



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2016

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) La fonction $f : x \mapsto e^{-x}/x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. Quand $x \rightarrow 0^+$, $e^{-x} \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $0 < f(x) \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$, donc $f(x) \rightarrow 0$ par encadrement.

x	0^+	$+\infty$
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$

- 1) b) On raisonne par récurrence. Le terme initial $u_0 = 1$ est défini et strictement positif. Si $u_n > 0$ est défini, il appartient au domaine de f et $u_{n+1} = e^{-u_n}/u_n$ est défini et strictement positif.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et appartient à $]0, +\infty[$.

2) Code adapté en Python.

Au début de chaque test de la boucle, la variable u contient u_n . Le premier script s'arrête pour la première fois à l'indice 5 lorsque la condition $u > 0.00001$ devient fausse. Ainsi :

$$0 < u_5 \leq 10^{-5},$$

et les termes d'indices 0 à 4 sont strictement supérieurs à 10^{-5} .

Le second s'arrête à l'indice 6 lorsque $u < 100000$ devient fausse. Ainsi :

$$u_6 \geq 10^5,$$

et les termes d'indices 0 à 5 sont strictement inférieurs à 10^5 .

Ces sorties suggèrent que les termes impairs tendent vers 0 tandis que les termes pairs

tendent vers $+\infty$. La suite entière n'aurait alors aucune limite, même infinie. Il s'agit à ce stade d'une conjecture, pas d'une preuve.

Voici les deux scripts complets :

Python

```
from numpy import exp

u = 1.0
n = 0
while u > 0.00001:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

Python

```
from numpy import exp

u = 1.0
n = 0
while u < 100000:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

Les scripts ont été exécutés et renvoient respectivement 5 et 6. Les opérations informatiques sont approchées ; les questions suivantes établissent le comportement mathématique exact.

3) a) Sur $[0, +\infty[$, la fonction $g(x) = e^{-x} - x^2$ est continue et dérivable, avec :

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

Elle est strictement décroissante, $g(0) = 1$ et $g(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque $e^{-x} \rightarrow 0$ et $x^2 \rightarrow +\infty$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	—	—
$g(x)$	1	$\searrow -\infty$

3) b) Méthode 1 — Fonction auxiliaire demandée.

Pour $x > 0$, multiplier par x ne change pas l'équation et donne :

$$f(x) = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0.$$

La fonction g est continue, strictement décroissante, positive en 0 et de limite $-\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une racine, et la stricte décroissance en assure l'unicité. Cette racine α est strictement positive, puisque $g(0) = 1$.

L'équation $f(x) = x$ possède donc une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

Méthode 2 — Comparaison de la courbe avec la diagonale.

Posons $q(x) = f(x) - x$ pour $x > 0$. La fonction est continue et $q'(x) = f'(x) - 1 < 0$. Ses limites sont $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en $+\infty$. Le théorème de la bijection lui donne donc exactement un zéro.

La première méthode évite le quotient grâce à g ; la seconde est réutilisable pour une fonction strictement décroissante comparée à la fonction identité.

3) c) On compare les signes de g aux deux bornes. On a $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$.

Comme $1/e < 2$, on a $-1/e > -2$, donc $e^{-1/e} > e^{-2}$. Ainsi :

$$g(1/e) = e^{-1/e} - e^{-2} > 0.$$

Puisque g est strictement décroissante et s'annule en α , il en résulte :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

4) a) Le premier terme est $u_1 = e^{-1} = 1/e$. Le deuxième vaut :

$$u_2 = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e} > 1 = u_0,$$

car $1 - 1/e > 0$. La stricte décroissance de f donne alors :

$$u_3 = f(u_2) < f(u_0) = u_1.$$

4) b) Méthode 1 — Propagation des inégalités par récurrence.

On a déjà $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$. Supposons $u_{2n+2} > u_{2n}$. La stricte décroissance de f donne :

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) = u_{2n+1}.$$

En appliquant de nouveau f , l'inégalité s'inverse une seconde fois :

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}.$$

La récurrence est établie. La suite (u_{2n}) est strictement croissante et la suite (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

Méthode 2 — Itération d'une fonction croissante.

Comme f est strictement décroissante de $]0, +\infty[$ dans lui-même, la composée $f \circ f$ y est strictement croissante. Or $u_{2n} = (f \circ f)^n(u_0)$ et $u_{2n+1} = (f \circ f)^n(u_1)$, où la puissance désigne ici une itération.

En appliquant $(f \circ f)^n$ à $u_2 > u_0$, on obtient $u_{2n+2} > u_{2n}$. En l'appliquant à $u_3 < u_1$, on obtient $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.

Les deux méthodes donnent les mêmes variations. La seconde met en évidence que chaque sous-suite évolue selon la composée de deux applications décroissantes.

5) a) Pour $x > 0$, on calcule la composée :

$$h(x) = \frac{e^{-e^{-x}/x}}{e^{-x}/x} = x \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = xe^x e^{-f(x)}.$$

Comme $f(x) > 0$, on a $0 < h(x) \leq xe^x$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $xe^x \rightarrow 0$, donc $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$ par encadrement.

