



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque X_n converge en moyenne vers X , la variable $|X_n - X|$ est positive, admet une espérance et $E(|X_n - X|) \rightarrow 0$.

L'inégalité de Markov, appliquée à cette variable au seuil ε , donne :

$$0 \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon}.$$

Le majorant tend vers 0. Par encadrement, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. C'est précisément la convergence en probabilité de X_n vers X .

- 2) a) Chaque Z_k prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. Le produit Y_n est non nul si et seulement si tous ses facteurs sont non nuls. Ainsi :

$$\{Y_n \neq 0\} = \bigcap_{k=1}^n \{Z_k \neq 0\}.$$

Les variables étant mutuellement indépendantes, ces événements le sont également. Pour une loi de Poisson de paramètre λ , $P(Z_k = 0) = e^{-\lambda}$. On en déduit :

$$P(Y_n \neq 0) = \prod_{k=1}^n P(Z_k \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n.$$

- b) Puisque $Y_n \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, $Y_n \geq \varepsilon$ implique $Y_n \neq 0$. Donc :

$$\{Y_n \geq \varepsilon\} \subset \{Y_n \neq 0\}.$$

Si $0 < \varepsilon \leq 1$, ces événements sont même égaux, car un entier naturel non nul est supérieur ou égal à 1. Pour un seuil plus grand, seule l'inclusion est nécessaire à la suite.

c) Comme $|Y_n - 0| = Y_n$, la question précédente donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq (1 - e^{-\lambda})^n.$$

La raison $1 - e^{-\lambda}$ appartient à $]0, 1[$, donc sa puissance tend vers 0. On obtient :

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

3) a) Supposons que Y_n converge en moyenne vers une variable aléatoire Y . La question 1) implique alors $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Or 2) c) donne déjà $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

L'unicité presque sûre de la limite en probabilité, admise dans le sujet, entraîne :

$$P(Y = 0) = 1.$$

En particulier, Y est intégrable et $E(Y) = 0$.

b) Chaque Z_k est intégrable et $E(Z_k) = \lambda$. Les facteurs sont mutuellement indépendants. Le produit d'un nombre fini de variables indépendantes intégrables est intégrable et son espérance est le produit des espérances. Ici on peut appliquer ce résultat par récurrence : le produit des $n - 1$ premiers facteurs est indépendant de Z_n par le lemme des coalitions.

On obtient :

$$E(Y_n) = \prod_{k=1}^n E(Z_k) = \lambda^n.$$

L'existence de l'espérance est ainsi justifiée pour chaque n .

- c) Sous l'hypothèse de 3) a), Y est presque sûrement nul et intégrable. La variable Y_n est intégrable par b), donc $|Y_n - Y|$ l'est aussi, puisque $|Y_n - Y| \leq |Y_n| + |Y|$.

L'inégalité réelle $|Y_n - Y| \geq Y_n - Y$ et la croissance de l'espérance donnent :

$$E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n - Y) = E(Y_n) - E(Y) = \lambda^n.$$

Comme $\lambda > 1$, $\lambda^n \rightarrow +\infty$. Par cette minoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|Y_n - Y|) = +\infty.$$

On peut même préciser l'égalité : $Y = 0$ presque sûrement et $Y_n \geq 0$, donc $|Y_n - Y| = Y_n$ presque sûrement et $E(|Y_n - Y|) = \lambda^n$.

- 4) La suite (Y_n) converge en probabilité vers 0. En revanche, elle ne converge en moyenne vers aucune variable aléatoire : une telle limite serait presque sûrement nulle par 3) a), et 3) c) montre que l'espérance de l'écart tendrait vers $+\infty$, alors que la définition exigerait une limite égale à 0.

Ainsi, la convergence en moyenne implique la convergence en probabilité, mais la réciproque est fausse. Dans cet exemple, le produit est nul avec une probabilité tendant vers 1, tandis que son espérance vaut λ^n et croît sans borne.

