



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2011

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. Pour $y \in \text{Im}(u - \text{Id})$, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \text{Id})(x)$. Les polynômes en u commutent avec u , et l'égalité $Q(X) = (X - 1)Q_1(X)$ donne :

$$Q_1(u)(y) = Q_1(u) \circ (u - \text{Id})(x) = Q(u)(x) = 0.$$

Ainsi $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker}(Q_1(u))$.

2. (a) Si $x \in E_1$, alors $u(x) = x$. Par récurrence, $u^k(x) = x$ pour tout entier $k \geq 0$.

Écrivons

$$Q_1(X) = \sum_{k=0}^d b_k X^k.$$

Alors :

$$Q_1(u)(x) = \sum_{k=0}^d b_k u^k(x) = \left(\sum_{k=0}^d b_k \right) x = Q_1(1)x.$$

2. (b) Si $x \in E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u))$, la question précédente donne $0 = Q_1(u)(x) = Q_1(1)x$. Comme 1 est racine simple de Q , $Q_1(1) \neq 0$, donc $x = 0_E$.

Réciproquement, le vecteur nul appartient à ces deux noyaux. Ainsi

$$E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}.$$

2. (c) Posons $F = \text{Ker}(Q_1(u))$. D'après le théorème du rang appliqué à $u - \text{Id}$:

$$\dim \text{Im}(u - \text{Id}) = n - \dim E_1.$$

L'inclusion de la question 1 donne $\dim F \geq n - \dim E_1$. D'autre part, l'intersection nulle de 2. (b) donne $\dim(E_1 + F) = \dim E_1 + \dim F \leq n$, donc $\dim F \leq n - \dim E_1$.

Les deux bornes donnent $\dim F = n - \dim E_1$, puis $\dim(E_1 + F) = n$. Cette somme est donc tout E ; son intersection est nulle, d'où $E = E_1 \oplus F$.

Cette démonstration utilise le théorème du rang demandé, sans invoquer de résultat général de décomposition des noyaux de polynômes.

3. Méthode 1 — Décomposition obtenue précédemment.

Si $Q_1(u) = 0$, son noyau est E , et la question 2. (b) impose $E_1 = \{0_E\}$. Cela signifie exactement que 1 n'est pas valeur propre de u .

Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre, $E_1 = \{0_E\}$. La question 2. (c) donne alors $E = \text{Ker}(Q_1(u))$, donc $Q_1(u) = 0$.

Méthode 2 — Inversibilité et identité polynomiale.

Si 1 n'est pas valeur propre, $u - \text{Id}$ est injectif. En dimension finie, c'est donc un endomorphisme inversible. Comme $(u - \text{Id}) \circ Q_1(u) = 0$, la composition à gauche par son inverse donne $Q_1(u) = 0$.

Réciproquement, si $Q_1(u) = 0$ et si $u(x) = x$, alors la question 2. (a) donne $Q_1(1)x = 0$. Le scalaire étant non nul, $x = 0$, donc 1 n'est pas valeur propre.

La première méthode réutilise la structure de la somme directe ; la seconde exploite directement l'inversibilité d'un endomorphisme de noyau nul.

4. Si $\dim E_1 = 3$, alors $E_1 = E$, donc $u = \text{Id}$. Sa matrice est l'identité dans toute base : u est diagonalisable.

Supposons maintenant $\dim E_1 = 2$. Comme $Q_1(X) = (X + 1)^2$, la question 2. (c) donne :

$$E = E_1 \oplus F, \quad F = \text{Ker}((u + \text{Id})^2), \quad \dim F = 1.$$

Le sous-espace F est stable par u : pour $x \in F$, la commutation donne $(u + \text{Id})^2(u(x)) = u((u + \text{Id})^2(x)) = 0$.

Choisissons $v \in F$ non nul. Puisque F est une droite stable, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(v) = \mu v$. L'appartenance à F donne $0 = (u + \text{Id})^2(v) = (\mu + 1)^2 v$. Comme $v \neq 0$, $\mu = -1$.

Ainsi F est une droite de vecteurs propres de valeur propre -1 . En réunissant une base de E_1 et le vecteur v , on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u est $\text{diag}(1, 1, -1)$. Donc u est diagonalisable dans les deux cas.

