



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EDHEC**

Mathématiques

**2007**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Corrigé

## Exercice 1

---

- 1) Fixons  $n \geq 1$ . Sur  $[0, +\infty[$ , le dénominateur  $x + 1/n$  est strictement positif. La fonction intégrée est donc continue et positive, notamment au point 0.

De plus, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{x + 1/n} \leq ne^{-x}.$$

L'intégrale de la fonction majorante sur  $[0, +\infty[$  vaut  $n$  et converge. Par comparaison d'intégrales positives,  $u_n$  est défini et fini. Cela vaut pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc la suite est bien définie.

- 2) a) Pour  $x \geq 1$ ,  $x + 1/n \geq 1$ , d'où  $0 \leq e^{-x}/(x + 1/n) \leq e^{-x}$ . Les intégrales convergent et la croissance de l'intégrale donne

$$0 \leq w_n \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

- 2) b) Sur  $[0, 1]$ ,  $e^{-x} \geq e^{-1}$ . Comme le dénominateur est strictement positif,

$$v_n \geq \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{dx}{x + 1/n} = \frac{1}{e} [\ln(x + 1/n)]_0^1 = \frac{1}{e} \ln(n + 1).$$

- 2) c) Par la relation de Chasles pour l'intégrale convergente,  $u_n = v_n + w_n$ . Comme  $w_n \geq 0$ ,  $u_n \geq v_n \geq e^{-1} \ln(n + 1)$ .

La borne inférieure tend vers  $+\infty$ , donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

- 3) a) Méthode 1 — Prolongement par continuité.

La fonction  $h(x) = (1 - e^{-x})/x$  est continue sur  $]0, 1]$ . Le développement limité de l'exponentielle en 0 donne  $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ , donc  $h(x) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .

La fonction  $h$  se prolonge ainsi en une fonction continue sur  $[0, 1]$  en posant  $h(0) = 1$ . Son intégrale sur ce segment existe ; l'intégrale impropre  $I$  converge et vaut cette intégrale.

## Méthode 2 — Comparaison directe.

Pour  $x \in ]0, 1]$ , le théorème fondamental du calcul intégral donne  $1 - e^{-x} = \int_0^x e^{-t} dt$ .

Comme  $0 < e^{-t} \leq 1$  pour  $t \geq 0$ ,

$$0 \leq 1 - e^{-x} \leq x, \text{ donc } 0 \leq \frac{1 - e^{-x}}{x} \leq 1.$$

La fonction intégrée est donc positive et dominée par une fonction intégrable au voisinage de 0. Elle est continue hors de 0, donc l'intégrale  $I$  converge par comparaison. Cette preuve donne en outre  $0 \leq I \leq 1$ .

La première méthode précise la valeur du prolongement en 0 ; la seconde établit la convergence à partir d'un encadrement élémentaire.

**3) b)** Pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $1 - e^{-x} \geq 0$  et  $x + 1/n \geq x > 0$ , donc

$$0 \leq \frac{1 - e^{-x}}{x + 1/n} \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

L'intégrale du membre de gauche est une intégrale de fonction continue sur  $[0, 1]$ , et celle du membre de droite converge par 3) a). En intégrant les inégalités, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + 1/n} dx \leq I.$$

**3) c)** On utilise l'identité exacte  $e^{-x} = 1 - (1 - e^{-x})$ . Elle donne

$$v_n = \int_0^1 \frac{dx}{x + 1/n} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + 1/n} dx.$$

La première intégrale vaut  $\ln(n + 1)$ , et la seconde est comprise entre 0 et  $I$  par 3) b).  
Donc

$$\ln(n + 1) - I \leq v_n \leq \ln(n + 1).$$

Cet encadrement vaut pour tout  $n \geq 1$ , même si sa borne inférieure peut être négative pour les premiers rangs.