Exercice 2

- 1) a) Fixons $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto (1 + t^\alpha)^{-n}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Sur $[0, 1]$, son intégrale est donc finie. Pour $t \geq 1$:

$$0 < \frac{1}{(1 + t^\alpha)^n} \leq \frac{1}{t^{n\alpha}}.$$

Comme $\alpha \geq 2$, on a $n\alpha > 1$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{-n\alpha} dt$ converge. Par comparaison, u_n est bien défini.

Enfin, pour $t \in [0, 1]$, $1 + t^\alpha \leq 2$, donc $u_n \geq \int_0^1 2^{-n} dt = 2^{-n} > 0$.

b) Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$0 < \frac{1}{(1 + t^\alpha)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1 + t^\alpha)^n}.$$

La croissance de l'intégrale donne $0 < u_{n+1} \leq u_n$. L'inégalité est stricte puisque la différence des intégrandes est strictement positive sur tout segment contenu dans $]0, +\infty[$.

La suite est donc strictement décroissante et minorée par 0. Elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ par le théorème de la limite monotone.

2) a) Fixons $A > 0$. Sur le segment $[0, A]$, on intègre par parties en prenant t comme primitive de 1 et en dérivant $(1 + t^\alpha)^{-n}$:

$$\int_0^A \frac{dt}{(1 + t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1 + A^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^A \frac{t^\alpha}{(1 + t^\alpha)^{n+1}} dt.$$

Le terme de bord tend vers 0 lorsque $A \rightarrow +\infty$, car, pour $A \geq 1$:

$$0 \leq \frac{A}{(1 + A^\alpha)^n} \leq A^{1-n\alpha} \rightarrow 0.$$

On réécrit l'intégrande du dernier terme :

$$\frac{t^\alpha}{(1 + t^\alpha)^{n+1}} = \frac{1}{(1 + t^\alpha)^n} - \frac{1}{(1 + t^\alpha)^{n+1}}.$$

Ces deux intégrales impropres convergent d'après 1) a). Le passage à la limite dans l'égalité sur le segment donne donc :

$$u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1}).$$

En isolant u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) u_n.$$

b) Pour $n \geq 2$, on applique successivement la récurrence précédente aux indices $1, 2, \dots, n-1$:

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Tous les facteurs sont strictement positifs, car $k\alpha \geq 2$.

3) Méthode 1 — Logarithme du produit

La positivité de u_1 et de tous les facteurs permet de prendre le logarithme :

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Pour $0 \leq z < 1$, la fonction $h(z) = \ln(1 - z) + z$ vérifie $h(0) = 0$ et $h'(z) = -z/(1 - z) \leq 0$. Ainsi $\ln(1 - z) \leq -z$.

On en déduit :

$$\ln(u_n) \leq \ln(u_1) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

La série harmonique diverge vers $+\infty$. Le majorant tend donc vers $-\infty$, ce qui implique $\ln(u_n) \rightarrow -\infty$ et, en exponentiant :

$$u_n \rightarrow 0.$$

Cette méthode utilise directement le produit de la question 2).

Méthode 2 — Découpage de l'intégrale

Fixons $\delta > 0$. Sur $[0, \delta]$, l'intégrande est majoré par 1. Pour $t \geq \delta$:

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \frac{(1+\delta^\alpha)^{-(n-1)}}{1+t^\alpha}.$$

Ainsi :

$$0 \leq u_n \leq \delta + (1+\delta^\alpha)^{-(n-1)} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \delta + u_1(1+\delta^\alpha)^{-(n-1)}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $0 < \delta < \varepsilon/2$. La raison $(1+\delta^\alpha)^{-1}$ appartient à $]0, 1[$; pour n assez grand, le second terme est inférieur à $\varepsilon/2$. On obtient $u_n < \varepsilon$, d'où $u_n \rightarrow 0$.

Cette preuve retrouve la limite à partir de la définition intégrale, sans échanger une limite et une intégrale.

