



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2010

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

- 1) Montrer que f_n est de classe C^2 sur U .
- 2) Montrer que f_n possède une infinité de points critiques $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et les déterminer.
- 3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n .
- 3) b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque est proportionnelle à la matrice $K_n = nI_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.
- 4) a) Déterminer le rang de J_n . En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- 4) b) Vérifier que le vecteur $v_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 est un vecteur propre de J_n .
- 4) c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n , puis celles de K_n .
- 4) d) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U .

5) Étude du cas $n = 2$.

5) a) Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4x_1x_2$.

5) b) En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.

6) Étude du cas général.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U , égal à n^2 .

Exercice 2

On se place dans un espace euclidien E de dimension n , où $n \geq 2$ est entier. Le produit scalaire des vecteurs x, y est noté $(x | y)$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On désigne par Id l'endomorphisme identité de E . On considère un vecteur $u \in E$ de norme 1, un réel $\lambda \neq 0$, et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur $x \in E$, associe :

$$f_\lambda(x) = \lambda(x | u)u + x.$$

1) Donner la dimension de $\text{Vect}(u)^\perp$.

2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E .

3) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda + 2)X + (\lambda + 1)$ est un polynôme annulateur de f_λ .

4) a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E .

4) b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur $v \in \text{Vect}(u)^\perp$.

- 4) c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.
- 5) Dans cette question, on suppose que $\lambda = -1$.
- 5) a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
- 5) b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^\perp$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. On considère deux variables aléatoires X, Y , définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur cet espace.

- 1) a) Déterminer une densité de $-Y$.
- 1) b) En déduire que la variable $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

- 2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G .
- 2) b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en Python, après l'importation `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random()` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z .

Python

```
import numpy.random as rd
```

```
def z(a):
    x = ...
    y = ...
    return ...
```

Problème

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2

1) a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2) Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Partie 1 : convergence complète

1) Soit une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et une variable aléatoire X , elle aussi définie sur cet espace.

On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X , c'est-à-dire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ est convergente.

Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X .

2) On se propose d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse. On considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, telles que Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $1/n$.

2) a) Déterminer la probabilité $P(Y_n \geq 1)$.

2) b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-1/n}$.

2) c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

- 2) d) Utiliser la valeur de $P(Y_n \geq 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.

Partie 2 : étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère une suite $(B_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, telles que, pour tout entier $k \geq 1$, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/\sqrt{k}$. On suppose que les variables aléatoires B_k sont mutuellement indépendantes.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n B_k, \quad Z_n = \frac{S_n}{E(S_n)},$$

et on admet que S_n et Z_n sont elles aussi des variables aléatoires sur cet espace.

On se propose, dans les questions 1) et 2), de montrer que (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1, puis, dans les questions suivantes, de montrer qu'elle converge complètement vers cette même variable.

- 1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner sous forme de sommes les expressions de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

- 1) b) Vérifier que $V(S_n) \leq E(S_n)$.

- 2) a) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}.$$

- 2) b) Établir que (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) À l'aide de l'inégalité établie à la question 2) a) de cette partie, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geq \varepsilon)$ est convergente.

4) On désigne par e_n la partie entière de $n^{1/4}$, de sorte que $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq Z_n \leq \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}.$$

4) b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}.$$

5) a) Établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1.$$

5) b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, on a :

$$\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geq \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}.$$

5) c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, on a :

$$(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2),$$

$$(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \varepsilon/2).$$

5) d) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, on a :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P(|Z_{e_n^4} - 1| \geq \varepsilon^2).$$

- 5) e) Montrer que (Z_n) converge complètement vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

Pour achever cette démonstration, on pourra utiliser l'indépendance mutuelle et établir, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en posant $\mu_n = E(S_n)$:

$$E(e^{\theta S_n}) \leq \exp(\mu_n(e^\theta - 1)).$$

On utilisera ensuite l'inégalité de Markov appliquée à $e^{\theta S_n}$, avec $\theta > 0$ pour la déviation supérieure et $\theta < 0$ pour la déviation inférieure, afin d'obtenir, pour chaque $\varepsilon > 0$, un réel $c_\varepsilon > 0$ tel que :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-c_\varepsilon \mu_n}.$$

On justifiera la convergence de la série à l'aide du préliminaire et des croissances comparées.