



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2013

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $1/a_n$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général

$u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

1a) Vérifier que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $1/a_n$ converge et donner sa somme.

1b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n .

1c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.

On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a $a_n = n!$.

2a) Écrire une fonction Python dont l'en-tête est `def fact(n) :` et qui renvoie $n!$ à l'appel de `fact(n)`.

2b) Écrire un programme Python utilisant cette fonction et permettant de calculer et d'afficher la valeur de u_n lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

On pourra utiliser `input(texte)`, qui affiche le texte et renvoie la saisie sous forme de chaîne, et `int(chaine)`, qui convertit en entier une chaîne représentant un entier. On supposera que l'utilisateur saisit un entier strictement positif.

2c) Établir la convergence de la série de terme général $1/a_n$.

2d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.

2e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On revient au cas général.

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 + 2 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right).$$

4a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

4b) En déduire, par sommation, que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

4c) Montrer enfin que la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge, puis établir le résultat demandé.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E .

1) Étude d'un premier exemple : $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$.

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice

dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$

et qu'il est stable par f .

2) Étude d'un deuxième exemple : $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$.

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice

dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2a) Déterminer les valeurs propres de f .

2b) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f .

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre réelle λ et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f .

3) On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3a) Vérifier que $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

3b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

4a) Montrer que λ est valeur propre de f^* .

4b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ . Montrer que $\text{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f .

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = S_n/n$. On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F , commune aux variables aléatoires X_k .

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n . Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x .

4a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

4b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $x > 1/n$.

En déduire :

$$\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n.$$

5a) Déterminer, pour tout réel x , la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

5b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

5c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G .

6) Vérifier que la variable aléatoire $1/Y$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Problème

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ , où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

1a) Calculer u_0 et u_1 .

1b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

1c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

2b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

2c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.

2d) En déduire la valeur de u_{2n+1} .

3a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.

3b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n) , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

3c) Montrer enfin que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

1) Établir, pour tout réel x , la convergence de l'intégrale $I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

2a) Montrer qu'il existe une constante M telle que $0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq M$.

2b) Montrer que $\forall u \in [0, 1/2], 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u$.

3a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

3b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ pour montrer que

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

3c) Montrer de la même façon que $\int_0^1 e^{-tx} \sqrt{t} dt \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

4a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1+t$, que :

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-u/2)}} du.$$

4b) Utiliser le résultat de la question 2b pour en déduire que $I(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Partie 3

1) Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

2a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif. Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a $e^u \leq e^x$. Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-tx$.

2b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = u_k$.

On utilisera le changement de variable $t = \sin v$, avec $v \in [0, \pi/2[$, en justifiant le passage à la borne impropre.

2c) Dédurre des deux questions précédentes que :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1} e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}.$$

2d) Montrer enfin que

$$\forall x > 0, I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

3) Établir que $P(X = Y) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.