4) a) La récurrence de 2) a) donne, pour tout $k \geq 1$:

$$ku_{k+1} = \left(k - \frac{1}{\alpha}\right) u_k.$$

En soustrayant $(k-1)u_k$:

$$ku_{k+1} - (k-1)u_k = \frac{\alpha-1}{\alpha}u_k.$$

On somme de $k=1$ à $k=n$. Le membre de gauche est télescopique, et son premier terme retranché est $0u_1 = 0$. Ainsi :

$$nu_{n+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Comme $\alpha > 1$, on peut diviser par $\alpha-1$ et conclure :

$$S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1}.$$

b) La formule du produit, appliquée à u_{n+1} , donne :

$$S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1}u_1 \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) = nu_1 \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

En effet, le facteur d'indice $k=1$ vaut $(\alpha-1)/\alpha$ et simplifie le coefficient.

D'autre part, pour $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$$

On obtient donc :

$$S_n = u_1 \prod_{k=2}^n \frac{1 - 1/(k\alpha)}{1 - 1/k}.$$

Tous les nombres concernés sont strictement positifs. En prenant le logarithme :

$$\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{k\alpha} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right].$$

c) Pour effectuer directement le développement limité demandé, posons

$h(t) = \ln(1 - t/\alpha) - \ln(1 - t)$ au voisinage de 0. La fonction est dérivable près de 0, $h(0) = 0$, et :

$$h'(0) = -\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Son développement limité d'ordre 1 est donc :

$$h(t) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} t + o(t).$$

En prenant $t = 1/k$, on obtient :

$$\ln \left(1 - \frac{1}{k\alpha} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{\alpha - 1}{\alpha k} + o \left(\frac{1}{k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha - 1}{\alpha k}.$$

Le coefficient est non nul puisque $\alpha > 1$. Ce développement est calculé pour la fonction h elle-même, sans composition de développements limités.

d) Pour $k \geq 2$, $1 - 1/(k\alpha) > 1 - 1/k > 0$, donc les différences de logarithmes de b) sont positives. Par c), elles sont équivalentes à $(\alpha - 1)/(\alpha k)$.

La série harmonique diverge, et le coefficient $(\alpha - 1)/\alpha$ est strictement positif. Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs montre que la somme de ces différences de logarithmes tend vers $+\infty$. Par b), $\ln(S_n) \rightarrow +\infty$, donc $S_n \rightarrow +\infty$.

Les S_n étant les sommes partielles de la série de terme général positif u_n , on conclut :

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge vers } +\infty.$$

La condition $u_n \rightarrow 0$ établie en 3) est donc nécessaire à la convergence d'une série, mais elle n'est pas suffisante.

5) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Pour $\alpha = 2$, $u_1 = \int_0^{+\infty} dt/(1+t^2) = \pi/2$, puisque l'arctangente est une primitive de l'intégrande et tend vers $\pi/2$ à l'infini.

La récurrence donne, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) u_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} u_{n-1}.$$

La fonction récursive complétée est :

Python

```
import numpy as np

def u(n):
    if n == 1:
        return np.pi / 2
    else:
        return ((2 * n - 3) / (2 * n - 2)) * u(n - 1)
```

Le paramètre n est un entier supérieur ou égal à 1. Le cas $n == 1$ arrête la récursion. Sinon, la fonction appelle la valeur précédente et la multiplie par le facteur de la récurrence.

Le code a été exécuté pour $n = 1, 2, 3, 10$ et comparé à une intégration numérique. Les trois premières valeurs sont $\pi/2$, $\pi/4$ et $3\pi/16$. Pour de très grandes valeurs de n , une

version itérative éviterait la limite de profondeur des appels récursifs ; la fonction demandée ici conserve le principe récursif.

Exercice 3

Posons $d = 2n + 1$. La dimension de E est $d + 1 = 2n + 2$, et sa base canonique est $(1, X, \dots, X^d)$. La convention du sujet évite toute difficulté en $X = 0$: les expressions sont toujours interprétées comme des polynômes après développement.

1) Pour

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

la définition donne :

$$f(P) = \sum_{k=0}^d a_k X^{d-k} = \sum_{j=0}^d a_{d-j} X^j.$$

Les exposants $d - k$ sont compris entre 0 et d . L'image appartient donc à E .

