



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2017

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

- 1) a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x, n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

Python

```
import numpy as np

def f(x, n):
    y = np.sum(...)
    return y
```

- b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

Python

```
def f(x, n):
    if x == 1:
        y = ...
    else:
        y = ...
    return y
```

- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x élément de $[0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.

3) a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4) a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.

b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5) On suppose que f a été déclarée, comme à la question 1), et on considère les commandes supplémentaires suivantes :

Python

```
n = int(input('entrer la valeur de n : '))
k = 0
x = 0.0
while f(x, n) < 1:
    k = k + 1
    x = k / 1000
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires, notées $X_1, X_2, \dots, X_n$, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.

- a) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F_{M_n}(x)$ puis montrer que M_n est une variable à densité.
- b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n .
- c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
- d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant, ne dépendant que de n et ε , de $P((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2)$.
- e) Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$. Que signifie ce résultat ?

2) On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.

- a) On rappelle que `rd.random(n)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Compléter la déclaration de fonction Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n .

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def f(n):
    X = rd.random(n)
    Y = ...
    return Y
```

- b) Voici deux scripts; le second utilise la fonction `f` définie ci-dessus.

Script (1)

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

import matplotlib.pyplot as plt

e = rd.exponential(scale=1.0, size=10000)

s = np.linspace(0, 10, 11)

plt.hist(e, bins=s, weights=np.ones(10000) / 10000,
         color='white', edgecolor='black')

plt.show()
```

Script (2)

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

n = int(input('entrez la valeur de n : '))

Y = np.zeros(10000)

for k in range(10000):
    Y[k] = f(n)

s = np.linspace(0, 10, 11)

plt.hist(Y, bins=s, weights=np.ones(10000) / 10000,
         color='white', edgecolor='black')

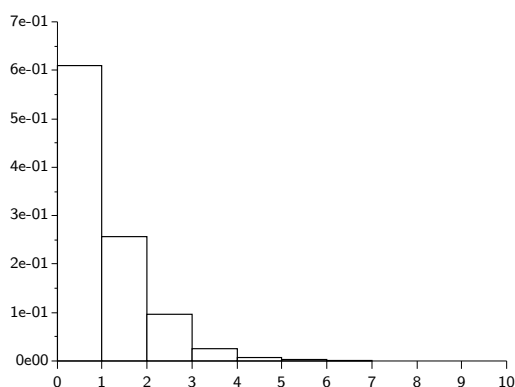
plt.show()
```

La commande `plt.hist` trace ici dix rectangles de largeur 1 dont les hauteurs sont les fréquences dans les classes délimitées par le tableau `s`. L'argument `weights` attribue à chaque observation le poids $1/10000$. Les observations hors de $[0, 10]$ ne sont pas représentées. Les arguments `color` et `edgecolor` choisissent un remplissage blanc et un contour noir.

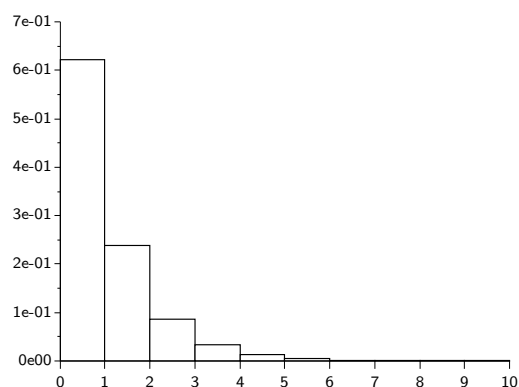
Chaque script simule 10000 variables indépendantes et regroupe les valeurs en dix classes de largeur 1. La convention de NumPy et Matplotlib est $[0, 1[$, $[1, 2[$, ..., $[9, 10]$; pour ces lois continues, elle donne les mêmes fréquences presque sûrement que les

classes $[0, 1], [1, 2], \dots, [9, 10]$ du modèle mathématique.

Le script (1), dans lequel les variables suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous. Le script (2), dans lequel les variables suivent la même loi que Y_n , renvoie l'histogramme (2), pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour n = 1000

Les hauteurs sont reproduites à la précision de lecture du document. Pour les classes au-delà de 6, les barres sont confondues ou presque confondues avec l'axe horizontal ; leurs effectifs exacts ne sont pas lisibles.

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

3) a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2).

b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x)$.

c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2) b).

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J , puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J .

b) En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A .

c) Montrer que A est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien E , de dimension $n + 1$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^n \varepsilon_k.$$

On pose aussi :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} (\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u).$$

2) Calculer la norme du vecteur u .

3) a) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\|e_i\| = 1$.

b) Montrer également que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = (\text{Vect}(u))^\perp$ de E .

d) Montrer, en utilisant le résultat de la question 1) c), que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F .

4) On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle.$$

a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique, c'est-à-dire qu'elle est linéaire en chacune de ses deux variables lorsque l'autre est fixée, et que $f(x, y) = f(y, x)$.

b) Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

c) En déduire que :

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle.$$

d) En déduire également que, pour tout $x \in F$, on a :

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n .

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que $e_k = X^k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'application φ qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)},$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P , avec la convention $P^{(0)} = P$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ .
- b) Montrer que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X].$$

- c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question 2) a).
- d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) a) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.

b) Déterminer φ^{-1} puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$.

c) On donne le script Python suivant :

Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
M = np.eye(n + 1)
for k in range(1, n + 1):
    M[k - 1, k] = -k
A = ...
print(A)
```

Compléter la ligne définissant A pour que ce script affiche la matrice A de φ dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

On désigne par x un réel quelconque.

4) a) Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est convergente.

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ est convergente.

5) a) Donner la valeur de $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$.

b) Établir que, pour tout entier naturel k , on a :

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \left(\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \right) e^{-x}.$$

6) Informatique.

- a)** On admet que `np.prod(u)` renvoie le produit des éléments du tableau `u` et que `np.cumprod(u)` renvoie un tableau de même format dont l'élément d'indice j est le produit des éléments d'indices 0 à j de `u`. Le produit d'un tableau vide vaut 1 et sa somme vaut 0. L'option `dtype=float` construit un tableau de réels et évite le débordement des entiers lors du calcul des factorielles.

Utiliser l'égalité obtenue à la question 5) b) pour compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$, les valeurs de x et de k étant entrées par l'utilisateur.

Python

```
import numpy as np

k = int(input('entrez la valeur de k : '))
x = float(input('entrez la valeur de x : '))
j = np.arange(1, k + 1, dtype=float)
p = np.prod(j)
u = ... / ...
s = p * ... * np.exp(-x)
print(s)
```

- b)** Montrer, grâce au changement de variable affine $t = u + x$, que :

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} (u + x)^k e^{-u} du.$$

En déduire la commande manquante du script Python suivant afin qu'il permette de

calculer et d'afficher une valeur approchée de $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ grâce à la méthode de Monte-Carlo.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

x = float(input('entrez la valeur de x : '))
k = int(input('entrez la valeur de k : '))
Z = rd.exponential(scale=1.0, size=100000)
s = np.exp(-x) * np.mean(...)
print(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt.$$

- 7) a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P .
- c) Montrer que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 8) On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de ψ pour une valeur propre λ non nulle.
- a) Utiliser la relation obtenue à la question 7) b) pour établir que :

$$P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.$$

- b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de ψ .
- c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ψ ; on ne demande pas le sous-espace propre associé.
- 9) a) Montrer que les endomorphismes φ et ψ sont égaux.
- b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \geq a$, on a $P(x) \geq 0$, alors :

$$\forall x \geq a, \quad \sum_{i=0}^n P^{(i)}(x) \geq 0.$$