Ainsi, h est continue en 0 sur son domaine $[0, +\infty[$. Elle est continue sur $]0, +\infty[$ par composition ; elle est donc continue sur tout $[0, +\infty[$.

5) b) Le réel 0 est solution puisque $h(0) = 0$. Pour $x > 0$, on peut diviser par x :

$$h(x) = x \iff \exp(x - f(x)) = 1 \iff x - f(x) = 0.$$

La dernière équivalence utilise l'injectivité de l'exponentielle et $e^0 = 1$. D'après 3) b), la seule solution strictement positive est α .

Les solutions dans $\mathbb{R}_+$ sont donc exactement 0 et α .

5) c) La suite (u_{2n+1}) est strictement décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone donne une limite $\ell \geq 0$. De plus, $\ell \leq u_1 = 1/e < \alpha$.

Puisque $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ et que h est continue en ℓ , le passage à la limite donne $\ell = h(\ell)$. La question 5) b) impose $\ell \in \{0, \alpha\}$. La borne $\ell < \alpha$ exclut α .

Ainsi, $u_{2n+1} \rightarrow 0$.

5) d) Supposons par l'absurde que la suite croissante (u_{2n}) possède une limite finie r . Comme $u_{2n} \geq u_0 = 1$, on aurait $r \geq 1 > \alpha$.

La relation $u_{2n+2} = h(u_{2n})$ et la continuité de h donneraient $r = h(r)$, donc $r \in \{0, \alpha\}$. Cela contredit $r > \alpha$.

Cette suite croissante n'a donc pas de limite finie. Si elle était majorée, le théorème de la limite monotone lui en donnerait une ; elle est donc non majorée. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

Les limites distinctes des sous-suites paires et impaires confirment la conjecture de 2) : la suite entière (u_n) n'a aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 2

Dans cet exercice, les puissances d'un endomorphisme sont des compositions. Les polynômes en f commutent avec f et entre eux, puisque les puissances de f commutent.

1) a) On développe les deux termes :

$$(f - \text{Id})^2 = f^2 - 2f + \text{Id}, \quad f \circ (2\text{Id} - f) = 2f - f^2.$$

Leur somme est donc Id .

1) b) L'identité d'endomorphismes de 1) a), appliquée à un vecteur quelconque x , donne :

$$x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x).$$

1) c) Le premier terme de la décomposition précédente appartient à $\text{Ker}(f)$, car l'hypothèse est $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$. Le second appartient à $\text{Im}(f)$, car il s'écrit $f((2\text{Id} - f)(x))$.

Ainsi, tout vecteur est somme d'un élément du noyau et d'un élément de l'image : $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

Méthode 1 — Intersection des deux sous-espaces.

Soit $v \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Puisque $f(v) = 0$, $(f - \text{Id})^2(v) = v$. Comme $v = f(y)$ pour un certain y , la commutation et l'hypothèse donnent aussi :

$$(f - \text{Id})^2(v) = (f - \text{Id})^2(f(y)) = f((f - \text{Id})^2(y)) = 0.$$

Donc $v = 0$. L'intersection est réduite à $\{0\}$, et la somme est directe.

Méthode 2 — Théorème du rang et formule de dimension.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$. Comme leur somme est tout $\mathbb{R}^n$, la formule de dimension d'une somme donne :

$$n = n - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)).$$

L'intersection a donc dimension 0. On conclut encore :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$

La première méthode exploite directement le polynôme annulateur ; la seconde réduit la fin de la preuve à un calcul de dimensions.

2) a) Écrivons $P(X) = aX + b$. L'identité demandée devient :

$$\frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + aX^2 + bX = 1.$$

L'identification des coefficients donne $a = -1/4$ et $b = 5/4$. Ainsi :

$$P(X) = \frac{5 - X}{4}.$$

Ce polynôme est bien de degré 1 et sa substitution vérifie l'identité.

2) b) En évaluant l'identité de 2) a) en f , on obtient :

$$\frac{1}{4}(f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) + f \circ P(f) = \text{Id}.$$

Pour chaque x , cette égalité fournit une décomposition dont le premier terme appartient à $\text{Ker}(f)$ grâce à l'hypothèse $f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = 0$, et dont le second appartient à $\text{Im}(f)$.

Méthode 1 — Théorème du rang et formule de dimension.

La décomposition donne $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Le théorème du rang assure $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$. La formule de dimension donne donc $n = n - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f))$. L'intersection a dimension nulle, et cette somme est directe.

Méthode 2 — Intersection des deux sous-espaces.

Posons $R(f) = \frac{1}{4}(f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})$. Si $v \in \text{Ker}(f)$, alors $R(f)(v) = v$. Si $v = f(y) \in \text{Im}(f)$, alors $R(f)(v) = f(R(f)(y)) = 0$ par l'hypothèse. Un vecteur dans l'intersection est donc nul. Avec la décomposition déjà établie, la somme est directe.

Ainsi, $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

3) a) Écrivons $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$, avec $a_p \neq 0$ puisque le degré est p .