Pour tous $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, le développement précédent montre $f(aP + bQ) = af(P) + bf(Q)$. Ainsi f est un endomorphisme de E ; il renverse l'ordre des coefficients du polynôme.

2) a) Pour

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

appliquer deux fois le renversement donne :

$$f(f(P)) = f\left(\sum_{k=0}^d a_k X^{d-k}\right) = \sum_{k=0}^d a_k X^{d-(d-k)} = P.$$

Ainsi $f \circ f = \text{Id}$.

- b)** Si $P \neq 0$ est un vecteur propre associé à une valeur propre réelle λ , alors $f(P) = \lambda P$.
Par linéarité et a) :

$$P = f(f(P)) = \lambda f(P) = \lambda^2 P.$$

Comme P est non nul, $\lambda^2 = 1$. Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 et -1 . Leur existence sera établie par les bases des questions 3) et 4).

- 3) a)** L'égalité $P \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ équivaut à $f(P) = P$. En comparant les coefficients de X^k dans les deux polynômes :

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad a_k = a_{d-k}.$$

Comme $d = 2n + 1$ est impair, les indices se regroupent en $n + 1$ paires distinctes $\{k, d - k\}$, avec $0 \leq k \leq n$. Il suffit donc d'écrire le système :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = a_{2n+1-k}.$$

Les équations correspondant aux autres indices répètent celles-ci.

- b)** Tout polynôme du noyau s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k (X^k + X^{d-k}).$$

La famille $\mathcal{B}_+ = (X^k + X^{d-k})_{0 \leq k \leq n}$ est donc génératrice du noyau. Elle est libre : si

$$\sum_{k=0}^n c_k (X^k + X^{d-k}) = 0,$$

alors le coefficient de X^k , pour $0 \leq k \leq n$, est exactement c_k , car les exposants $d - k$ sont tous supérieurs ou égaux à $n + 1$. L'identité polynomiale impose $c_k = 0$ pour tout k .

Ainsi :

$$\mathcal{B}_+ = (1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \dots, X^n + X^{n+1})$$

est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$, de dimension $n + 1$. Chaque vecteur de cette base est non nul et vérifie $f(P) = P$, donc 1 est bien une valeur propre.

4) Un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

appartient à $\text{Ker}(f + \text{Id})$ si et seulement si $f(P) = -P$. La comparaison des coefficients donne $a_{d-k} = -a_k$ pour $0 \leq k \leq n$.

Tout polynôme du noyau s'écrit donc :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k (X^k - X^{d-k}).$$

La famille $\mathcal{B}_- = (X^k - X^{d-k})_{0 \leq k \leq n}$ est génératrice. Si une combinaison linéaire de ces polynômes est nulle, ses coefficients de degrés 0 à n sont les coefficients de la combinaison ; ils doivent tous s'annuler. La famille est donc libre.

Ainsi :

$$\mathcal{B}_- = (1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$$

est une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$, de dimension $n + 1$. Ses vecteurs non nuls vérifient $f(P) = -P$, donc -1 est effectivement une valeur propre.

On a ainsi $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, y compris lorsque $n = 0$, où les deux bases sont respectivement $(1 + X)$ et $(1 - X)$.

- 5) a) Les coefficients d'un polynôme dans la base canonique sont uniques; φ est donc bien définie. La somme des produits de coordonnées est bilinéaire et symétrique. Plus explicitement, les coordonnées de $aP + bR$ sont les combinaisons $aa_k + bc_k$, donc :

$$\varphi(aP + bR, Q) = a\varphi(P, Q) + b\varphi(R, Q).$$

La linéarité dans la seconde variable se vérifie de même, et $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ par commutativité du produit réel.

Enfin :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^d a_k^2 \geq 0.$$

Cette somme est nulle si et seulement si tous les coefficients a_k sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $P = 0$. Ainsi φ est un produit scalaire sur E .