Exercice 2

1. (a) Une urne contenant m paires complètes possède $2m$ boules. Les $\binom{2m}{2} = m(2m - 1)$ couples non ordonnés de boules distinctes sont équiprobables. Parmi eux, exactement m couples forment une paire. La probabilité de succès est donc $p_m = 1/(2m - 1)$.

Avant la première paire, $m = n$. Après chaque échec, les deux boules sont remises : l'urne retrouve le même contenu. À chaque étape précédant le succès, la probabilité conditionnelle d'échec est $1 - p_n$ et celle de succès est p_n .

Par probabilités composées, pour tout $k \geq 1$:

$$P(T_1 = k) = \left(1 - \frac{1}{2n - 1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n - 1}.$$

Comme $0 < p_n < 1$, la probabilité de ne jamais réussir est $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p_n)^k = 0$. Ainsi T_1 suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/(2n - 1)$.

1. (b) L'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ est $1/p$. Donc T_1 possède une espérance et $E(T_1) = 2n - 1$, sans calcul supplémentaire.
2. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python et rectifié pour simuler deux boules distinctes. Le programme original effectuait deux tirages indépendants de numéros avec remise ; il aurait donné une probabilité de succès $1/n$, au lieu de $1/(2n - 1)$.

Les identifiants $a, b \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$ représentent des boules physiques. Pour un a fixé, le tirage initial de b sur $\llbracket 0, 2n - 2 \rrbracket$, puis le décalage si $b \geq a$, constitue une bijection vers les identifiants différents de a . Chaque couple ordonné de boules distinctes est donc tiré avec la même probabilité $1/(2n(2n - 1))$.

Les boules de chaque paire ont les identifiants $2r - 2, 2r - 1$; elles ont donc le même