La condition $P(0) = 0$ donne $a_0 = 0$. Comme $P'(0) = a_1 \neq 0$, on obtient bien :

$$P(X) = a_1X + \dots + a_pX^p, \quad a_1 \neq 0.$$

3) b) Soit $v \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ et soit y tel que $v = f(y)$. Comme $P(f) = 0$, on a :

$$0 = P(f)(y) = a_1f(y) + a_2f^2(y) + \dots + a_pf^p(y).$$

Or $f(v) = 0$. Pour $j \geq 2$, $f^j(y) = f^{j-1}(v) = 0$. L'égalité se réduit donc à $a_1v = 0$. Puisque $a_1 \neq 0$, $v = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Leur somme est directe. Le théorème du rang donne :

$$\dim(\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f) = n.$$

Ce sous-espace de $\mathbb{R}^n$ ayant dimension n , il est tout l'espace. Donc :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$

La preuve établit le résultat particulier avec le polynôme donné, sans utiliser de lemme général de décomposition des noyaux.

3) c) Dans la question 1), le polynôme annulateur est $P_1(X) = X(X - 1)^2$. Il vérifie $P_1(0) = 0$ et $P_1'(0) = 1 \neq 0$.

Dans la question 2), le polynôme annulateur est $P_2(X) = X(X - 1)(X - 4)$. Il vérifie $P_2(0) = 0$ et $P_2'(0) = 4 \neq 0$.

Ces deux polynômes, de degré 3, satisfont donc les hypothèses de la question 3). Celle-ci donne la même décomposition pour tout polynôme annulateur de degré au moins 2 dont le coefficient de degré 1 est non nul et le terme constant nul.

Exercice 3

Pour les questions 1) et 2), les observations sont des réels fixés. Posons

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

et

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

L'hypothèse ajoutée dans le sujet, « les observations ne sont pas toutes égales », assure $v > 0$. Les paramètres admissibles sont $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 > 0$, avec θ_2 représentant une variance.

1) La densité de paramètres θ_1 et θ_2 est :

$$\varphi_{\theta_1, \theta_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_2}\right).$$

En multipliant les n densités et en regroupant les exponentielles :

$$L(\theta_1, \theta_2) = (2\pi\theta_2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 \right).$$

La vraisemblance est strictement positive sur U , donc son logarithme est défini et vaut :

$$f(\theta_1, \theta_2) = \ln L(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \theta_2 - \frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2.$$

- 2) a) L'ensemble $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ est ouvert. Sur ce domaine, $\ln \theta_2$ et $1/\theta_2$ sont de classe C^∞ , et

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2$$

est un polynôme en θ_1 .

La fonction f est une somme de produits de ces fonctions, donc elle est de classe C^∞ , en particulier de classe C^2 , sur U .

- 2) b) Question adaptée au programme actuel : l'affirmation d'existence d'un point critique nécessite $v > 0$, garanti dans le sujet par des observations non toutes égales.

Les dérivées partielles sont :

$$\partial_1 f(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1) = \frac{n(\bar{x} - \theta_1)}{\theta_2},$$

$$\partial_2 f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2.$$

Comme $\theta_2 > 0$, la première dérivée s'annule si et seulement si $\theta_1 = \bar{x}$. Avec cette valeur, l'annulation de la seconde équivaut à :

$$n\theta_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Ainsi, l'unique solution du système est $A = (\bar{x}, v)$, qui appartient bien à U car $v > 0$.

En développant les carrés et en utilisant

$$\sum_i x_i = n\bar{x} :$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

On a donc exactement les expressions annoncées pour $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$ et $\hat{\theta}_2 = v$.

Pour expliquer la rectification : si toutes les observations étaient égales à c , on aurait $v = 0$, et le candidat $(c, 0)$ serait hors de U . Aucun point critique n'existerait. De plus, $L(c, \theta_2) = (2\pi\theta_2)^{-n/2} \rightarrow +\infty$ quand $\theta_2 \rightarrow 0^+$; l'affirmation originale sans hypothèse supplémentaire serait donc fausse.

2) c) En dérivant les expressions précédentes :

$$\partial_{1,1}^2 f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{\theta_2},$$

$$\partial_{1,2}^2 f(\theta_1, \theta_2) = \partial_{2,1}^2 f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)}{\theta_2^2},$$

$$\partial_{2,2}^2 f(\theta_1, \theta_2) = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2}{\theta_2^3}.$$

Au point $A = (\bar{x}, v)$, on a

$$\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

et

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = nv.$$

D'où :

$$\partial_{1,1}^2 f(A) = -\frac{n}{v}, \quad \partial_{1,2}^2 f(A) = \partial_{2,1}^2 f(A) = 0,$$

$$\partial_{2,2}^2 f(A) = \frac{n}{2v^2} - \frac{nv}{v^3} = -\frac{n}{2v^2}.$$

La valeur demandée est donc bien $-n/(2\hat{\theta}_2^2)$.

2) d) Méthode 1 — Hessienne et signes des valeurs propres.

La fonction est C^2 sur l'ouvert U et A est un point critique de U . Sa hessienne est :

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{v} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2v^2} \end{pmatrix}.$$

Étant diagonale, elle a pour valeurs propres ses deux coefficients diagonaux. Ces deux réels sont strictement négatifs car $n \geq 2$ et $v > 0$.