La base canonique $(1, X, \dots, X^d)$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

- b) Si P a pour coefficients (a_k) et Q pour coefficients (b_k) , les coefficients de $f(P)$ sont (a_{d-k}) . Ainsi, par changement d'indice dans une somme finie :

$$\varphi(f(P), Q) = \sum_{k=0}^d a_{d-k} b_k = \sum_{j=0}^d a_j b_{d-j} = \varphi(P, f(Q)).$$

Cette identité, valable pour tous $P, Q \in E$, montre que l'endomorphisme f est symétrique.

c) Méthode 1 — Espaces propres d'un endomorphisme symétrique

Notons $E_+ = \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $E_- = \text{Ker}(f + \text{Id})$. Ce sont les espaces propres de f associés à 1 et -1 . Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Ici, on peut vérifier l'orthogonalité directement : pour $P \in E_+$ et $Q \in E_-$, la symétrie donne :

$$\varphi(P, Q) = \varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q)) = -\varphi(P, Q).$$

Donc $\varphi(P, Q) = 0$. En particulier, l'intersection des deux espaces est réduite à $\{0\}$. Leurs dimensions valent chacune $n + 1$ d'après 3) et 4), et leur somme vaut $2n + 2 = \dim E$. On en déduit :

$$E = E_+ \oplus E_-, \quad E_+ \perp E_-.$$

Ils sont donc supplémentaires orthogonaux.

Méthode 2 — Décomposition explicite

Pour tout $P \in E$, posons :

$$P_+ = \frac{P + f(P)}{2}, \quad P_- = \frac{P - f(P)}{2}.$$

Comme $f^2 = \text{Id}$, on vérifie $f(P_+) = P_+$ et $f(P_-) = -P_-$. Ainsi $P_+ \in E_+$, $P_- \in E_-$ et $P = P_+ + P_-$.

Pour l'unicité, si un polynôme R appartient aux deux espaces, alors $f(R) = R = -R$, donc $R = 0$. Cette décomposition est donc directe. L'orthogonalité résulte de l'identité de symétrie calculée dans la première méthode.

Cette seconde méthode donne les composantes de chaque polynôme dans les deux supplémentaires ; la première utilise les dimensions et la structure des espaces propres.

Problème

Partie 1 : préliminaire

1) a) Puisque $0 \leq t \leq x < 1$, $t \neq 1$. La somme géométrique finie donne :

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1 - t^n}{1 - t}.$$

Cette formule reste valable en $t = 0$, où la somme vaut 1.

b) On intègre l'identité de a) sur le segment $[0, x]$. La somme étant finie et chaque fonction continue sur ce segment, la linéarité de l'intégrale donne :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt = \int_0^x \frac{dt}{1 - t} - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

Une primitive du premier intégrande est $-\ln(1 - t)$. Ainsi :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) Pour $t \in [0, x]$, on a $1-t \geq 1-x > 0$. Par conséquent :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}.$$

Pour x fixé dans $[0, 1[$, le majorant tend vers 0, puisque $0 \leq x^{n+1} \leq 1$ et $(n+1)(1-x) \rightarrow +\infty$. Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

Pour $x = 0$, toutes ces intégrales sont nulles.

d) Par b) et c), les sommes partielles

$$\sum_{p=1}^n x^p/p$$

convergent vers $-\ln(1-x)$. La série est donc convergente et :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

La démonstration passe à la limite dans une identité de sommes finies, avec un reste majoré explicitement. Aucun échange direct entre une série infinie et une intégrale n'est nécessaire.

2) a) Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

La série de ces termes est télescopique : pour tout $m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1},$$

donc elle converge vers 1.

Puisque $0 \leq x < 1$, on a :

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs montre que la série demandée converge.

b) L'identité de a) donne :

$$\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Les deux séries du membre de droite convergent par 1) d) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x \ln(1-x),$$

et, par un décalage d'indice :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - x.$$

Par linéarité de séries convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x = x + (1-x) \ln(1-x).$$

Le calcul ne divise pas par x et reste donc valable en $x = 0$.

Partie 2

1) Pour $x < 0$, la densité est nulle sur $] -\infty, 0[$, donc $F(x) = 0$ et $1 - F(x) = 1 > 0$.