quotient entier par 2. Le test à compléter est $a // 2 == b // 2$.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez n, avec n >= 2 : "))
t = 0
succes = False
while not succes:
    a = np.random.randint(0, 2 * n)
    b = np.random.randint(0, 2 * n - 1)
    if b >= a:
        b = b + 1
    t = t + 1
    succes = a // 2 == b // 2
print(t)
```

La variable t compte les tirages, et succes indique si une paire a été obtenue. La boucle s'arrête au premier succès, presque sûrement, d'après la loi géométrique. La sortie est donc une réalisation de T_1 . Ce code a été exécuté ; les essais illustrent son fonctionnement et ne constituent pas une preuve de la loi.

3. (a) Pour $i \geq 2$, $X_i = T_i - T_{i-1}$ est le nombre de tirages supplémentaires effectués après la reconstitution de la $(i - 1)$ -ième paire, jusqu'à la reconstitution de la i -ième, en comptant le tirage qui réussit. Pour $i = 1$, X_1 compte les tirages jusqu'à la première paire.
3. (b) Après $i - 1$ paires retirées, il reste $m = n - i + 1$ paires complètes. Quelle que soit leur identité, la probabilité de succès vaut $p_i = 1/(2m - 1) = 1/(2n - 2i + 1)$.

Pour $i < n$, les échecs ne modifient pas l'urne. Conditionnellement à tout historique menant à cet état, les probabilités composées donnent, pour $k \geq 1$:

$$P(X_i = k \mid \text{cet historique}) = (1 - p_i)^{k-1} p_i.$$

Le membre de droite ne dépend pas de l'historique. En regroupant les historiques par

les probabilités totales, X_i suit donc la loi géométrique de paramètre p_i . L'étape suivante est atteinte presque sûrement, car la probabilité de rester indéfiniment sans succès est nulle; ce raisonnement s'applique successivement à chaque étape.

Pour $i = n$, il ne reste que les deux boules d'une même paire : le succès est certain au tirage suivant, donc $X_n = 1$ sûrement. C'est la loi géométrique de paramètre 1.

Dans tous les cas, l'espérance existe et vaut $E(X_i) = 2n - 2i + 1$.

3. (c) Par télescopage,

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Il s'agit d'une somme finie de variables ayant une espérance; T_n possède donc une espérance. La linéarité, qui ne nécessite pas l'indépendance des X_i , donne :

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^n (2n - 2i + 1) = \sum_{m=1}^n (2m - 1).$$

La somme des n premiers entiers est $n(n + 1)/2$, donc

$$\sum_{m=1}^n (2m - 1) = 2n(n + 1)/2 - n = n^2.$$

Ainsi $E(T_n) = n^2$.

4. (a) L'événement $S_n = 0$ signifie qu'aucune paire n'a été reconstituée pendant les n premiers tirages. L'urne reste alors inchangée à chaque étape, avec une probabilité conditionnelle d'échec $1 - 1/(2n - 1)$.

Par probabilités composées, $P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n - 1}\right)^n$. On peut aussi reconnaître l'événement $T_1 > n$ et utiliser la loi géométrique établie en 1. (a).

4. (b) Posons $r_n = 1/(2n - 1)$; alors $r_n \rightarrow 0$ et $nr_n \rightarrow 1/2$. Comme $\ln(1 - r_n)/(-r_n) \rightarrow 1$:

$$\ln P(S_n = 0) = n \ln(1 - r_n) \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Par continuité de l'exponentielle, $P(S_n = 0) \rightarrow e^{-1/2}$.

4. (c) Chaque tirage reconstitue au plus une paire. Pour reconstituer les n paires en n tirages, chaque tirage doit donc être un succès. Les nombres de paires présentes sont alors successivement $n, n - 1, \dots, 1$.

Par probabilités composées :

$$P(S_n = n) = \prod_{m=1}^n \frac{1}{2m - 1}.$$

Or

$$(2n)! = \left(\prod_{m=1}^n 2m \right) \left(\prod_{m=1}^n (2m - 1) \right) = 2^n n! \prod_{m=1}^n (2m - 1).$$

Donc $P(S_n = n) = \frac{2^n n!}{(2n)!}.$

5. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python et rectifié comme en question 2 : les deux identifiants tirés sont distincts. Le programme original aurait donné une probabilité de succès $1/m$ lorsque m paires restent, au lieu de $1/(2m - 1)$.

La variable m compte les paires encore dans l'urne et z les paires déjà reconstituées. L'invariant est $m + z = n$. Le test de division entière reconnaît une paire ; en cas de succès, z augmente de 1 et m diminue de 1. Sinon, ces deux compteurs restent inchangés.

Comme seules des paires complètes sont retirées, les identifiants peuvent être réattribués après chaque succès sans modifier les probabilités. La boucle réalise exactement n tirages du protocole. La valeur affichée est donc une réalisation de S_n .

Avant le passage d'indice k , au plus k paires ont été retirées. Comme k va de 0 à $n - 1$, on a toujours $m \geq 1$ avant un tirage. Les appels à `randint` restent donc définis ; si toutes

les paires sont retirées, cela survient au plus tôt lors du dernier passage.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez n, avec n >= 2 : "))
m = n
z = 0
for k in range(n):
    a = np.random.randint(0, 2 * m)
    b = np.random.randint(0, 2 * m - 1)
    if b >= a:
        b = b + 1
    if a // 2 == b // 2:
        z = z + 1
        m = m - 1
print(z)
```

Ce code a été exécuté. Une vérification exhaustive des choix d'identifiants a également confirmé que la probabilité de succès est exactement $1/(2m - 1)$ pour les tailles d'urne testées.

Exercice 3

1. Les polynômes P, Q sont continus, donc l'intégrande est continue sur tout segment de $[0, +\infty[$. Il n'y a pas de difficulté au voisinage de 0.

Pour $t \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que $|P(t)Q(t)| \leq Ct^{2n}$, puisque $\deg(PQ) \leq 2n$ lorsque le produit est non nul. Les croissances comparées donnent $t^{2n}e^{-t/2} \rightarrow 0$. Ainsi, pour t suffisamment grand :

$$|P(t)Q(t)e^{-t}| \leq Ce^{-t/2}.$$

L'intégrale de $e^{-t/2}$ sur $[1, +\infty[$ converge. Par comparaison, l'intégrale de $|P(t)Q(t)e^{-t}|$ converge, donc l'intégrale demandée est absolument convergente. Si l'un des polynômes

est nul, l'intégrale est nulle et la conclusion reste vraie.

2. (a) Pour $R > 0$, effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, R]$, avec le produit PQ et une primitive $-e^{-t}$ de e^{-t} :

$$\int_0^R P(t)Q(t)e^{-t} dt = -P(R)Q(R)e^{-R} + P(0)Q(0) + \int_0^R (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t))e^{-t} dt.$$

Les trois intégrales impropres convergent absolument par la question 1, puisque les dérivées restent dans $\mathbb{R}_n[X]$. Les croissances comparées donnent $P(R)Q(R)e^{-R} \rightarrow 0$. On peut donc faire tendre R vers $+\infty$:

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle.$$

On obtient la relation demandée en isolant les deux derniers termes.