Le critère de la hessienne donne donc un maximum local strict de f en A . Aucun déterminant ni ancien critère fondé sur trois dérivées n'est utilisé.

Méthode 2 — Maximisation successive, donnant même un maximum global.

En développant autour de $\bar{x}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\theta_1 - \bar{x})^2 = nv + n(\theta_1 - \bar{x})^2,$$

car le terme croisé contient

$$\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Pour chaque $\theta_2 > 0$:

$$f(\theta_1, \theta_2) = f(\bar{x}, \theta_2) - \frac{n(\theta_1 - \bar{x})^2}{2\theta_2} \leq f(\bar{x}, \theta_2),$$

avec égalité seulement si $\theta_1 = \bar{x}$. Posons $\psi(t) = f(\bar{x}, t)$ pour $t > 0$. Alors :

$$\psi'(t) = -\frac{n}{2t} + \frac{nv}{2t^2} = \frac{n(v - t)}{2t^2}.$$

Elle est strictement croissante pour $t < v$ et strictement décroissante pour $t > v$. Son unique maximum global est atteint en $t = v$. On a donc $f(\theta_1, \theta_2) \leq f(\bar{x}, v)$, avec égalité seulement en A .

La première méthode répond directement à la question locale ; la seconde exploite la somme des carrés pour prouver un résultat global, sans supposer connue la théorie générale du maximum de vraisemblance.

- 2) e) Comme $L = \exp(f)$ et que l'exponentielle est strictement croissante, toute inégalité $f(\theta_1, \theta_2) < f(A)$ se transforme en $L(\theta_1, \theta_2) < L(A)$.

Le maximum local strict de f en A est donc aussi un maximum local strict de L en A . La seconde méthode de 2) d) montre même que ce maximum est global et unique.

- 3) On revient aux variables aléatoires de l'échantillon. Chaque X_i possède une espérance finie m . Leur moyenne est donc intégrable et la linéarité donne :

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = m.$$

Ainsi, $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de m .

- 4) Chaque X_i possède un moment d'ordre 2 et $E(X_i^2) = \sigma^2 + m^2$. La moyenne $\bar{X}_n$ possède elle aussi un moment d'ordre 2; par exemple, Cauchy-Schwarz donne

$$\bar{X}_n^2 \leq \frac{1}{n} \sum_i X_i^2.$$

L'indépendance des X_i permet de calculer :

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Avec $E(\bar{X}_n) = m$, la formule de Koenig-Huygens donne $E(\bar{X}_n^2) = m^2 + \sigma^2/n$. Les termes définissant Z_n étant intégrables, on obtient :

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}_n^2) = \sigma^2 + m^2 - m^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Son biais est $E(Z_n) - \sigma^2 = -\sigma^2/n$, qui tend vers 0. Donc Z_n est asymptotiquement sans biais, bien qu'il soit biaisé pour chaque n fini.

- 5) a) Les variables X_i sont indépendantes, de même loi, avec espérance m et variance finie σ^2 . La loi faible des grands nombres donne :

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} m.$$

On peut aussi contrôler explicitement cette convergence par Bienaymé-Tchebychev : pour $\varepsilon > 0$,

$$P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

La fonction $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de composition de la convergence en probabilité par une fonction continue donne donc :

$$\bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} m^2.$$

- 5) b) Il faut établir le moment d'ordre 4 avant d'appliquer la loi faible aux carrés.

Méthode 1 — Intégration par parties de la densité normale centrée réduite.

Posons $T = (X - m)/\sigma$, qui suit la loi normale centrée réduite. Sa densité est $\varphi(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ et vérifie $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$. Pour $A > 0$, l'intégration par parties est effectuée sur le segment $[-A, A]$:

$$\int_{-A}^A t^4 \varphi(t) dt = -[t^3 \varphi(t)]_{-A}^A + 3 \int_{-A}^A t^2 \varphi(t) dt.$$

Par croissance comparée, $A^3 e^{-A^2/2} \rightarrow 0$. Le moment d'ordre 2 de T existe et vaut $E(T^2) = 1$, donc la seconde intégrale tend vers 1. Le membre de gauche, à intégrande positif, a par conséquent une limite finie égale à 3.

Ainsi, $E(T^4) = 3$. L'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, appliquée deux fois, donne $|m + \sigma T|^4 \leq 8(|m|^4 + \sigma^4 |T|^4)$. Par domination, $E(|X|^4) < +\infty$.

Méthode 2 — Domination des queues de la densité.

Pour $|t| \geq 2|m|$, $|t - m| \geq |t|/2$. Donc :

$$|t|^4 \varphi_{m, \sigma^2}(t) \leq \frac{|t|^4}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(8\sigma^2)}.$$

Lorsque $y \rightarrow +\infty$, $4 \ln y + y - y^2/(8\sigma^2) \rightarrow -\infty$, par croissance comparée du logarithme, de la fonction linéaire et du carré. Il existe donc R tel que, pour $y \geq R$, $y^4 e^{-y^2/(8\sigma^2)} \leq e^{-y}$.

Sur les deux queues, l'intégrande du moment d'ordre 4 est ainsi majoré par une constante fois $e^{-|t|}$, dont l'intégrale converge. Sur un segment, cet intégrande est continu. Le moment d'ordre 4 existe donc aussi par comparaison d'intégrales positives.

