



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2012

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) Le coefficient d'indice (i, j) d'un produit de matrices est la somme des produits des coefficients de la ligne i de la première matrice et de la colonne j de la seconde. Ainsi, la première ligne de A^2 est :

$$(1 - 1 + 2, 1 + 3 - 2, -1 - 3 + 2) = (2, 2, -2).$$

La deuxième ligne est $(-1 - 3 + 6, -1 + 9 - 6, 1 - 9 + 6) = (2, 2, -2)$ et la troisième est $(-2 - 2 + 4, -2 + 6 - 4, 2 - 6 + 4) = (0, 0, 0)$. Donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La multiplication de chacune des deux premières lignes de A^2 par A donne $(4, 4, -4)$, et la troisième ligne reste nulle. Ainsi :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A^2.$$

Par correspondance entre composition des endomorphismes et produit matriciel, $f^3 - 2f^2 = 0$. Le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 = X^2(X - 2)$ est donc un polynôme annulateur non nul de f .

- 1) b) Si μ est une valeur propre et v un vecteur propre associé, alors

$P(f)(v) = P(\mu)v = 0$. Comme $v \neq 0$, $P(\mu) = 0$. Les seules valeurs propres possibles

sont donc 0 et 2.

Elles sont effectivement valeurs propres :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs présentés étant non nuls, le spectre réel de f est exactement $\{0, 2\}$.

- 1) c) Calculons les dimensions des espaces propres. Le système ${}^t(A(x, y, z)) = 0$ a pour première équation $x + y - z = 0$. En remplaçant $y - z$ par $-x$ dans la deuxième équation, on obtient $-4x = 0$. Ainsi $x = 0$ et $y = z$; la troisième équation est alors satisfaite. Donc :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1)), \quad \dim \text{Ker}(f) = 1.$$

Pour $\mu = 2$, les deux premières équations sont $-x + y - z = 0$ et $-x + y - 3z = 0$. Leur différence impose $z = 0$, puis $y = x$; la troisième équation est satisfaite. Ainsi :

$$\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}((1, 1, 0)), \quad \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = 1.$$

La somme des dimensions des espaces propres est $2 < 3$. Ils ne peuvent donc engendrer $\mathbb{R}^3$: f n'est pas diagonalisable.

- 2) Pour obtenir la matrice demandée, cherchons des vecteurs b_1, b_2, b_3 tels que $f(b_1) = 0$, $f(b_2) = b_1$ et $f(b_3) = 2b_3$.

Le vecteur $b_2 = (1, 0, 1)$ vérifie $f(b_2) = (0, -4, -4)$. Posons donc $b_1 = (0, -4, -4)$ et prenons $b_3 = (1, 1, 0)$. Les calculs de 1) b) donnent $f(b_1) = 0$ et $f(b_3) = 2b_3$.

Vérifions que ces trois vecteurs forment une base sans utiliser de déterminant. Si

$rb_1 + sb_2 + tb_3 = 0$, les trois coordonnées donnent :

$$s + t = 0, \quad -4r + t = 0, \quad -4r + s = 0.$$

Ainsi $s = t = 4r$, puis $8r = 0$. Donc $r = s = t = 0$. La famille est libre et comporte trois vecteurs dans un espace de dimension trois ; c'est une base.

Dans $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, les colonnes de la matrice sont les coordonnées respectives de 0 , b_1 et $2b_3$. On obtient bien :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T.$$

Il s'agit d'une construction explicite de la base, et non d'un recours à une théorie générale de réduction.

- 3) a) Dans la base $\mathcal{B}$, $T^2 = \text{diag}(0, 0, 4)$. Le noyau de f^2 est donc $\text{Vect}(b_1, b_2)$. D'après 1) c), le noyau de $f - 2\text{Id}$ est $\text{Vect}(b_3)$.

Comme (b_1, b_2, b_3) est une base, tout vecteur s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de $\text{Vect}(b_1, b_2)$ et d'un vecteur de $\text{Vect}(b_3)$. Par conséquent :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

- 3) b) Supposons que $g^2 = f$. Alors $f^2 = g^4$ et, pour $v \in \text{Ker}(f^2)$:

$$f^2(g(v)) = g^4(g(v)) = g(g^4(v)) = g(f^2(v)) = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g . Comme ce noyau est engendré par les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}$, les images de ces vecteurs par g ont une troisième coordonnée nulle. La matrice de g a donc la forme demandée :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Équations de la restriction.