3) d) Puisque  $u_n = v_n + w_n$  et  $0 \leq w_n \leq 1/e$ , on obtient

$$\ln(n+1) - I \leq u_n \leq \ln(n+1) + \frac{1}{e}.$$

Pour  $n \geq 2$ , divisons par  $\ln(n) > 0$ . L'identité  $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n)$  donne  $\ln(n+1)/\ln(n) \rightarrow 1$ . Les constantes  $I$  et  $1/e$ , divisées par  $\ln(n)$ , tendent vers 0.

Par encadrement,  $u_n/\ln(n) \rightarrow 1$ . Ainsi

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

La preuve n'échange pas une limite et une intégrale : elle utilise un encadrement uniforme de l'erreur.

## Exercice 2

---

1) La famille  $(I, J, K, L)$  engendre  $E$  par définition. Pour vérifier qu'elle est libre, supposons  $aI + bJ + cK + dL = 0$ .

La première ligne de la matrice de gauche est  $(a, -b, -c, d)$ . Elle doit être nulle, donc  $a = b = c = d = 0$ .

La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de  $E$ , et  $\dim E = 4$ .

2) a) Pour calculer ces produits, on utilise le fait que chaque ligne de  $J$ ,  $K$  et  $L$  possède un seul coefficient non nul : chaque ligne d'un produit est donc une ligne de la seconde matrice, éventuellement changée de signe.

Par exemple, les lignes de  $JK$  sont respectivement l'opposée de la deuxième ligne de  $K$ ,

la première ligne de  $K$ , la quatrième ligne de  $K$  et l'opposée de sa troisième ligne. Ainsi

$$JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L.$$

De la même manière, les lignes de  $KL$  sont l'opposée de la troisième ligne de  $L$ , l'opposée de sa quatrième ligne, sa première ligne et sa deuxième ligne. Donc

$$KL = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

Enfin, les lignes de  $LJ$  sont la quatrième ligne de  $J$ , l'opposée de sa troisième ligne, sa deuxième ligne et l'opposée de sa première ligne. Donc

$$LJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

- 2) b) La même règle sur les lignes donne, pour chacune des trois matrices, un carré égal à l'opposée de l'identité :

$$J^2 = K^2 = L^2 = -I.$$

Pour préciser ce calcul,  $J$  associe à un vecteur de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  le vecteur  $(-x_2, x_1, x_4, -x_3)$ . Une seconde application donne  $(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ . De même,  $K$  transforme ces coordonnées en  $(-x_3, -x_4, x_1, x_2)$  et  $L$  en  $(x_4, -x_3, x_2, -x_1)$ ; une seconde application donne encore l'opposé du vecteur de départ.

Les produits de 2) a) permettent de déduire les produits inversés sans supposer de commutation :

$$KJ = K(KL) = K^2L = -L,$$

$$LK = L(LJ) = L^2J = -J,$$

$$JL = J(JK) = J^2K = -K.$$

2) c) Les produits des vecteurs de base appartiennent tous à  $E$ . Leur table est :

| Produit | $I$ | $J$  | $K$  | $L$  |
|---------|-----|------|------|------|
| $I$     | $I$ | $J$  | $K$  | $L$  |
| $J$     | $J$ | $-I$ | $L$  | $-K$ |
| $K$     | $K$ | $-L$ | $-I$ | $J$  |
| $L$     | $L$ | $K$  | $-J$ | $-I$ |

Pour deux matrices  $M, N \in E$ , on les écrit comme combinaisons linéaires de  $I, J, K, L$ . La distributivité du produit matriciel exprime  $MN$  comme une combinaison linéaire des seize produits du tableau. Tous étant dans  $E$ , on a  $MN \in E$ .

Ainsi  $E$  est stable pour le produit matriciel.

3) En développant sans supposer que  $J$  et  $K$  commutent,

$$A^2 = (J + K)^2 = J^2 + JK + KJ + K^2 = -I + L - L - I = -2I.$$

Donc  $A(-A/2) = (-A/2)A = I$ . Cela établit l'inversibilité de  $A$  et fournit

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A.$$

En particulier,  $A^{-1} \in E$ .