2. (b) Prenons $Q = P$ dans 2. (a). Par symétrie du produit scalaire :

$$2\langle P', P \rangle = \|P\|^2 - P(0)^2.$$

Comme P est non constant, $\deg P' < \deg P$. L'hypothèse d'orthogonalité donne $\langle P', P \rangle = 0$. Ainsi $\|P\|^2 = P(0)^2$. La norme est positive ou nulle, donc $\|P\| = |P(0)|$.

3. (a) Pour $k = 0$, les relations imposent $L_0 = M_0 = 1$. Fixons $k \geq 1$. Les polynômes $L_0, \dots, L_{k-1}$, de degrés successifs $0, \dots, k-1$, forment une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$: une relation linéaire non triviale aurait un terme de plus haut degré qui ne pourrait être annulé. Ils sont k dans un espace de dimension k .

Par orthonormalité, L_k est donc orthogonal à tout $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. De même, M_k est orthogonal à tout cet espace.

Méthode 1 — Différence et relation d'intégration par parties.

Posons $D = L_k - M_k$. On a $\deg D \leq k$ si D est non nul, $D(0) = 0$ et D est orthogonal à

$\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Comme $D' \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\langle D', D \rangle = 0$.

La relation de 2. (a), appliquée à D, D , donne $\|D\|^2 - D(0)^2 = 2\langle D', D \rangle = 0$. Donc $\|D\| = 0$, ce qui implique $D = 0$. Ainsi $L_k = M_k$ pour tout k .

Méthode 2 — Supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{R}_k[X]$.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_k[X]$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est de dimension $(k+1) - k = 1$. Les polynômes non nuls L_k et M_k appartiennent à cette même droite, donc il existe α tel que $L_k = \alpha M_k$. Leur évaluation en 0 donne $1 = \alpha$, d'où $L_k = M_k$.

La première méthode réutilise l'identité spécifique à ce produit scalaire ; la seconde met en évidence la droite orthogonale qui détermine chaque polynôme.

3. (b) Question adaptée au programme actuel : les étapes de l'orthonormalisation sont fournies au lieu de supposer connu le procédé général.

On vérifie la construction par récurrence. D'abord, $\|1\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, donc $R_0 = P_0 = 1$.

Supposons $P_0, \dots, P_{k-1}$ orthonormaux et de degrés $0, \dots, k-1$. Chaque terme soustrait à X^k dans R_k est de degré inférieur à k . Le coefficient de X^k de R_k vaut donc 1 : $\deg R_k = k$, $R_k \neq 0$ et $\|R_k\| > 0$.

Pour $i < k$, l'orthonormalité donne :

$$\langle R_k, P_i \rangle = \langle X^k, P_i \rangle - \sum_{j=0}^{k-1} \langle X^k, P_j \rangle \langle P_j, P_i \rangle = 0.$$

Ainsi $P_k = R_k / \|R_k\|$ est bien défini, de degré k , orthogonal aux précédents et de norme 1. La récurrence établit toutes les propriétés demandées.

3. (b) i. Pour $k = 0$, $P_0(0) = 1 \neq 0$. Pour $k \geq 1$, les polynômes $P_0, \dots, P_{k-1}$ forment une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, grâce à leurs degrés successifs.

Le polynôme P_k est donc orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur au sien. Par 2. (b), $|P_k(0)| = \|P_k\| = 1$. En particulier $P_k(0) \neq 0$.

3. (b) ii. Posons $L_k = P_k/P_k(0)$ pour $0 \leq k \leq n$. Ces divisions sont autorisées d'après la question précédente. On a $L_0 = 1$, $\deg L_k = k$ et $L_k(0) = 1$.

Comme $|P_k(0)| = 1$, $\|L_k\| = 1$. Pour $i \neq j$, $\langle L_i, L_j \rangle = \langle P_i, P_j \rangle / (P_i(0)P_j(0)) = 0$.

Cette famille de $n + 1$ polynômes orthonormaux est libre dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base orthonormale. Elle satisfait toutes les relations $(\mathcal{R})$.

3. (c) L'existence découle de 3. (b) ii. et l'unicité de 3. (a). Il reste à calculer les deux premiers polynômes non constants.