La première méthode donne le moment exact $E(T^4) = 3$; la seconde suffit pour l'existence et s'applique à d'autres densités à décroissance rapide.

Les variables X_i^2 sont indépendantes et de même loi, car ce sont les transformations séparées de variables indépendantes de même loi. Elles ont l'espérance finie $E(X^2) = \sigma^2 + m^2$ et une variance finie, puisque $E((X^2)^2) = E(X^4) < +\infty$.

La loi faible des grands nombres s'applique donc et donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 + m^2.$$

5) c) Posons

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)$$

et $B_n = \overline{X_n^2} - m^2$. Par définition, $Z_n - \sigma^2 = A_n - B_n$.

Si $|A_n| < \varepsilon/2$ et $|B_n| < \varepsilon/2$, l'inégalité triangulaire donne $|A_n - B_n| \leq |A_n| + |B_n| < \varepsilon$.

Par contraposée, $|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon$ entraîne $|A_n| \geq \varepsilon/2$ ou $|B_n| \geq \varepsilon/2$. C'est exactement l'inclusion d'événements demandée.

5) d) Par l'inclusion précédente et la majoration de la probabilité d'une union :

$$P(|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq P(|A_n| \geq \varepsilon/2) + P(|B_n| \geq \varepsilon/2).$$

Le premier terme tend vers 0 par 5) b), et le second par 5) a). Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité du membre de gauche tend vers 0.

Donc $Z_n \xrightarrow{P} \sigma^2$: Z_n est un estimateur convergent de la variance. La preuve utilise uniquement l'inégalité triangulaire et les convergences en probabilité établies ; aucune indépendance entre les deux termes de Z_n n'est nécessaire.

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1) Notons $b_{i,k}$ les coefficients de B . Pour chaque couple d'indices (i, j) :

$$(BA_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^4 b_{i,k} a_{k,j}(n).$$

Il s'agit d'une somme finie de suites convergentes, multipliées par des constantes. Les règles sur les limites de sommes finies donnent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (BA_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^4 b_{i,k} a_{k,j} = (BA)_{i,j}.$$

La convergence matricielle étant définie coefficient par coefficient, $BA_n \rightarrow BA$.

Les extensions aux matrices lignes et colonnes, le produit à droite et le produit $BA_n C$ sont admis dans l'énoncé. Ils serviront à passer à la limite dans $QD^n Q^{-1}$ puis dans $L_0 M^n$.

2) Posons $J = {}^t(1, 1, 1, 1) \neq 0$. Pour chaque ligne i :

$$(AJ)_i = \sum_{j=1}^4 a_{i,j} = c.$$

Donc $AJ = cJ$. Le vecteur non nul J est un vecteur propre associé à c , ce qui prouve que c est valeur propre de A .

3) Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. La trace est invariante par similitude :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D).$$

On peut aussi le retrouver par $\text{Tr}(PDP^{-1}) = \text{Tr}(DP^{-1}P) = \text{Tr}(D)$, à l'aide de la propriété $\text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB)$.

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres correspondant aux vecteurs de la base propre. Pour une valeur propre donnée, leur nombre est la dimension de son espace propre. Ainsi, la trace est exactement la somme des valeurs propres comptées avec les multiplicités précisées dans l'énoncé.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

4) Question adaptée au programme actuel : les transitions sont définies par une expérience repartant de chaque état i . Les probabilités conditionnelles sur $[X_n = i]$ ne sont utilisées que si cet événement a une probabilité positive ; au départ, par exemple, seul $[X_0 = 3]$ est possible.

Quand U contient i boules blanches, elle contient $3 - i$ boules noires. Comme il y a toujours 3 boules blanches et 3 boules noires au total, V contient $3 - i$ boules blanches et i boules noires.

Les choix dans les deux urnes sont indépendants une fois la composition fixée.

- Pour passer de i à $i - 1$, il faut retirer une blanche de U et une noire de V . La probabilité vaut $(i/3)(i/3) = i^2/9$.
- Pour passer de i à $i + 1$, il faut retirer une noire de U et une blanche de V . La probabilité vaut $((3 - i)/3)((3 - i)/3) = (3 - i)^2/9$.
- Pour rester à i , les deux boules échangées doivent avoir la même couleur. Les deux cas sont disjoints et donnent $2i(3 - i)/9$.
- Les autres changements sont impossibles.

Pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a donc :

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{i^2}{9} & \text{si } j = i - 1, \\ \frac{2i(3 - i)}{9} & \text{si } j = i, \\ \frac{(3 - i)^2}{9} & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Aux bords, les transitions sortant de $\{0, 1, 2, 3\}$ ont une probabilité nulle : à partir de 0, on passe nécessairement à 1 ; à partir de 3, on passe nécessairement à 2.

- 5) a) Les quatre lignes sont les distributions des états suivants depuis les états 0, 1, 2 et 3, dans cet ordre.

Pour $i = 0$, la ligne est $(0, 1, 0, 0)$. Pour $i = 1$, les probabilités de diminution, maintien et augmentation sont respectivement $1/9$, $4/9$ et $4/9$. Pour $i = 2$, elles sont $4/9$, $4/9$ et $1/9$. Pour $i = 3$, la ligne est $(0, 0, 1, 0)$.