- 4) a) Les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  appartiennent à  $E$ . Par stabilité pour le produit,  $AMA^{-1} \in E$  pour tout  $M \in E$ .

Pour  $M, N \in E$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ , la distributivité donne

$$\varphi_A(aM + bN) = A(aM + bN)A^{-1} = a\varphi_A(M) + b\varphi_A(N).$$

L'application est donc linéaire de  $E$  dans  $E$  : c'est un endomorphisme.

- 4) b) Si  $\varphi_A(M) = 0$ , alors  $AMA^{-1} = 0$ . En multipliant à gauche par  $A^{-1}$  et à droite par  $A$ , on obtient  $M = 0$ . Réciproquement,  $\varphi_A(0) = 0$ .

Ainsi  $\text{Ker } \varphi_A = \{0\}$ . L'endomorphisme est injectif et  $E$  est de dimension finie ; par le théorème du rang, il est bijectif. C'est donc un automorphisme de  $E$ .

On peut aussi exhiber son inverse : l'application  $N \mapsto A^{-1}NA$  est bien définie sur  $E$ , et sa composition avec  $\varphi_A$ , dans les deux ordres, est l'identité.

- 5) a) Calculons les images des matrices de base avec  $A^{-1} = -A/2$  et la table des produits.

Tout d'abord,  $\varphi_A(I) = I$ . Ensuite,

$$\varphi_A(J) = -\frac{1}{2}(J + K)J(J + K) = \frac{1}{2}(I + L)(J + K) = \frac{1}{2}(J + K + K - J) = K.$$

De même,

$$\varphi_A(K) = -\frac{1}{2}(J + K)K(J + K) = \frac{1}{2}(I - L)(J + K) = \frac{1}{2}(J + K - K + J) = J.$$

Enfin,

$$\varphi_A(L) = -\frac{1}{2}(J+K)L(J+K) = -\frac{1}{2}(J-K)(J+K) = -\frac{1}{2}(2L) = -L.$$

Les colonnes de la matrice sont les coordonnées de ces images dans la base  $(I, J, K, L)$ , donc

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Méthode 1 — Matrice symétrique réelle.

---

La matrice  $\Phi_A$  est réelle et symétrique. Le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles assure qu'elle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . L'endomorphisme représenté par cette matrice,  $\varphi_A$ , est donc diagonalisable.

Cette application du théorème spectral concerne la matrice numérique  $\Phi_A$  ; elle ne suppose pas encore que la base  $(I, J, K, L)$  soit orthonormale pour le produit scalaire introduit ensuite.

### Méthode 2 — Construction d'une base propre.

Les images calculées donnent

$$\varphi_A(I) = I, \quad \varphi_A(J + K) = J + K, \quad \varphi_A(J - K) = -(J - K), \quad \varphi_A(L) = -L.$$

La famille  $(I, J + K, J - K, L)$  est libre : une relation  $aI + b(J + K) + c(J - K) + dL = 0$  donne  $a = 0, b + c = 0, b - c = 0, d = 0$  dans la base initiale, donc tous les coefficients sont nuls.

Elle comporte quatre vecteurs de  $E$ , donc c'est une base. Elle est formée de vecteurs propres, ce qui prouve directement la diagonalisation de  $\varphi_A$ .

La première méthode donne l'existence par un théorème du cours ; la seconde fournit une base de diagonalisation explicite.