On utilise les moments $I_j = \int_0^{+\infty} t^j e^{-t} dt$. Leur convergence découle des croissances comparées, comme en question 1. On a $I_0 = 1$ et, pour $j \geq 1$, une intégration par parties sur $[0, R]$ donne :

$$\int_0^R t^j e^{-t} dt = -R^j e^{-R} + j \int_0^R t^{j-1} e^{-t} dt.$$

Le terme de bord tend vers 0, d'où $I_j = jI_{j-1}$. Ainsi $I_j = j!$; en particulier $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

Méthode 1 — Construction fournie dans le sujet.

Comme $P_0 = 1$, $\langle X, 1 \rangle = I_1 = 1$, donc $R_1 = X - 1$. Sa norme vérifie

$\|R_1\|^2 = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2 - 2 + 1 = 1$. Donc $P_1 = X - 1$ et $P_1(0) = -1$, d'où $L_1 = 1 - X$.

Pour le degré 2, $\langle X^2, P_0 \rangle = I_2 = 2$ et $\langle X^2, P_1 \rangle = I_3 - I_2 = 6 - 2 = 4$. Ainsi :

$$R_2 = X^2 - 2 - 4(X - 1) = X^2 - 4X + 2.$$

Le carré vaut $X^4 - 8X^3 + 20X^2 - 16X + 4$. Donc :

$$\|R_2\|^2 = 24 - 8 \times 6 + 20 \times 2 - 16 \times 1 + 4 = 4.$$

On a $P_2 = (X^2 - 4X + 2)/2$ et $P_2(0) = 1$, d'où $L_2 = 1 - 2X + X^2/2$.

Méthode 2 — Identification par orthogonalité.

Écrivons $L_1 = 1 + aX$. Son orthogonalité à 1 donne $0 = I_0 + aI_1 = 1 + a$, donc $a = -1$.

Écrivons $L_2 = 1 + bX + dX^2$. Il doit être orthogonal à tous les polynômes de degré au plus 1, donc à 1 et à X . Les équations sont :

$$1 + b + 2d = 0, \quad 1 + 2b + 6d = 0.$$

La seconde moins deux fois la première donne $-1 + 2d = 0$, donc $d = 1/2$ puis $b = -2$.

Les normes valent 1 : pour L_1 , on retrouve le calcul précédent ; pour $L_2 = R_2/2$, la norme au carré vaut $4/4 = 1$. On retrouve donc $L_1 = 1 - X$ et $L_2 = 1 - 2X + X^2/2$.

La première méthode suit une construction systématique ; la seconde calcule directement les coefficients à partir des conditions d'orthogonalité.

Problème

Partie 1 — La loi exponentielle

- (a) La fonction $g(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $H(x) = \exp(-e^{-x})$ est une primitive de g , car $H'(x) = \exp(-e^{-x})e^{-x}$.

Ses limites sont $H(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, et $H(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. En calculant d'abord sur des segments, puis en passant à la limite aux deux bornes, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1.$$

Ainsi g satisfait toutes les conditions d'une densité de probabilité.

1. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la primitive précédente donne

$$F_G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = \exp(-e^{-x}).$$

Cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et définit une loi non constante, puisque $0 < F_G(x) < 1$ pour tout réel x .

2. (a) La loi exponentielle de taux $\lambda > 0$ a pour fonction de répartition $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

L'événement $\{M_n \leq x\}$ est l'intersection des événements $\{X_k \leq x\}$ pour $1 \leq k \leq n$. Ces événements sont indépendants, puisque les X_k le sont. Par conséquent :

$$F_{M_n}(x) = F(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En particulier $F_{M_n}(0) = 0$.

2. (b) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lambda > 0$ donne :

$$P(U_n \leq x) = P\left(M_n \leq \frac{x + \ln n}{\lambda}\right).$$

Pour n suffisamment grand, $x + \ln n \geq 0$, donc la question précédente s'applique sous la forme :

$$P(U_n \leq x) = (1 - e^{-(x + \ln n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n.$$

Avec $c = e^{-x} > 0$, on a $c/n \rightarrow 0$ et $n \ln(1 - c/n) \rightarrow -c$, par l'équivalent $\ln(1 - v) \sim -v$ au voisinage de 0. L'exponentielle donne :

$$P(U_n \leq x) \rightarrow \exp(-c) = \exp(-e^{-x}) = F_G(x).$$

La fonction F_G étant continue partout, la définition par les fonctions de répartition établit $U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} G$. Cette normalisation correspond à $a_n = 1/\lambda$ et $b_n = (\ln n)/\lambda$.