Ainsi, on retrouve exactement la matrice de la question 12) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont positifs ou nuls et chaque ligne a pour somme 1, comme doit le faire une distribution de probabilités.

- 5) b) Pour $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, les événements $[X_n = i]$ partitionnent l'univers. Par probabilités totales et par la règle des échanges :

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^3 P(X_n = i) p_{i,j}.$$

Si $P(X_n = i) > 0$, le produit provient de la probabilité conditionnelle. Si $P(X_n = i) = 0$, l'intersection $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = j]$ a probabilité nulle et le produit est également nul, sans faire appel à une conditionnelle non définie.

La somme est le coefficient d'indice $j + 1$ du vecteur ligne $L_n M$. On a donc $L_{n+1} = L_n M$ pour tout $n \geq 0$.

- 5) c) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, $L_0 = L_0 I_4 = L_0 M^0$. Si $L_n = L_0 M^n$, alors :

$$L_{n+1} = L_n M = L_0 M^{n+1}.$$

Ainsi, $L_n = L_0 M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $X_0 = 3$ avec certitude, $L_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- 6) a) Chaque ligne de M contient les probabilités d'un système complet de transitions, donc sa somme est 1. La question préliminaire 2) donne immédiatement la valeur propre 1, associée au vecteur $J = {}^t(1, 1, 1, 1)$.

6) b) On effectue les deux produits matriciels :

$$M^t(E_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{9-4-4}{9} \\ \frac{-4-4+9}{9} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} {}^t(E_1),$$

$$M^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+4-4}{9} \\ \frac{4-4-3}{9} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} {}^t(E_2).$$

Les deux vecteurs sont non nuls. Ce sont donc des vecteurs propres, associés respectivement à $-1/9$ et $1/3$.

6) c) Les valeurs propres 1 , $-1/9$ et $1/3$ sont distinctes, donc leurs vecteurs propres sont indépendants.

Supposons temporairement M diagonalisable. Dans une base propre de dimension 4, trois valeurs diagonales sont celles déjà trouvées ; notons λ la quatrième, comptée avec sa multiplicité éventuelle. La question 3) donne :

$$1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \lambda = \text{Tr}(M) = \frac{8}{9}.$$

Ainsi, $\lambda = -1/3$. Il faut maintenant établir que cette valeur est effectivement présente sans supposer la diagonalisation.

Posons $V = {}^t(-3, 1, -1, 3) \neq 0$. Un calcul direct donne :

$$MV = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3+4-4}{9} \\ \frac{4-4+3}{9} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}V.$$

Donc $-1/3$ est bien valeur propre. La matrice réelle d'ordre 4 possède quatre valeurs propres réelles distinctes ; ses quatre vecteurs propres sont indépendants et forment une base. Elle est donc diagonalisable.

L'usage temporaire de la diagonalisation servait seulement à proposer un candidat ; la vérification directe évite tout raisonnement circulaire.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) On peut prendre les quatre vecteurs propres précédents comme colonnes, en plaçant J en premier :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de Q sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ; elles forment donc une base et Q est inversible. La relation colonne par colonne $MQ = QD$ donne alors $M = QDQ^{-1}$.

La première colonne de Q ne contient bien que des 1. Aucun calcul de déterminant n'est nécessaire pour justifier l'inversibilité.

8) Pour tout $n \geq 0$, la relation de similitude donne, par récurrence :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

La matrice D^n est diagonale, de coefficients 1, $(-1/9)^n$, $(1/3)^n$ et $(-1/3)^n$. Les trois derniers tendent vers 0 car leurs bases ont un module strictement inférieur à 1.

Ainsi, $D^n \rightarrow J_0$, où $J_0 = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Les matrices Q et Q^{-1} sont fixes ; le résultat préliminaire 1) donne :

$$M^n \rightarrow QJ_0Q^{-1},$$

ce qui est l'expression demandée.

9) a) La relation $M = QDQ^{-1}$ implique $Q^{-1}M = DQ^{-1}$. Comme la première ligne de D est $(1, 0, 0, 0)$, la première ligne de cette égalité est $LM = L$.

Le calcul de LM donne les équations :

$$\frac{\ell_2}{9} = \ell_1,$$

$$\ell_1 + \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 = \ell_2,$$

$$\frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 + \ell_4 = \ell_3,$$

$$\frac{\ell_3}{9} = \ell_4.$$

La première donne $\ell_2 = 9\ell_1$. En la remplaçant dans la deuxième, on obtient $4\ell_3 = 36\ell_1$, donc $\ell_3 = 9\ell_1$. La dernière donne alors $\ell_4 = \ell_1$.

La troisième équation est satisfaite avec ces valeurs. Ainsi :

$$\ell_1 = \ell_4, \quad \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_1.$$

9) b) Le coefficient de la première ligne et de la première colonne de $Q^{-1}Q = I_4$ vaut 1.