Le bloc supérieur gauche $B = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ représente la restriction de g au sous-espace stable. L'égalité $G^2 = T$ impose :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En calculant les quatre coefficients :

$$a^2 + a'b = 0, \quad a'(a + b') = 1, \quad b(a + b') = 0, \quad ba' + (b')^2 = 0.$$

La deuxième équation impose $a + b' \neq 0$. La troisième donne alors $b = 0$. Les première et quatrième équations deviennent $a^2 = 0$ et $(b')^2 = 0$, donc $a = b' = 0$. La deuxième équation devient alors $0 = 1$, contradiction.

Il n'existe donc aucun endomorphisme réel g tel que $g^2 = f$.

Méthode 2 — Commutation avec le carré.

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B^2 = N$, alors $BN = B^3 = NB$. Or :

$$BN = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad NB = \begin{pmatrix} b & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité donne $b = 0$ et $b' = a$. Ainsi $B = \begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis :

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2aa' \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité avec N impose $a^2 = 0$, donc $a = 0$, mais aussi $2aa' = 1$, ce qui est impossible. On retrouve la non-existence de g .

La première méthode résout directement les équations du carré ; la seconde utilise la commutation d'une matrice avec ses puissances pour réduire ces équations.

4) a) Notons $K = \text{Ker}(h^{n-1})$ et $L = \text{Ker}(h - \alpha \text{Id})$. Pour $v \in L$, $h(v) = \alpha v$, donc, par itération, $h^{n-1}(v) = \alpha^{n-1}v$, y compris lorsque $n = 1$ avec $h^0 = \text{Id}$.

Si $v \in K \cap L$, alors $\alpha^{n-1}v = 0$. Comme $\alpha \neq 0$, $v = 0$; l'intersection est nulle.

Pour établir que la somme est tout l'espace, fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et posons :

$$v = \frac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x).$$

L'hypothèse $h^n = \alpha h^{n-1}$ donne $h(v) = \alpha v$, donc $v \in L$. Par la propriété des vecteurs de L :

$$h^{n-1}(v) = \alpha^{n-1}v = h^{n-1}(x).$$

Ainsi $u = x - v$ appartient à K , et $x = u + v \in K + L$. On a donc $\mathbb{R}^n = K \oplus L$.

Pour $n = 1$, l'hypothèse signifie $h = \alpha \text{Id}$, $K = \{0\}$ et $L = \mathbb{R}$; la conclusion reste valable. La preuve est une décomposition explicite et ne suppose aucun lemme général sur les noyaux de polynômes d'endomorphismes.

4) b) Supposons la décomposition directe donnée. Pour chaque x , écrivons $x = u + v$ avec $h^{n-1}(u) = 0$ et $h(v) = \alpha v$.

Alors $h^n(u) = h(h^{n-1}(u)) = 0 = \alpha h^{n-1}(u)$. Pour v , l'itération donne $h^n(v) = \alpha^n v = \alpha h^{n-1}(v)$. Par linéarité :

$$h^n(x) = h^n(u) + h^n(v) = \alpha h^{n-1}(u) + \alpha h^{n-1}(v) = \alpha h^{n-1}(x).$$

Cette identité étant vraie pour tout x , on obtient $h^n = \alpha h^{n-1}$. Le raisonnement couvre également $n = 1$.

Exercice 2

1) a) Fixons $x > 0$ et posons $W = -xX_0$. Comme $X_0 \geq 0$ presque sûrement, $W \leq 0$ presque sûrement. Pour $t < 0$:

$$P(W \leq t) = P(X_0 \geq -t/x) = e^{\lambda t/x}.$$

Pour $t \geq 0$, la fonction de répartition vaut 1. Elle est continue en 0 et dérivable en dehors de 0. Une densité de W est donc :

$$q_x(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x} e^{\lambda t/x} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Le choix de la valeur de la densité au point 0 est sans effet sur la loi.

- 1) b) Les variables X_1 et $-xX_0$ sont indépendantes, puisque X_1 et X_0 sont indépendantes et que la transformation du second est déterministe. On peut appliquer la formule de convolution à leurs densités, qui sont intégrables, bornées et continues par morceaux.