Partie 2 — La loi normale

1. (a) Fixons $x > 0$. Pour $u \geq x$, $0 \leq \varphi(u)/u^2 \leq \varphi(u)/x^2$. La fonction φ est une densité, donc son intégrale sur $[x, +\infty[$ converge. L'intégrale demandée converge par comparaison.

Comme $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$, on a $\varphi(u) = -\varphi'(u)/u$ pour $u > 0$. Pour $R > x$, une intégration par parties sur le segment $[x, R]$ donne :

$$\int_x^R \varphi(u) du = \left[-\frac{\varphi(u)}{u} \right]_x^R - \int_x^R \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

Le terme $\varphi(R)/R$ tend vers 0. Les deux intégrales impropres convergent, donc le passage à la limite donne :

$$P(X_1 > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(u) du = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

La première égalité utilise l'existence de la densité ; l'événement $X_1 = x$ a une probabilité nulle.

1. (b) Notons $q(x) = P(X_1 > x)$ et $J(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(u)/u^2 du$. Pour $u \geq x > 0$, on a $1/u^2 \leq 1/x^2$, donc $0 \leq J(x) \leq q(x)/x^2$.

En utilisant $q(x) = \varphi(x)/x - J(x)$, on obtient :

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{q(x)}{x^2} \leq q(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}.$$

La première inégalité se réécrit $\varphi(x)/x \leq q(x)(1 + 1/x^2)$, d'où :

$$q(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq q(x) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

La densité normale est strictement positive, donc $q(x) > 0$. On peut diviser par cette probabilité :

$$1 \leq \frac{\varphi(x)/x}{q(x)} \leq 1 + \frac{1}{x^2}.$$

En particulier, l'encadrement établit $q(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)/x$, résultat qui sera utilisé à la question 7.

2. Posons $h(x) = \varphi(x)/x$ pour $x > 0$. Cette fonction est continue, dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée vaut :

$$h'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = -\varphi(x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < 0.$$

De plus, $h(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, car $\varphi(x) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi} > 0$, et $h(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le théorème de la bijection montre que h est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Pour $c > 0$ et $n \geq 1$, $c/n > 0$, donc l'équation $h(x) = c/n$ possède une unique solution $x_n > 0$.

3. Méthode 1 — Comparaison à un seuil arbitraire.

Pour $A > 0$ fixé, $h(A) > 0$. Comme $c/n \rightarrow 0$, on a $h(x_n) = c/n < h(A)$ pour n suffisamment grand. La stricte décroissance de h implique $x_n > A$.

Cela vaut pour tout $A > 0$, donc $x_n \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Monotonie et limite éventuelle finie.

On a $h(x_{n+1}) = c/(n+1) < c/n = h(x_n)$. Comme h est strictement décroissante, $x_{n+1} > x_n$. La suite est donc croissante et positive.

Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel $\ell \geq x_1 > 0$. La continuité de h donnerait $h(\ell) = \lim h(x_n) = 0$, impossible puisque h est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Elle n'est donc pas majorée et, étant croissante, tend vers $+\infty$.

La première méthode fournit directement la définition de la divergence ; la seconde utilise la structure monotone de la suite.

4. Tous les facteurs sont strictement positifs, car $x_n, c, n > 0$. On peut donc prendre le logarithme de :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_n^2/2}}{x_n} = \frac{c}{n}.$$

Cela donne $-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} x_n^2 - \ln x_n = \ln c - \ln n$. En multipliant par -2 et en regroupant :

$$x_n^2 + 2 \ln x_n = 2 \ln n - \ln(2\pi) - 2 \ln c = 2 \ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. Comme $x_n \rightarrow +\infty$, les croissances comparées donnent $\ln x_n / x_n^2 \rightarrow 0$. Ainsi :

$$\frac{x_n^2 + 2 \ln x_n}{x_n^2} = 1 + \frac{2 \ln x_n}{x_n^2} \rightarrow 1.$$

Le membre de droite de la question 4 est équivalent à $2 \ln n$, puisque $\ln(2c^2\pi)$ est une constante et $\ln n \rightarrow +\infty$. Le nombre $1 + 2 \ln x_n / x_n^2$ tend vers 1 ; il est donc strictement positif pour n suffisamment grand. Pour ces n , l'égalité exacte de 4 donne :

$$\frac{x_n^2}{2 \ln n} = \frac{1 - \ln(2c^2\pi) / (2 \ln n)}{1 + 2 \ln x_n / x_n^2} \rightarrow 1.$$

Les termes sont positifs pour $n \geq 2$. Par continuité de la racine carrée, $x_n / \sqrt{2 \ln n} \rightarrow 1$, donc $x_n \sim \sqrt{2 \ln n}$.