Puisque la première colonne de Q est J :

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 1.$$

Les relations de 9) a) transforment cette égalité en $20\ell_4 = 1$. Donc :

$$\ell_4 = \frac{1}{20}, \quad L = \frac{1}{20}(1, 9, 9, 1).$$

10) La matrice QJ_0 conserve la première colonne de Q et annule les trois autres. Le produit QJ_0Q^{-1} est donc le produit de la colonne J par la ligne L .

Toutes ses lignes sont égales à L . Les seize coefficients sont ainsi :

$$\Pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

11) a) Méthode 1 — Dénombrement des échantillons sans remise.

Les boules sont distinguées pour le dénombrement. Chaque tirage ordonné de trois boules distinctes a la probabilité $1/(6 \cdot 5 \cdot 4)$. Chaque ensemble de trois boules apparaît selon $3!$ ordres, donc les $\binom{6}{3} = 20$ ensembles sont équiprobables.

Pour obtenir exactement k boules blanches, il faut choisir k des trois blanches et $3 - k$ des trois noires. Ainsi :

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} \quad (k \in \{0, 1, 2, 3\}).$$

Il s'agit d'un calcul particulier de loi par dénombrement ; aucune formule de loi

supplémentaire n'est supposée connue.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$1/20$	$9/20$	$9/20$	$1/20$

La probabilité est nulle hors de ces quatre valeurs, et la somme des probabilités vaut 1.

Méthode 2 — Probabilités composées et positions des couleurs.

L'événement $[X = 0]$ est $N_1 \cap N_2 \cap N_3$. Comme les tirages sont sans remise :

$$P(X = 0) = \frac{3}{6} \frac{2}{5} \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

L'échange des couleurs donne aussi $P(X = 3) = 1/20$.

L'événement $[X = 1]$ est la réunion disjointe des trois configurations BNN , NBN et NNB . Leurs probabilités sont respectivement :

$$\frac{3}{6} \frac{3}{5} \frac{2}{4} = \frac{3}{20}, \quad \frac{3}{6} \frac{3}{5} \frac{2}{4} = \frac{3}{20}, \quad \frac{3}{6} \frac{2}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{20}.$$

Donc $P(X = 1) = 9/20$. L'échange des couleurs donne $P(X = 2) = 9/20$.

La première méthode traite directement le nombre de boules de chaque couleur ; la seconde détaille les dépendances introduites par l'absence de remise.

11) b) La colonne des probabilités est $p = \frac{1}{20} {}^t(1, 9, 9, 1) \neq 0$. On vérifie :

$${}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 4 + 4 \\ 4 + 4 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc ${}^tMp = p$. Cette colonne est bien vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.

Sous forme de vecteur ligne, la même égalité est ${}_pM = {}_tp$. La loi de X est donc stationnaire pour les transitions étudiées : si la distribution actuelle est cette loi, la distribution suivante est identique.

11) c) D'après 5) c), $L_n = L_0 M^n$ avec $L_0 = (0, 0, 0, 1)$. Le résultat préliminaire sur la multiplication à gauche par une ligne et la question 10) donnent :

$$L_n \longrightarrow L_0 \Pi = \frac{1}{20}(1, 9, 9, 1).$$

Ainsi, pour $k = 0, 1, 2, 3$, $P(X_n = k) \rightarrow P(X = k)$. Pour les autres entiers naturels, les deux probabilités sont nulles. La caractérisation de la convergence en loi pour les variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ donne :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

12) Code adapté en Python.

Le script simule une trajectoire partant de l'état 3, puis calcule la fréquence des états 0 parmi $X_1, \dots, X_n$. La valeur exacte attendue pour une longue trajectoire est :

$$\frac{1}{20} = 0,05.$$

Il faut toutefois justifier la convergence de cette fréquence : les états successifs ne sont pas indépendants, et la convergence en loi de 11) c) ne suffit pas, à elle seule, à conclure pour une fréquence calculée sur une seule trajectoire.

Justification particulière par les covariances.

La diagonalisation donne, pour tout entier $r \geq 0$:

$$M^r - \Pi = Q \operatorname{diag} \left(0, \left(-\frac{1}{9} \right)^r, \left(\frac{1}{3} \right)^r, \left(-\frac{1}{3} \right)^r \right) Q^{-1}.$$

Chaque coefficient est une somme de trois termes dont les coefficients sont fixes. Il existe donc une constante finie $C > 0$ telle que :

$$\forall r \geq 0, \forall a, b \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad |(M^r)_{a+1, b+1} - \Pi_{a+1, b+1}| \leq C 3^{-r}.$$

Par exemple, il suffit de prendre pour C un majorant des seize sommes

$$\sum_{s=2}^4 |Q_{a+1,s}(Q^{-1})_{s,b+1}|.$$

Cette majoration repose seulement sur les sommes finies et les trois valeurs propres de module au plus $1/3$.