5) b) Pour  $M = aI + bJ + cK + dL$ , les images de 5) a) donnent

$$\varphi_A(M) = aI + cJ + bK - dL.$$

L'équation  $\varphi_A(M) = M$  équivaut à  $c = b$  et  $d = 0$ , sans restriction sur  $a$ . Ainsi

$$\text{Ker}(\varphi_A - \text{Id}) = \text{Vect}(I, J + K).$$

L'équation  $\varphi_A(M) = -M$  équivaut à  $a = 0$  et  $c = -b$ , sans restriction sur  $d$ . Ainsi

$$\text{Ker}(\varphi_A + \text{Id}) = \text{Vect}(J - K, L).$$

Ces deux espaces ont dimension 2 et leurs bases réunies forment la base propre de 5) a). Les seules valeurs propres sont donc 1 et  $-1$ .

On peut également exclure toute autre valeur propre à partir de  $\Phi_A^2 = I_4$  : si

$$\varphi_A(M) = \lambda M \text{ avec } M \neq 0, \text{ alors } M = \varphi_A^2(M) = \lambda^2 M, \text{ donc } \lambda^2 = 1.$$

6) a) Écrivons  $P = (p_{ij})$  et  $Q = (q_{ij})$ . Le coefficient diagonal d'indice  $i$  du produit est

$$(PQ)_{ii} = \sum_{j=1}^4 p_{ij} q_{ji}.$$

Ainsi

$$\text{Tr}(PQ) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_{ij} q_{ji} = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 q_{ji} p_{ij} = \text{Tr}(QP).$$

On utilise seulement une permutation des indices dans une somme finie et la commutation des produits de réels. Cette identité vaut en fait pour toutes les matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , donc en particulier pour celles de  $E$ .

6) b) Les matrices  $J, K$  et  $L$  sont antisymétriques, ce qui se vérifie dans leurs coefficients :  ${}^tJ = -J$ ,  ${}^tK = -K$  et  ${}^tL = -L$ . En particulier,  ${}^tA = -A$ , et  $A^{-1} = -A/2$  implique  ${}^t(A^{-1}) = -A^{-1}$ .

Pour  $M, N \in E$ , la transposition d'un produit donne

$$(\varphi_A(M)/N) = \text{Tr}({}^t(AM A^{-1})N) = \text{Tr}(A^{-1}{}^tMAN),$$

car les deux signes négatifs venant des transposées de  $A$  et de  $A^{-1}$  s'annulent.

La propriété de trace démontrée en 6) a), appliquée aux matrices  $A^{-1}$  et  ${}^tMAN$ , donne

$$\text{Tr}(A^{-1}{}^tMAN) = \text{Tr}({}^tMAN A^{-1}) = (M/\varphi_A(N)).$$

Si l'on se limite à la formulation de 6) a) sur  $E$ , ses hypothèses sont également vérifiées :  ${}^tM \in E$ , car la transposition envoie  $I, J, K, L$  respectivement sur  $I, -J, -K, -L$ , et les produits restent dans  $E$ .

Ainsi  $(\varphi_A(M)/N) = (M/\varphi_A(N))$  pour tous  $M, N \in E$  :  $\varphi_A$  est symétrique pour ce produit scalaire.

- 6) c) Les deux noyaux sont les espaces propres associés aux valeurs propres distinctes 1 et  $-1$  de l'endomorphisme symétrique  $\varphi_A$ . Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

On peut vérifier cette orthogonalité directement : pour  $M \in \text{Ker}(\varphi_A - \text{Id})$  et  $N \in \text{Ker}(\varphi_A + \text{Id})$ ,

$$(M/N) = (\varphi_A(M)/N) = (M/\varphi_A(N)) = -(M/N),$$

donc  $(M/N) = 0$ .

Les bases de 5) b) réunies forment une base de  $E$ , donc ces deux espaces sont aussi supplémentaires. Ainsi

$$E = \text{Ker}(\varphi_A - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\varphi_A + \text{Id}),$$

et cette somme directe est orthogonale.

### Exercice 3

---

- 1) Les variables  $X_k$  sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de taux 1. La stabilité par somme des lois gamma de même taux donne

$$S_n \sim \Gamma(n, 1),$$

c'est-à-dire la loi gamma de forme  $n$  et de taux 1. Une densité est

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

On a utilisé  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Les moments usuels de la loi gamma donnent  $E(S_n) = n$  et  $V(S_n) = n$ .