Posons $\varepsilon_1(n) = x_n - \sqrt{2 \ln n}$. Alors :

$$\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln n}} = \frac{x_n}{\sqrt{2 \ln n}} - 1 \rightarrow 0.$$

6. (a) Posons $s_n = \sqrt{2 \ln n}$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n)$ pour $n \geq 2$. On a $s_n > 0$ et $x_n = s_n + \varepsilon_1 > 0$, donc $1 + \varepsilon_1 / s_n > 0$.

En développant exactement le carré et en décomposant le logarithme, l'égalité de 4 devient :

$$s_n^2 + 2s_n\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + 2 \ln s_n + 2 \ln(1 + \varepsilon_1 / s_n) = 2 \ln n - \ln(2c^2\pi).$$

Comme $s_n^2 = 2 \ln n$ et $2 \ln s_n = \ln(2 \ln n)$, on obtient :

$$2s_n\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + 2 \ln(1 + \varepsilon_1 / s_n) = -\ln(2c^2\pi) - \ln(2 \ln n) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

C'est l'identité demandée; aucune approximation n'a été utilisée.

6. (b) Posons $r_n = \varepsilon_1(n)/s_n$. La question 5 donne $r_n \rightarrow 0$. Le membre de droite de 6. (a) est équivalent à $-\ln(\ln n)$ et tend vers $-\infty$. Il est donc non nul pour n suffisamment grand; l'identité impose alors $\varepsilon_1(n) \neq 0$.

Pour ces n , on peut diviser le membre de gauche par $2s_n\varepsilon_1(n)$:

$$\frac{2s_n\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + 2\ln(1+r_n)}{2s_n\varepsilon_1} = 1 + \frac{r_n}{2} + \frac{1}{s_n^2} \frac{\ln(1+r_n)}{r_n}.$$

Or $r_n \rightarrow 0$, $s_n^2 = 2\ln n \rightarrow +\infty$ et $\ln(1+r_n)/r_n \rightarrow 1$. Le rapport tend donc vers 1.

Le membre de gauche de 6. (a) est ainsi équivalent à $2s_n\varepsilon_1(n)$. En comparant les deux membres égaux, on obtient :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \sim -\ln(\ln n).$$

Cette vérification des rapports justifie l'élimination des termes secondaires, sans additionner des équivalents arbitrairement.

Posons $\varepsilon_2(n) = \varepsilon_1(n) + \frac{\ln(\ln n)}{2s_n}$. Alors :

$$\varepsilon_2(n) \frac{2s_n}{\ln(\ln n)} = \frac{2s_n\varepsilon_1(n)}{\ln(\ln n)} + 1 \rightarrow -1 + 1 = 0.$$

On obtient l'écriture demandée de $\varepsilon_1(n)$ et le contrôle du nouveau reste.

Le développement plus précis qui suit est admis dans le sujet original et conservé ici :

$$x_n = s_n - \frac{\ln(\ln n)}{2s_n} - \frac{\ln(4\pi)}{2s_n} - \frac{\ln c}{s_n} + \varepsilon(n), \quad s_n\varepsilon(n) \rightarrow 0.$$

Ce résultat précise le reste à l'échelle $1/s_n$ et permet de comparer les queues normales à la question 7. La conclusion sur ε_2 seule ne suffirait pas à obtenir cette précision supplémentaire.

7. (a) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $c = e^{-x} > 0$, donc $\ln c = -x$. L'expansion admise de x_n , avec ce choix de c , s'écrit :

$$x_n = s_n - \underbrace{\frac{\ln(\ln n)}{2s_n} - \frac{\ln(4\pi)}{2s_n}}_{b_n} + \underbrace{\frac{x}{s_n}}_{a_n x} + \varepsilon(n).$$

Ainsi $a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$ pour tout $n \geq 2$.