Une densité de X_1 est $p(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ pour $u \geq 0$, et 0 pour $u < 0$. Pour un réel z , le produit $p(u)q_x(z-u)$ n'est non nul que si $u \geq 0$ et $z-u \leq 0$, soit $u \geq \max(0, z)$, à un point frontière près. Donc :

$$f(z) = \int_{\max(0, z)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} \frac{\lambda}{x} e^{\lambda(z-u)/x} du.$$

En posant $m = \max(0, z)$, on intègre une exponentielle de taux positif $\lambda(1 + 1/x)$:

$$f(z) = \frac{\lambda^2}{x} e^{\lambda z/x} \frac{e^{-\lambda(1+1/x)m}}{\lambda(1 + 1/x)} = \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x - \lambda(1+1/x)m}.$$

Pour $z < 0$, $m = 0$; pour $z \geq 0$, $m = z$. Ainsi :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x} & \text{si } z < 0, \\ \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

Les deux branches coïncident en 0, et le résultat est une densité par la formule de convolution.

- 1) c) Le quotient est strictement positif presque sûrement, car X_0 et X_1 sont strictement positifs presque sûrement. Donc $F_T(t) = 0$ pour $t \leq 0$; la valeur fixée sur l'événement négligeable $[X_0 = 0]$ ne change pas ces probabilités.

Pour $t > 0$, multiplier par $X_0 > 0$ donne, presque sûrement, $[T \leq t] = [X_1 - tX_0 \leq 0]$.

En appliquant la densité de 1) b) avec $x = t$:

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{t+1} e^{\lambda z/t} dz = \frac{\lambda}{t+1} \frac{t}{\lambda} = \frac{t}{t+1}.$$

Ainsi :

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{t}{1+t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. La loi de T ne dépend pas du paramètre λ .

- 2) Comme $T \geq 0$ presque sûrement, X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 1$:

$$[X = n] = [n-1 \leq T < n].$$

La continuité de F_T signifie que T n'a pas d'atome; par conséquent :

$$P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Pour $n = 1$, on utilise bien $F_T(0) = 0$. Les probabilités sont normalisées, car $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ et :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1.$$

3) a) En prenant $x = 1$ dans 1) a), une densité de $-X_0$ est :

$$q(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda t} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

3) b) Si $t < 0$, $G_n(t) = 0$, puisque tous les X_i sont positifs presque sûrement. Pour $t \geq 0$, l'événement $[Y_n \leq t]$ est $\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]$. L'indépendance mutuelle donne :

$$G_n(t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

La fonction G_n est continue en 0, vaut 0 à gauche, et est dérivable sur $]0, +\infty[$. En dérivant sa branche positive, on obtient une densité :

$$g_n(t) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Lorsque $n = 1$, cette densité est simplement celle de la loi exponentielle. La valeur choisie en 0 est sans importance.

3) c) Le lemme des coalitions donne l'indépendance de Y_n , fonction de $(X_1, \dots, X_n)$, et de X_0 . Leurs densités sont intégrables, bornées et continues par morceaux ; la convolution fournit une densité h_n de $Y_n - X_0$.

Pour $x < 0$, les conditions $t \geq 0$ et $x - t \leq 0$ sont satisfaites pour tout $t \geq 0$. Ainsi :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} g_n(t) \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = n\lambda^2 e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} dt.$$

Employons le changement de variable indiqué, $u = 1 - e^{-\lambda t}$: alors $du = \lambda e^{-\lambda t} dt$, $e^{-\lambda t} = 1 - u$, et t de 0 à $+\infty$ correspond à u de 0 à 1. Le changement de variable est

effectué d'abord sur un segment $[0, b]$, puis on fait tendre b vers $+\infty$; l'intégrale obtenue est celle d'un polynôme sur $[0, 1]$. On obtient :

$$h_n(x) = n\lambda e^{\lambda x} \int_0^1 (1-u)u^{n-1} du.$$

Or :

$$\int_0^1 (1-u)u^{n-1} du = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Donc $h_n(x) = \frac{\lambda}{n+1} e^{\lambda x}$ pour tout $x < 0$, comme demandé.

On en déduit pour la suite :

$$P(Y_n \leq X_0) = P(Y_n - X_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 h_n(x) dx = \frac{1}{n+1}.$$

Il n'y a pas de masse au point 0, car la différence possède une densité.

- 4) a) L'événement $[Y_n \leq X_0]$ signifie qu'aucune des n premières variables $X_1, \dots, X_n$ n'excède X_0 .