Pour $x \geq 0$, la normalisation de la densité donne :

$$1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

Fixons un point $t_0 > x$. Comme $f(t_0) > 0$ et f est continue, il existe un petit segment centré en t_0 , contenu dans $]x, +\infty[$, sur lequel $f(t) \geq f(t_0)/2 > 0$. L'intégrale sur ce segment est strictement positive, et la positivité du reste de l'intégrale entraîne $1 - F(x) > 0$.

Ainsi, pour tout réel x , $F(x) < 1$. En outre, $F(0) = 0$, puisque X est à densité et sa densité est nulle sur les réels négatifs.

2) Pour $x \geq 0$, on a $0 < 1 - F(x) \leq 1$, donc $\ln(1 - F(x)) \leq 0$. Puisque $f(x) > 0$, $g(x) = -f(x) \ln(1 - F(x)) \geq 0$. Pour $x < 0$, $g(x) = 0$.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, F y est continue et $1 - F$ ne s'y annule jamais. Ainsi g est continue sur cette demi-droite. En 0, $g(0) = -f(0) \ln 1 = 0$, ce qui coïncide avec la limite à gauche de la fonction nulle. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Il reste à vérifier la normalisation. Pour $x \geq 0$, posons :

$$H(x) = F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x)).$$

Sur $]0, +\infty[$, F est de classe C^1 et $F' = f$. La dérivation du produit donne :

$$H'(x) = f(x) - f(x) \ln(1 - F(x)) - f(x) = -f(x) \ln(1 - F(x)) = g(x).$$

Cette primitive est continue en 0, avec $H(0) = 0$. L'identité $\int_0^A g(t) dt = H(A) - H(0)$ se justifie d'abord sur $[\delta, A]$, puis par passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$, grâce à la continuité de g et de H en 0.

Comme $F(A) \rightarrow 1$ lorsque $A \rightarrow +\infty$, on a $s = 1 - F(A) \rightarrow 0^+$. La croissance comparée donne $s \ln s \rightarrow 0$. Ainsi $H(A) \rightarrow 1$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = 1.$$

La fonction g est positive, continue et normalisée : elle peut être prise comme densité d'une variable aléatoire Y .

On obtient aussi sa fonction de répartition :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 3)** a) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on peut choisir sa densité égale à 0 pour $x < 0$ et à $\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Cette dernière expression est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Cette loi satisfait donc les conditions imposées. La valeur de la densité choisie en 0 n'affecte pas la loi et permet bien la continuité sur la demi-droite demandée.

b) Pour $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, donc :

$$g(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \ln(e^{-\lambda x}) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Pour $x < 0$, $g(x) = 0$.

Méthode 1 — Reconnaissance après changement d'échelle

Posons $T = \lambda Y$. La transformation affine d'une variable à densité donne, pour $t > 0$, la densité :

$$f_T(t) = \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) = t e^{-t}.$$

Cette densité est celle de la loi gamma de forme 2 et de taux 1, car $\Gamma(2) = 1$. Ainsi $T \sim \Gamma(2)$; autrement dit, Y suit une loi gamma de forme 2 et de taux λ , entièrement caractérisée ici par $\lambda Y \sim \Gamma(2)$.

Pour la loi gamma de forme 2 et de taux 1, les moments sont $E(T) = 2$ et $V(T) = 2$. La transformation $Y = T/\lambda$ donne :

$$E(Y) = \frac{2}{\lambda}, \quad V(Y) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cette méthode utilise seulement la loi gamma de taux 1 du référentiel et une transformation affine.

Méthode 2 — Somme de deux exponentielles indépendantes

Soient A et B indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Leurs densités sont positives, intégrables et continues sur la demi-droite positive ; la convolution donne une densité de leur somme. Pour $x > 0$:

$$f_{A+B}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x dt = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Pour $x < 0$, cette densité est nulle. Elle coïncide donc avec $g : Y$ a la même loi que $A + B$.