7. (b) Question adaptée au programme actuel : le quotient est considéré pour n suffisamment grand, ce qui garantit un dénominateur strictement positif.

Posons $z_n = a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$. On sait que $x_n/s_n \rightarrow 1$ et $s_n \varepsilon(n) \rightarrow 0$. En particulier $\varepsilon(n)/x_n \rightarrow 0$, donc $z_n/x_n \rightarrow 1$ et $z_n \rightarrow +\infty$. Ainsi $z_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Pour ces n , le quotient des deux expressions positives vaut exactement :

$$\frac{\varphi(z_n)/z_n}{\varphi(x_n)/x_n} = \frac{x_n}{z_n} \exp\left(\frac{x_n^2 - z_n^2}{2}\right).$$

Le premier facteur tend vers 1. Pour l'exposant, $x_n^2 - z_n^2 = \varepsilon(n)(2x_n - \varepsilon(n))$. Comme $\varepsilon(n)x_n = (s_n \varepsilon(n))(x_n/s_n) \rightarrow 0$ et $\varepsilon(n) \rightarrow 0$, cet exposant tend vers 0.

Le second facteur tend donc aussi vers 1. Or la définition de x_n donne

$$\varphi(x_n)/x_n = c/n = e^{-x}/n. \text{ Ainsi :}$$

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \sim \frac{e^{-x}}{n}.$$

La petite différence entre z_n et x_n a été contrôlée dans l'exposant : leur simple équivalence n'aurait pas suffi à composer un équivalent avec la densité normale.

7. (c) Question adaptée au programme actuel : la suite finale est indexée par $n \geq 2$, intervalle sur lequel a_n et b_n sont définis. Un nombre fini de termes initiaux n'affecte pas une convergence.

Puisque $z_n \rightarrow +\infty$, on peut appliquer l'encadrement de 1. (b) pour n suffisamment grand. La densité étant strictement positive, $q_n = P(X_1 > z_n) > 0$. L'encadrement donne :

$$1 \leq \frac{\varphi(z_n)/z_n}{q_n} \leq 1 + \frac{1}{z_n^2} \rightarrow 1.$$

On en déduit $\varphi(z_n)/z_n \sim q_n$. En combinant avec 7. (b), $q_n \sim e^{-x}/n$, donc $q_n \rightarrow 0$ et $nq_n \rightarrow e^{-x}$.

Comme $a_n > 0$, l'événement $\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\}$ est $\{M_n \leq z_n\}$. L'indépendance et l'identité des lois des X_k donnent :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq z_n) = (1 - q_n)^n.$$

Pour n suffisamment grand, $0 < q_n < 1$, et $\ln(1 - q_n)/(-q_n) \rightarrow 1$. Donc $n \ln(1 - q_n) \rightarrow -e^{-x}$, puis :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow \exp(-e^{-x}) = F_G(x).$$

La fonction de répartition F_G est continue sur $\mathbb{R}$. La convergence de ces probabilités pour chaque réel x établit donc $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} G$.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, questions 2 et 5 : code adapté en Python et erreur de simulation rectifiée.
Deux tirages indépendants de numéros dans le programme original simulaient une probabilité de paire $1/m$ pour m paires restantes. Le protocole réel exige deux boules distinctes et donne $1/(2m - 1)$. Les nouveaux programmes tirent deux identifiants physiques distincts, puis comparent leurs quotients entiers par 2. Le blanc de la question 2 est conservé. Les bornes exclusives de randint et la division entière sont expliquées dans le sujet.
- Exercice 3, question 3. (b) : question adaptée au programme actuel. La construction par soustraction des projections puis normalisation est fournie explicitement ; sa validité est démontrée. Le procédé général d'orthonormalisation n'est pas supposé connu. Les sous-questions i., ii. et la suite sont conservées.
- Problème, partie 2, question 7. (b) : précision du domaine du quotient pour n suffisamment grand, puisque $a_n x + b_n$ peut être nul ou négatif pour certaines petites valeurs de n . Sa positivité à partir d'un certain rang est établie avant division et comparaison avec une queue normale.

- Problème, partie 2, question 7. (c) : la suite finale commence à $n = 2$, conformément aux formules données pour a_n et b_n , qui ne définissent pas a_1 et b_1 . Cela ne modifie pas la convergence en loi.