Si une variable ultérieure l'excède, le premier indice correspondant est strictement supérieur à n , donc $Z > n$. Si aucune variable ne l'excède, l'ensemble définissant le premier indice est vide, donc $Z = 0$. Réciproquement, chacune de ces deux possibilités impose l'absence de dépassement dans les n premiers indices.

Ainsi $[Y_n \leq X_0] = [Z > n] \cup [Z = 0]$. Les deux événements de l'union sont disjoints.

- 4) b) Par définition, $Z = 0$ si et seulement si $X_i \leq X_0$ pour tout $i \geq 1$. Cette condition équivaut à $Y_k \leq X_0$ pour tout $k \geq 1$, puisque Y_k est le maximum des k premières variables. Donc :

$$[Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leq X_0].$$

Les événements $A_k = [Y_k \leq X_0]$ sont décroissants, car $Y_{k+1} \geq Y_k$. Par continuité décroissante des probabilités et par 3) c) :

$$P(Z = 0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Le premier dépassement a donc lieu presque sûrement à un indice fini.

4) c) Par 4) a), la disjonction des événements et $P(Z = 0) = 0$, on a, pour $n \geq 1$:

$$P(Z > n) = P(Y_n \leq X_0) = \frac{1}{n+1}.$$

Pour $n = 0$, $P(Z > 0) = 1$, puisque Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $P(Z = 0) = 0$; la même formule reste valable.

Pour tout $n \geq 1$:

$$P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = P(X = n).$$

Les variables X et Z ont ainsi la même loi, sans être nécessairement égales sur l'espace probabilisé.

5) a) Comme $0 \leq U < 1$ presque sûrement, $V \geq 0$ presque sûrement et $F_V(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour $t \geq 0$, les transformations monotones donnent :

$$V \leq t \iff -\ln(1-U) \leq \lambda t \iff U \leq 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi $F_V(t) = F_U(1 - e^{-\lambda t})$. L'argument appartient à $[0, 1[$ et, pour la loi uniforme, $F_U(u) = u$ sur cet intervalle. Donc :

$$F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ .

5) b) Code adapté en Python.

Méthode 1 — Simulation du premier dépassement.

La fonction suivante est définie pour $\text{lam} > 0$:

Python

```
import numpy as np

def z(lam=1.0):
    x0 = -np.log(1.0 - np.random.random()) / lam
    k = 1
    xk = -np.log(1.0 - np.random.random()) / lam
    while xk <= x0:
        k = k + 1
        xk = -np.log(1.0 - np.random.random()) / lam
    return k
```

Le tirage initial simule X_0 . Chaque nouvel appel à `np.random.random()` sert à simuler une variable exponentielle indépendante de même paramètre, par la formule de 5) a). La variable `k` est l'indice de la variable actuellement comparée à `x0`. La boucle se poursuit tant qu'aucun dépassement n'a eu lieu et renvoie le premier indice tel que $X_k > X_0$.

La terminaison est presque sûre dans le modèle probabiliste, car $P(Z = 0) = 0$. Il n'est

pas nécessaire de renvoyer 0 sur l'événement de non-termination, qui est négligeable. Les comparaisons sont bien faites avec le seuil initial fixe, et non avec la variable précédemment tirée.

Méthode 2 — Simulation directe à partir de la loi.

La question 4) c) permet de simuler Z par une variable ayant la même loi que $X = \lfloor T \rfloor + 1$. Si U est uniforme sur $[0, 1[$, posons $R = U/(1 - U)$. Pour $t \geq 0$:

$$P(R \leq t) = P\left(U \leq \frac{t}{1+t}\right) = \frac{t}{1+t} = F_T(t).$$

Pour $t < 0$, cette probabilité vaut 0. Donc R suit la même loi que T , puis $\lfloor R \rfloor + 1$ suit la même loi que Z . Une seconde fonction complète est :

Python

```
import numpy as np

def z_direct(lam=1.0):
    u = np.random.random()
    return int(np.floor(u / (1.0 - u))) + 1
```

Le paramètre lam n'intervient pas dans cette seconde formule, puisque la loi de Z ne dépend pas de λ . La fonction conserve un paramètre par cohérence avec la première interface.

La première méthode reproduit l'expérience du sujet ; la seconde utilise un seul tirage uniforme et la loi déjà calculée. Les deux codes ont été exécutés avec des tirages de contrôle ; leur accord avec la loi a également été vérifié expérimentalement. Cette vérification numérique ne remplace pas les démonstrations précédentes.