Posons $I_k = \mathbf{1}_{[X_k=0]}$ et $a_k = E(I_k) = P(X_k = 0)$. Le programme affiche

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k.$$

Comme $X_0 = 3$, $a_k = (M^k)_{4,1}$ et :

$$\left| a_k - \frac{1}{20} \right| \leq C3^{-k}.$$

Par linéarité,

$$E(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

La série géométrique donne :

$$\left| E(F_n) - \frac{1}{20} \right| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n 3^{-k} \leq \frac{C}{2n} \rightarrow 0.$$

Pour $i < j$, les tirages ultérieurs dépendent du passé seulement par l'état courant. En répétant les probabilités totales sur les états intermédiaires, la probabilité de transition en $j - i$ étapes depuis 0 vers 0 est $(M^{j-i})_{1,1}$. Ainsi :

$$E(I_i I_j) = P(X_i = 0, X_j = 0) = a_i (M^{j-i})_{1,1}.$$

Si $a_i = 0$, l'égalité reste valable puisque ses deux membres sont nuls. Sinon, elle provient de la probabilité conditionnelle sachant $X_i = 0$.

On en déduit :

$$\text{Cov}(I_i, I_j) = a_i((M^{j-i})_{1,1} - a_j).$$

Comme $0 \leq a_i \leq 1$, la majoration matricielle et $3^{-j} \leq 3^{-(j-i)}$ donnent :

$$|\text{Cov}(I_i, I_j)| \leq C3^{-(j-i)} + C3^{-j} \leq 2C3^{-(j-i)}.$$

Chaque I_k est une Bernoulli, de variance au plus $1/4$. Toutes les variables sont bornées, donc les moments et covariances utilisés existent. La formule de variance d'une somme donne :

$$V(F_n) \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{4} + 4C \sum_{1 \leq i < j \leq n} 3^{-(j-i)} \right).$$

En regroupant les couples selon l'écart $r = j - i$, il y en a $n - r$, donc :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 3^{-(j-i)} = \sum_{r=1}^{n-1} (n-r)3^{-r} \leq n \sum_{r=1}^{+\infty} 3^{-r} = \frac{n}{2}.$$

Ainsi, $V(F_n) \leq (1/4 + 2C)/n \rightarrow 0$. Avec $E(F_n) \rightarrow 1/20$, le critère de convergence en probabilité par espérance et variance donne :

$$F_n \xrightarrow{P} \frac{1}{20}.$$

Cette preuve établit la convergence requise pour cette expérience avec les outils du référentiel, sans invoquer de théorème général sur les fréquences des chaînes de Markov.

Script complet.

Python

```
import numpy as np

from numpy.random import random

def trajectoire(n, M, x0):
    X = np.zeros(n)
```

```
x = x0
for k in range(n):
    u = random()
    j = 0
    seuil = M[x, 0]
    while j < 3 and u >= seuil:
        j = j + 1
        seuil = seuil + M[x, j]
    x = j
    X[k] = x
return X

n = int(input("Entrez la valeur de n : "))
M = np.array([[0, 1, 0, 0],
              [1/9, 4/9, 4/9, 0],
              [0, 4/9, 4/9, 1/9],
              [0, 0, 1, 0]])
X = trajectoire(n, M, 3)
f = np.sum(X == 0) / n
print(f)
```

La variable x désigne l'état courant. La boucle interne cumule les probabilités de la ligne $M[x, :]$ jusqu'à l'intervalle contenant le nouveau tirage uniforme u . L'indice j est alors le nouvel état; les états possibles sont 0, 1, 2 et 3. Le tableau renvoyé contient les états suivant l'état initial, sans inclure ce dernier.

Le script a été exécuté sur une longue trajectoire et la fréquence obtenue a été comparée à $1/20$. Cette simulation illustre la convergence démontrée; elle n'est pas une preuve et sa sortie varie d'une exécution à l'autre.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2) : les deux scripts sont adaptés en Python, avec imports, indentation et print, en conservant les seuils 10^{-5} et 10^5 et les deux conditions d'arrêt.
- Exercice 3, préambule et 2) b) à e) : ajout de l'hypothèse « les observations ne sont pas toutes égales ». Sans elle, la variance empirique peut être nulle ; le point critique annoncé n'appartient alors pas à l'ouvert des variances strictement positives. Le cas dégénéré est expliqué dans le corrigé.
- Exercice 3, 2) d) : conclusion fondée sur la hessienne diagonale et ses valeurs propres strictement négatives, avec une seconde preuve directe du maximum global. L'énoncé peut être conservé ; seule la méthode de résolution est actualisée.
- Problème, préambule de la partie 2 et 4) à 5) a) : précision des deux choix uniformes et indépendants une fois la composition fixée ; les transitions sont définies par une expérience repartant de chaque état, afin de ne pas conditionner sur des événements impossibles aux premiers instants. La propriété selon laquelle l'état suivant dépend du passé seulement par l'état courant est explicitée à partir du protocole des tirages.
- Problème, 6) b) et 11) b) : notation de transposition harmonisée avec ${}^t(E_1)$, ${}^t(E_2)$ et ${}^tM$; les vecteurs lignes et colonnes restent ceux de l'original.
- Problème, 12) : code adapté en Python. Une simulation par probabilités cumulées remplace la commande spécifique de génération d'une trajectoire ; l'état initial est numéroté 3 dans la convention Python de 0 à 3. La fréquence des états 0 est conservée et les commandes de saisie et de comptage sont expliquées. Sa convergence est prouvée pour cette matrice par majoration des covariances, sans supposer connus les théorèmes généraux sur les chaînes de Markov.