On peut retrouver les mêmes moments par linéarité de l'espérance et additivité de la variance pour une somme de variables indépendantes : chacune possède une espérance et une variance égales à 1.

- 2) Les  $X_k$  sont indépendantes, de même loi, d'espérance finie 1 et de variance finie strictement positive 1. Le théorème limite central s'applique donc à la suite

$$Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

Elle converge en loi vers une variable  $Z$  de loi normale centrée réduite. La fonction de répartition de  $Z$  est continue en 0, donc

$$P(S_n \leq n) = P(Z_n \leq 0) \rightarrow P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

La dernière égalité vient de la symétrie de la normale centrée réduite.

- 3) La densité de  $S_n$  établie en 1) donne exactement

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt = P(S_n \leq n).$$

Le résultat de 2) fournit donc la limite demandée, égale à  $1/2$ . On n'effectue pas de passage à la limite sous une intégrale : on identifie chaque intégrale à une probabilité.

- 4) a) Posons  $H_n = \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz$ . Le changement de variable affine  $t = nz$  donne  $dz = dt/n$ , donc

$$H_n = \frac{1}{n^n} \int_0^n t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{(n-1)!}{n^n} P(S_n \leq n).$$

Comme  $P(S_n \leq n) \rightarrow 1/2$ , et que le facteur  $(n-1)!/n^n$  est strictement positif,

$$H_n \sim \frac{(n-1)!}{2n^n} = \frac{n!}{2n^{n+1}}.$$

Pour le vérifier directement, le quotient de  $H_n$  par le dernier membre vaut  $2P(S_n \leq n)$  et tend vers 1.

- 4) b) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} e^n H_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Il remplace le recours à un équivalent général des factorielles extérieur au référentiel. Le résultat admis porte uniquement sur l'intégrale de cette question.

La constante limite est strictement positive. En divisant par celle-ci, on obtient

$$\frac{H_n}{\sqrt{\pi/(2n)} e^{-n}} = \frac{\sqrt{n} e^n H_n}{\sqrt{\pi/2}} \rightarrow 1.$$

Donc le nouvel équivalent est

$$\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} e^{-n}.$$

Cette étape utilise exactement la limite particulière admise et aucun résultat supplémentaire sur les factorielles.

## Problème

Le nombre  $n \geq 2$  de boules dans chaque urne est désormais fixé. Posons

$$a = \frac{1}{n}, \quad b = \frac{n-1}{n}.$$

On a  $a, b \in ]0, 1[$  et  $a + b = 1$ . L'urne  $U$  donne une blanche avec probabilité  $a$  et une noire avec probabilité  $b$ ; dans  $V$ , les probabilités sont inversées. Le premier choix d'urne est équiprobable, donc  $P(U) = P(\bar{U}) = 1/2$ .

Pour calculer  $X$ , on observe des blanches jusqu'à la première noire. Pour calculer  $Y$ , on observe des noires jusqu'à la première blanche. Les tirages avec remise sont indépendants lorsque l'urne est fixée; lorsque l'urne évolue, on utilise les probabilités composées suivant le protocole.

## Partie 1

1) a) L'événement  $(X = 1)$  est  $\bar{B}_1$ . Par probabilités totales selon l'urne initiale,

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}.$$

1) b) Pour  $k \geq 2$ , on doit obtenir  $k - 1$  blanches suivies d'une noire :

$$\{X = k\} = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}.$$

Conditionnellement à  $U$ , tous les tirages ont lieu dans  $U$  et sont indépendants : la probabilité est  $a^{k-1}b$ . Conditionnellement à  $\overline{U}$ , ils ont tous lieu dans  $V$ , et la probabilité est  $b^{k-1}a$ .