Exercice 3

Posons $R = 1 - X + X^2$.

- 1) La division euclidienne par le polynôme non nul $1 + X^3$ associe à chaque polynôme un unique reste de degré inférieur à 3, donc appartenant à E . Ainsi f prend bien ses valeurs dans E .

Pour vérifier la linéarité, soient $P_1, P_2 \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Écrivons leurs divisions :

$$RP_1 = (1 + X^3)Q_1 + f(P_1), \quad RP_2 = (1 + X^3)Q_2 + f(P_2).$$

En combinant ces identités :

$$R(aP_1 + bP_2) = (1 + X^3)(aQ_1 + bQ_2) + af(P_1) + bf(P_2).$$

Le dernier terme a un degré inférieur ou égal à 2, ou est nul. Par unicité du reste, $f(aP_1 + bP_2) = af(P_1) + bf(P_2)$. Ainsi f est linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme.

- 2) a) Le polynôme $Re_0 = R$ a déjà un degré inférieur à 3, donc $f(e_0) = R$.

Pour $e_1 = X$:

$$RX = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) + (-1 + X - X^2).$$

Le reste est donc $-1 + X - X^2 = -R$, d'où $f(e_1) = -R$.

Pour $e_2 = X^2$:

$$RX^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (X - 1)(1 + X^3) + (1 - X + X^2).$$

Ainsi $f(e_2) = R$. On a bien $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.

Par linéarité, pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$:

$$f(P) = (a_0 - a_1 + a_2)R.$$

2) b) Les images des vecteurs d'une base engendrent l'image de l'endomorphisme. Or les trois images sont $R, -R, R$. Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(R)$.

Comme $R \neq 0$, la famille constituée du seul polynôme R est une base de l'image. En particulier $\text{rg}(f) = 1$.

2) c) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f) = \dim E - \text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

La formule de 2) a) donne :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff a_0 - a_1 + a_2 = 0 \iff a_1 = a_0 + a_2.$$

Ainsi chaque polynôme du noyau s'écrit $a_0(1 + X) + a_2(X + X^2)$. Les polynômes $1 + X$ et $X + X^2$ sont indépendants : si $u(1 + X) + v(X + X^2) = 0$, l'identification du coefficient constant donne $u = 0$ et celle du coefficient de X^2 donne $v = 0$.

Une base du noyau est donc $(1 + X, X + X^2)$.

3) a) Pour $P \in \text{Im}(f)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P = tR$. Les coefficients de R étant $(1, -1, 1)$, la formule de 2) a) donne $f(R) = (1 - (-1) + 1)R = 3R$. Ainsi $f(P) = 3tR = 3P$.

Comme $R \neq 0$, 3 est une valeur propre de f et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 3\text{Id})$.

Réciproquement, si $f(P) = 3P$, alors $P = \frac{1}{3}f(P) \in \text{Im}(f)$. Donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id}).$$

- 3) b) Le noyau est l'espace propre associé à 0, de dimension 2. L'image est l'espace propre associé à 3, de dimension 1. Des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, et la somme de leurs dimensions vaut $3 = \dim E$.

Ils engendrent donc E , ce qui montre que f est diagonalisable. Une base de vecteurs propres est $(1 + X, X + X^2, R)$; dans cette base, la matrice est $\text{diag}(0, 0, 3)$.

On peut aussi vérifier directement l'intersection : si P appartient au noyau et à l'image, alors $f(P) = 0$ et $f(P) = 3P$, donc $P = 0$.

- 4) a) Les coefficients d'un polynôme dans la base $\mathcal{B}$ dépendent linéairement de ce polynôme. L'expression $\varphi(P, Q) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ est donc linéaire en chacune des deux variables. Elle est symétrique, car $a_kb_k = b_ka_k$.

De plus :

$$\varphi(P, P) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geq 0.$$

Cette somme est nulle si et seulement si tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $P = 0$. L'application est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur E .

- 4) b) Comme $\text{Im}(f) = \text{Vect}(R)$, son orthogonal est l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(P, R) = 0$. Or :

$$\varphi(P, R) = a_0 - a_1 + a_2.$$

Par la caractérisation du noyau en 2) c), cette expression est nulle si et seulement si $P \in \text{Ker}(f)$. Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp.$$

Dans l'espace euclidien E , un sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires.
Donc $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ et le noyau est bien le supplémentaire orthogonal de l'image.