Les moments des exponentielles existent et valent $E(A) = E(B) = 1/\lambda$, $V(A) = V(B) = 1/\lambda^2$. Par linéarité de l'espérance et additivité des variances pour des variables indépendantes :

$$E(Y) = E(A) + E(B) = \frac{2}{\lambda}, \quad V(Y) = V(A) + V(B) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cette seconde interprétation fait apparaître la loi comme celle d'une somme de deux temps exponentiels indépendants.

Partie 3

1) L'identité du préliminaire donne, pour tout $m \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^m u_n = \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

En passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

Les u_n sont strictement positifs ; ils définissent donc une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, celle de N donnée dans le sujet.

2) a) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : le maximum à nombre aléatoire de termes $Z = \max(X_0, \dots, X_N)$ est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé considéré. Cet énoncé particulier permet de travailler avec sa fonction de répartition sans développer une théorie générale de la mesurabilité.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Les événements $\{N = n\}$, pour $n \geq 1$, forment un système complet d'événements. Sur $\{N = n\}$, l'événement $\{Z \leq x\}$ équivaut à $\{X_0 \leq x, \dots, X_n \leq x\}$.

L'indépendance de N et de la famille des X_i permet d'écrire :

$$P(Z \leq x \mid N = n) = P(X_0 \leq x, \dots, X_n \leq x).$$

Les X_i sont mutuellement indépendantes et ont toutes pour fonction de répartition F . Il y a $n + 1$ variables, puisque l'indice commence à 0. On obtient donc $P(Z \leq x \mid N = n) = F(x)^{n+1}$.

La formule des probabilités totales donne :

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P(Z \leq x \mid N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F(x)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

La série converge : chaque terme est positif et majoré par $1/(n(n+1))$, dont la somme vaut 1.

- b) Pour $x \geq 0$, la partie 2 donne $F(x) \in [0, 1[$. On peut donc appliquer l'identité du préliminaire à la valeur réelle $F(x)$, sans aucun échange de limites :

$$F_Z(x) = F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x)).$$

En particulier, $F_Z(0) = 0$. Pour $x < 0$, $F(x) = 0$ et tous les termes de la série de a) sont nuls, donc $F_Z(x) = 0$.

- c) La formule explicite de b) est continue sur $[0, +\infty[$, car $1 - F(x) > 0$ pour tout x fini. Elle tend vers 0 en 0^+ puisque $F(0) = 0$. Comme F_Z est nulle sur $] - \infty, 0[$, elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Sur $]0, +\infty[$, F est de classe C^1 , avec $F' = f$. La même dérivation que dans la partie 2 donne :

$$F'_Z(x) = f(x) - f(x) \ln(1 - F(x)) - f(x) = -f(x) \ln(1 - F(x)) = g(x).$$

Sur $] - \infty, 0[$, F'_Z vaut $0 = g(x)$. La fonction de répartition F_Z est donc continue partout et de classe C^1 sauf éventuellement en 0. La caractérisation par la fonction de répartition montre que Z est à densité, et sa densité peut être choisie égale à g , dont la normalisation a déjà été établie dans la partie 2.

La construction proposée réalise ainsi la loi recherchée. La dérivation a porté sur une expression explicite de F_Z , et non sur une série infinie.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 3) c) : l'hypothèse de convergence en moyenne formulée en 3) a) est explicitement rappelée dans le sujet, afin de donner un sens précis à la variable Y utilisée dans cette question.

Exercice 2, question 5) : code adapté en Python, en conservant la récursion et les deux expressions à compléter.

Exercice 3, préambule des questions 1) à 5) : le paramètre n est explicitement déclaré entier naturel, et l'expression de $f(P)$ est interprétée par développement polynomial conformément à la convention du document source. Cela précise les objets sans introduire de division en $X = 0$.

Problème, partie 3, question 2) a) : le fait que le maximum à nombre aléatoire de termes Z est une variable aléatoire est admis dans cette version. Le calcul complet de sa fonction de répartition est conservé et démontré par probabilités totales, afin d'éviter une preuve faisant appel à la théorie de la mesurabilité.