Par probabilités totales,

$$P(X = k) = \frac{1}{2}(a^{k-1}b + b^{k-1}a) = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n} \right).$$

Pour  $k = 1$ , cette expression vaut  $(a + b)/2 = 1/2$ , en accord avec 1) a). Elle décrit donc la loi pour tous les entiers  $k \geq 1$ . La somme des probabilités vaut  $\frac{1}{2}b/(1-a) + \frac{1}{2}a/(1-b) = 1$ .

2) Méthode 1 — Loïs géométriques conditionnelles.

Conditionnellement à  $U$ ,  $X$  est géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $b$ ; conditionnellement à  $\overline{U}$ , il est géométrique de paramètre  $a$ . Ces deux paramètres sont strictement positifs, et les deux espérances conditionnelles sont finies, respectivement  $1/b$  et  $1/a$ .

La formule de l'espérance totale, sur ces deux événements, établit l'existence de l'espérance et donne

$$E(X) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{n-1} + n \right) = \frac{n^2}{2(n-1)}.$$

**Méthode 2 — Sommation de la loi.**

Les termes de la série définissant l'espérance sont positifs. Les formules de séries

géométriques dérivées donnent, pour  $q \in ]0, 1[$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Avec la loi de 1) b), la série converge et

$$E(X) = \frac{1}{2} \left( b \sum_{k=1}^{+\infty} ka^{k-1} + a \sum_{k=1}^{+\infty} kb^{k-1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{(1-a)^2} + \frac{a}{(1-b)^2} \right).$$

Comme  $1-a=b$  et  $1-b=a$ , on retrouve  $E(X) = \frac{1}{2}(1/b + 1/a)$ .

Le conditionnement fait reconnaître des lois usuelles ; la sommation fournit une vérification directe à partir de la loi non usuelle obtenue.

3) Pour  $k \geq 1$ , l'événement  $(Y = k)$  demande  $k-1$  noires puis une blanche. Dans  $U$ , sa probabilité conditionnelle est  $b^{k-1}a$  ; dans  $V$ , elle est  $a^{k-1}b$ . Ainsi

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}(b^{k-1}a + a^{k-1}b) = P(X = k).$$

Donc  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

On peut aussi le comprendre par symétrie : échanger les noms des couleurs et les noms des urnes laisse l'expérience inchangée, puisque le choix initial est équiprobable et que tous les tirages suivants restent dans l'urne initiale. Cet échange transforme l'attente d'une noire en l'attente d'une blanche.

4) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le code `hasard = 0` correspond à l'urne  $V$ , dont la seule boule noire est codée par 0. On tire donc jusqu'à obtenir `tirage == 0`. La valeur initiale `tirage = 1` force une première itération de la boucle.

Pour `hasard = 1`, on est dans l'urne  $U$  : sa seule blanche est codée par 0, donc une noire correspond à `tirage != 0`. On continue tant que `tirage == 0`. L'initialisation `tirage =`

0 force également un premier tirage.

Le programme complété est :

### Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez n, supérieur ou égal à 2 : '))
hasard = rd.randint(2)
x = 0
if hasard == 0:
    tirage = 1
    while tirage != 0:
        x = x + 1
        tirage = rd.randint(n)
else:
    tirage = 0
    while tirage == 0:
        x = x + 1
        tirage = rd.randint(n)
print(x)
```

Les entiers tirés sont  $0, \dots, n - 1$ . Le compteur inclut le tirage de la première noire, donc il renvoie son numéro et prend une valeur au moins égale à 1.

La boucle s'arrête presque sûrement, car conditionnellement à chaque urne, la probabilité de ne jamais obtenir une noire est la limite de  $a^k$  ou de  $b^k$ , donc 0. Le programme a été exécuté ; des répétitions donnent des fréquences et une moyenne cohérentes avec la loi et l'espérance établies.

## Partie 2

---

1) a) Le protocole ne change pas le premier tirage. On a donc toujours

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}.$$

1) b) Pour  $k \geq 2$ , l'événement  $(X = k)$  reste  $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$ .

La première blanche a une probabilité  $1/2$ , par le mélange équiprobable des deux urnes. Ensuite, tant qu'on a obtenu une blanche, le tirage suivant a lieu dans  $U$ . Les tirages  $2, \dots, k-1$  doivent donc être blancs, chacun avec probabilité conditionnelle  $a$ , puis le tirage  $k$  doit être noir, avec probabilité  $b$ .

Les probabilités composées donnent

$$P(X = k) = \frac{1}{2} a^{k-2} b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right)^{k-2} \frac{n-1}{n}.$$

Pour  $k = 2$ , il n'y a pas de blanche intermédiaire, et le facteur  $a^0 = 1$  représente un produit vide. La formule inclut bien ce cas.

La somme des probabilités est

$$1/2 + (b/2) \sum_{j=0}^{+\infty} a^j = 1.$$

2) Méthode 1 — Conditionnement sur la première couleur.

Si le premier tirage est noir,  $X = 1$ . S'il est blanc, les tirages suivants jusqu'à la première noire sont effectués dans  $U$ . Le nombre de ces tirages supplémentaires suit alors une géométrique de paramètre  $b$ , d'espérance  $1/b$ .

Les deux premières couleurs ont probabilité  $1/2$ . Les espérances conditionnelles sont finies ; ainsi

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{1}{2b} = \frac{3n-2}{2(n-1)}.$$

Méthode 2 — Calcul par la série de l'espérance.

La loi donne

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{b}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k a^{k-2}.$$

Avec  $j = k - 2$ , la série devient

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j+2) a^j.$$

Les séries géométrique et dérivée convergent, donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j+2) a^j = \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{2}{1-a} = \frac{a}{b^2} + \frac{2}{b}.$$

L'espérance existe et vaut  $1/2 + a/(2b) + 1$ . Puisque  $a = 1 - b$ , cette valeur est  $1 + 1/(2b)$ , comme dans la première méthode.

La première méthode utilise l'attente après le premier tirage ; la seconde contrôle le calcul et le décalage des indices directement dans la loi.

### 3) Méthode 1 — Calcul de la loi de $Y$ .

On a  $P(Y = 1) = P(B_1) = 1/2$ . Pour  $k \geq 2$ , l'événement  $(Y = k)$  est  $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$ .

La première noire a probabilité  $1/2$ . Chaque tirage suivant une noire se fait dans  $V$ , où une noire a probabilité  $a$  et une blanche probabilité  $b$ . Donc

$$P(Y = k) = \frac{1}{2} a^{k-2} b = P(X = k).$$

Cela établit l'égalité des lois à tous les rangs.

## Méthode 2 — Symétrie de l'expérience.

---

Échangeons simultanément les couleurs blanche et noire, ainsi que les urnes  $U$  et  $V$ . Le contenu des urnes retrouve alors la même description, et le premier choix reste équiprobable.

La règle « après une blanche, choisir  $U$  ; après une noire, choisir  $V$  » est conservée sous cet échange : l'ancien choix de  $U$  après une blanche devient le choix de la nouvelle urne  $V$  après une noire, et réciproquement.

L'expérience transformée a donc la même loi que l'expérience initiale, tandis que l'attente de la première noire devient l'attente de la première blanche. Ainsi  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

Le calcul explicite donne les probabilités ; la symétrie explique leur égalité sans les sommer.

### 4) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On choisit l'urne initiale avec `rd.randint(2)`. À chaque tirage, blanche indique la couleur obtenue : dans  $U$  (`hasard == 1`), la blanche correspond au code 0 ; dans  $V$ , elle correspond aux codes non nuls.

Après une blanche, le protocole impose  $U$  pour le tirage suivant, donc `hasard` prend la valeur 1. Après une noire, il impose  $V$ , mais la boucle s'arrête déjà puisque la première noire a été obtenue.

### Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez n, supérieur ou égal à 2 : '))
hasard = rd.randint(2)
x = 0
blanche = True
while blanche:
    x = x + 1
```

```
tirage = rd.randint(n)
if hasard == 1:
    blanche = tirage == 0
else:
    blanche = tirage != 0
if blanche:
    hasard = 1
else:
    hasard = 0
print(x)
```

La valeur initiale `blanche = True` sert à entrer dans la boucle avant le premier tirage. Le compteur comprend le tirage noir final.