- 5) a) Les vecteurs de coefficients de e_0, e_1, e_2 sont respectivement $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Par la définition de φ , $\varphi(e_i, e_i) = 1$ pour chaque indice, et $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

La famille $\mathcal{B}$ étant déjà une base, c'est une base orthonormale.

- 5) b) Les coordonnées des images calculées en 2) a) donnent :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique, et la base est orthonormale. L'endomorphisme f est donc symétrique pour le produit scalaire $\varphi : \varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q))$ pour tous $P, Q \in E$.

Si $P \in \text{Ker}(f)$ et $Q \in \text{Im}(f)$, écrivons $Q = f(H)$ avec $H \in E$. Alors :

$$\varphi(P, Q) = \varphi(P, f(H)) = \varphi(f(P), H) = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)^\perp$. Le théorème du rang donne au noyau la dimension $3 - 1 = 2$, égale à celle de l'orthogonal de l'image. L'inclusion devient une égalité. On retrouve donc le résultat de 4) b) à partir de la symétrie de la matrice.

Problème

Notons

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

qui est un réel fini et positif ou nul par hypothèse.

Le résultat admis au début de l'énoncé est le suivant : si $u_n \rightarrow \ell$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \ell.$$

Il sera appliqué à la suite des sommes partielles S_n dans la question 1) b).

1) a) Méthode 1 — Réindexation de sommes finies.

Par définition :

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{ix_i}{k(k+1)}.$$

Pour un indice i fixé, les termes correspondants apparaissent pour $k = i, i+1, \dots, n$.

Toutes les sommes étant finies, on peut regrouper les termes dans cet ordre :

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{i=1}^n ix_i \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

L'identité $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$ entraîne par télescopage :

$$\sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i.$$

D'autre part, dans

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_i,$$

chaque x_i apparaît $n+1-i$ fois. Donc

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i.$$

La division par $n+1$ donne finalement

$$\sum_{k=1}^n y_k = T_n.$$

Méthode 2 — Reconnaissance d'une différence télescopique.

Posons $T_0 = 0$. Pour $n \geq 2$, les définitions donnent :

$$T_n - T_{n-1} = \frac{nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k}{n(n+1)}.$$

Dans le numérateur, le coefficient de x_i pour $i < n$ est $n - (n-i) = i$, et celui de x_n est n .

Ainsi le numérateur vaut

$$\sum_{i=1}^n ix_i,$$

donc $T_n - T_{n-1} = y_n$.

Pour $n = 1$, $T_1 - T_0 = x_1/2 = y_1$, donc l'identité reste valable. En sommant ces différences,

$$\sum_{k=1}^n y_k = T_n.$$

Enfin, en développant

$$\sum_{k=1}^n S_k$$

comme dans la première méthode, on obtient

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i.$$

Les deux égalités demandées sont donc établies.

La première méthode est adaptée aux sommes triangulaires; la seconde révèle directement la structure télescopique des sommes partielles de y_n .

- 1) b) Comme la série de terme général x_n converge, $S_n \rightarrow S$. Le résultat admis s'applique à cette suite et donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow S.$$

Or

$$T_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \right)$$

et $n/(n+1) \rightarrow 1$, donc $T_n \rightarrow S$. Par 1) a), T_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général y_n .

Cette série converge donc et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = S = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2) a) Si l'un des a_k est nul, le produit est nul, tandis que la moyenne arithmétique est positive ou nulle : l'inégalité est vérifiée.

Supposons tous les a_k strictement positifs. Le logarithme est concave sur $]0, +\infty[$, car sa dérivée seconde est $-1/t^2 < 0$. L'inégalité de concavité donnée dans le sujet s'applique donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right).$$

Le membre de gauche est

$$\ln \left(\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \right).$$

L'exponentielle étant croissante :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

L'inégalité est ainsi établie pour tous les n -uplets de réels positifs ou nuls, sans appliquer le logarithme à 0.

2) b) Puisque

$$\prod_{k=1}^n k = n!,$$

on a

$$\prod_{k=1}^n (kx_k) = n! \prod_{k=1}^n x_k.$$

Tous les facteurs sont positifs ou nuls, et $n! > 0$, donc :

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n kx_k \right)^{1/n}.$$

Appliquons 2) a) aux nombres $a_k = kx_k$:

$$z_n \leq \frac{1}{(n!)^{1/n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx_k.$$

Par définition de y_n ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx_k = (n+1)y_n.$$

Ainsi :

$$z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

2) c) Méthode 1 — Étude d'une différence.

