\|e_k\|^2$.

6b) On considère les vecteurs $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|}e_k$ et $e''_k = \frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)$.

Établir que $g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k$ et $g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}e'_k$.

7a) Montrer que le rang de f est pair.

7b) On pose $r = \frac{1}{2} \text{rg}(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1, \dots, a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & 0 & -a_2 & \\ & & a_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 0 & -a_r \\ & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, ou, si $d = \dim \text{Ker}(f) > 0$:

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_d \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & -a_j \\ a_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients laissés vides dans la première matrice sont nuls, et 0_d désigne la matrice nulle d'ordre d .

Problème

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$. On a en particulier $I(p, 0) = \int_0^1 x^p dx$ et $I(0, q) = \int_0^1 (1-x)^q dx$.

- 1) Donner les valeurs de $I(p, 0)$ et $I(0, q)$.
- 2) Montrer que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

- 3) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on considère la propriété H_q :

$$\ll \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) \gg.$$

Montrer, par récurrence, que H_q est vraie pour tout entier naturel q .

- 4) Donner explicitement, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p, q)$ en fonction de p et q , puis en déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de $I(n, n)$ en fonction de n .

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$b_n(x) = \begin{cases} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n = 0$, la fonction $x^n(1-x)^n$ vaut 1 sur tout le segment $[0, 1]$, y compris aux extrémités.

5) Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6) Reconnaître la loi de X_0 .

7a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n) = \frac{1}{2}$.

7b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n .

7c) Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine que l'on précisera.

Partie 3 : simulation informatique de X_n

On considère $2n + 1$ variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivée de $2n + 1$ personnes $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout $k \in \{1, \dots, 2n + 1\}$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la k -ième au rendez-vous, cette personne n'étant pas forcément A_k . On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.

8) On note F_U la fonction de répartition commune aux variables $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$.

9a) Écrire la variable V_{2n+1} en fonction de $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$.

9b) En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x .

10a) Écrire la variable V_1 en fonction de $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$.

10b) En déduire, pour tout réel x , la probabilité $P(V_1 > x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x .

11) Écrire un script Python permettant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

On pourra utiliser `input(texte)`, qui affiche le texte puis renvoie la saisie sous forme de chaîne, et `int(chaine)`, qui convertit en entier une chaîne représentant un entier. On supposera que l'utilisateur saisit un entier naturel.

12a) Montrer que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.$$

12b) Déterminer une densité g_{n+1} de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n .

12c) On considère le script Python suivant :

Python

```
import numpy as np

U = np.array([8, 2, 9, 13, 23, 1, 5])
V = np.median(U)
print("V =", V)
```

Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?

12d) Écrire un script Python permettant de simuler X_n .