Pour $x \geq 0$, posons $h(x) = x - \ln(1+x)$. Cette fonction est dérivable et $h'(x) = 1 - 1/(1+x) = x/(1+x) \geq 0$. Comme $h(0) = 0$, $h(x) \geq 0$, d'où $\ln(1+x) \leq x$.

Méthode 2 — Comparaison d'intégrales.

Pour $t \in [0, x]$, $0 < 1/(1+t) \leq 1$. Ainsi :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x 1 dt = x.$$

La première méthode étudie la fonction différence ; la seconde obtient l'inégalité directement en majorant l'intégrande.

2) d) Dans 2) c), prenons $x = 1/n$, avec $n \geq 1$. On obtient $\ln(1 + 1/n) \leq 1/n$, puis $n \ln(1 + 1/n) \leq 1$. En appliquant la fonction exponentielle, croissante :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

2) e) Écrivons le produit sous la forme :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)^k}{\prod_{k=1}^n k^k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j^{j-1}}{\prod_{j=1}^n j^j}.$$

Pour chaque $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, il reste au dénominateur un facteur j après simplification. Le facteur 1^1 vaut 1 et le facteur d'indice $n+1$ du numérateur est $(n+1)^n$. Donc :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

La simplification vaut aussi pour $n = 1$, les produits intermédiaires vides valant 1. Par 2) d), chaque facteur $(1 + 1/k)^k$ est majoré par e . Ainsi :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n, \quad \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leq e.$$

La question 2) b) donne donc $0 \leq z_n \leq ey_n$. La série à termes positifs

$$\sum y_n$$

converge par 1) b). Par comparaison,

$$\sum z_n$$

converge et ses sommes partielles vérifient

$$\sum_{n=1}^N z_n \leq e \sum_{n=1}^N y_n.$$

En passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3) a) Pour $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ et $x \in [k/n, (k+1)/n]$, la croissance du logarithme sur $]0, +\infty[$ donne :

$$\ln(k/n) \leq \ln x \leq \ln((k+1)/n).$$

Le segment d'intégration est contenu dans $]0, +\infty[$ et sa longueur est $1/n$. En intégrant les deux inégalités :

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

3) b) Une primitive du logarithme sur $]0, +\infty[$ est $x \ln x - x$, puisque sa dérivée est $\ln x$.

Ainsi :

$$I_n = \int_{1/n}^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_{1/n}^1 = -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Sommons l'encadrement de 3) a) pour $k = 1, \dots, n-1$. Par la relation de Chasles :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k/n) \leq I_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln((k+1)/n).$$

Posons

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k/n).$$

Le terme d'indice n vaut $\ln 1 = 0$, donc le membre de gauche est L_n . Le membre de droite est $L_n - \frac{1}{n} \ln(1/n) = L_n + \frac{\ln n}{n}$.

On a donc $L_n \leq I_n \leq L_n + \ln n/n$, ou encore $I_n - \ln n/n \leq L_n \leq I_n$. En substituant la valeur de I_n :

$$-1 + \frac{1}{n} \leq L_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

- 3) c) Comme $1/n \rightarrow 0$ et $\ln n/n \rightarrow 0$ par croissance comparée, les deux bornes de 3) b) tendent vers -1 . Par encadrement, $L_n \rightarrow -1$.

En développant les logarithmes :

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln k - \ln n) = \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n.$$

Pour $w_n = (1/n!)^{1/n}$, on obtient donc :

$$nw_n = \exp \left(\ln n - \frac{\ln(n!)}{n} \right) = e^{-L_n} \rightarrow e.$$

Ainsi $w_n/(e/n) \rightarrow 1$, soit $(1/n!)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e/n$.

Cet équivalent est établi par les encadrements d'intégrales du sujet et la continuité de l'exponentielle.

- 4) a) Pour $n > N$, $x_n(N) = 0$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Pour $n \leq N$,

$$\prod_{k=1}^n x_k(N) = \prod_{k=1}^n (1/k) = 1/n!,$$

donc $z_n(N) = (1/n!)^{1/n}$. Pour $n > N$, le produit contient $x_{N+1}(N) = 0$, donc $z_n(N) = 0$.

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}.$$

Les deux séries sont ici des sommes finies ; en particulier, chaque suite $x_n(N)$ satisfait bien l'hypothèse de convergence imposée dans le problème.

4) b) Notons

$$H_N = \sum_{n=1}^N 1/n$$

et

$$W_N = \sum_{n=1}^N w_n,$$

avec $w_n = (1/n!)^{1/n}$.

Méthode 1 — Résultat admis sur les sommes partielles.

La question 3) c) donne $w_n \sim e/n$. Les deux suites de termes sont strictement positives. La série harmonique

$$\sum 1/n$$

diverge ; par équivalence des séries à termes positifs,

$$\sum w_n$$

diverge également.

Les hypothèses du résultat admis en question 4) sont donc satisfaites pour les séries de termes généraux w_n et e/n . Leurs sommes partielles vérifient $W_N \sim eH_N$. Puisque $H_N > 0$, on en déduit $W_N/H_N \rightarrow e$.

En utilisant 4) a), c'est exactement :

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \rightarrow e.$$

Méthode 2 — Encadrement des termes puis des sommes.

Fixons $\varepsilon \in]0, e[$. Comme $nw_n \rightarrow e$, il existe $m \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq m$:

$$\frac{e - \varepsilon}{n} \leq w_n \leq \frac{e + \varepsilon}{n}.$$

Posons $W_0 = H_0 = 0$ pour couvrir aussi $m = 1$. En sommant de m à N , puis en ajoutant les termes initiaux :

$$W_{m-1} + (e - \varepsilon)(H_N - H_{m-1}) \leq W_N \leq W_{m-1} + (e + \varepsilon)(H_N - H_{m-1}).$$

Le nombre m est fixe et $H_N \rightarrow +\infty$. Après division par H_N , les termes initiaux divisés par H_N tendent vers 0. Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon \in]0, e[$, le rapport W_N/H_N reste finalement arbitrairement près de l'intervalle $[e - \varepsilon, e + \varepsilon]$. Comme ε est arbitraire, $W_N/H_N \rightarrow e$.

La première méthode utilise le résultat fourni dans le sujet ; la seconde explique directement, dans ce cas particulier, pourquoi les premiers termes ne modifient pas le

rapport asymptotique des sommes.

- 5) La question 2) e) prouve que la constante e convient pour toute suite de réels positifs ou nuls dont la série converge.

Soit maintenant une constante réelle λ possédant la propriété universelle demandée. Pour chaque entier $N \geq 1$, appliquons-la à la suite particulière $x_n(N)$, dont la série converge. Le dénominateur

$$\sum x_n(N) = H_N$$

est strictement positif. On peut donc diviser et obtenir :

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leq \lambda.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en utilisant 4) b), on obtient $e \leq \lambda$. Aucune constante strictement inférieure à e ne peut donc convenir pour toutes les suites.

Puisque e convient et que toute constante convenable est au moins égale à e , e est bien la plus petite constante recherchée. La suite harmonique complète, qui n'est pas sommable, n'a pas été utilisée comme suite admissible : ce sont ses troncatures, sommables pour chaque N , qui établissent l'optimalité.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 4 : la convention $h^0 = \text{Id}$ est explicitée pour le cas $n = 1$. Les questions et leur contenu mathématique sont conservés.
- Exercice 2, préambule et mentions d'espace probabilisé : la notation (Ω, P) remplace la notation comportant une composante abstraite non utilisée ; aucune propriété de

cette composante n'est nécessaire aux questions.

- Exercice 2, question 1) c) : le quotient X_1/X_0 est précisé sur l'événement négligeable $[X_0 = 0]$, afin d'avoir une définition partout ; cette convention ne modifie pas sa loi.
- Exercice 2, question 3) c) : le changement de variable non affine $u = 1 - e^{-\lambda t}$ utile au calcul de convolution est indiqué dans le sujet, conformément au référentiel.
- Exercice 2, question 5) b) : Code adapté en Python. La fonction de simulation conserve le principe de recherche du premier dépassement, avec des tirages exponentiels indépendants construits à partir de tirages uniformes. Le paramètre positif est explicité ; une seconde méthode de simulation directe est démontrée dans le corrigé.
- Problème, préambule et question 5 : « positifs ou nuls » est explicité pour inclure sans ambiguïté les suites tronquées de la question 4. Le caractère universel de la constante recherchée est précisé en question 5.