Si le premier tirage est blanc, la probabilité de rester ensuite sans noire après  $k$  tirages supplémentaires est  $a^k \rightarrow 0$ , donc l'arrêt est presque sûr. Le programme a été exécuté et ses répétitions sont cohérentes avec les probabilités et l'espérance de cette partie.

### Partie 3

---

- 1) a) Le premier tirage est identique à celui des deux autres parties. Par probabilités totales,

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}.$$

- 1) b) L'événement  $(X = k)$  exige  $k - 1$  blanches suivies d'une noire. Tant que l'on n'a obtenu que des blanches, le protocole conserve la même urne. Ainsi, conditionnellement à l'urne initiale  $U$ , la probabilité de cet événement est  $a^{k-1}b$ ; conditionnellement à  $V$ , elle est  $b^{k-1}a$ .

On obtient donc

$$P(X = k) = \frac{1}{2}(a^{k-1}b + b^{k-1}a) = \frac{n-1 + (n-1)^{k-1}}{2n^k}, \quad k \geq 2.$$

Pour  $k = 1$ , la formule donne  $(1 + n - 1)/(2n) = 1/2$ , en accord avec 1) a). Elle est donc valable pour tout  $k \geq 1$ .

La loi de  $X$  est exactement celle de la partie 1 : les changements d'urne après une noire ne peuvent pas influencer l'instant de la première noire.

1) c) La loi de  $X$  est celle de la partie 1. Les calculs de l'espérance effectués dans cette partie établissent déjà sa convergence absolue, puisque  $X$  est positive, et donnent

$$E(X) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{n^2}{2(n-1)}.$$

On peut aussi reprendre le conditionnement sur l'urne initiale : jusqu'à la première noire, l'urne reste fixée, donc  $X$  est conditionnellement géométrique de paramètre  $b$  ou  $a$ , avec des espérances finies.

2) a) Pour que  $Y = 2i$ , il faut  $2i - 1$  noires suivies d'une blanche. Après chaque noire, le protocole change d'urne : les urnes alternent jusqu'à la première blanche.

Posons  $q = ab = (n - 1)/n^2 \in ]0, 1[$ . Deux noires successives, l'une tirée dans chaque urne, ont une probabilité composée  $ab = q$ .

Si le premier tirage a lieu dans  $U$ , les  $2i - 2$  premières noires forment  $i - 1$  paires, de probabilité  $q^{i-1}$ . Le tirage  $2i - 1$  se fait ensuite dans  $U$  et doit être noir, de probabilité  $b$ ; le tirage  $2i$  se fait dans  $V$  et doit être blanc, de probabilité  $a$ . Ainsi

$$P(Y = 2i \mid U) = q^{i-1}b^2.$$

Si le premier tirage a lieu dans  $V$ , les  $i - 1$  paires ont encore probabilité  $q^{i-1}$ , puis une noire dans  $V$  et une blanche dans  $U$  ont chacune probabilité  $a$ . Donc

$$P(Y = 2i \mid \bar{U}) = q^{i-1}a^2.$$

Par probabilités totales,

$$P(Y = 2i) = q^{i-1} \frac{a^2 + b^2}{2} = \left( \frac{n-1}{n^2} \right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}.$$

Cette formule vaut pour chaque  $i \geq 1$ , y compris  $i = 1$ , où aucune paire initiale n'est requise.

- 2) b) Pour  $Y = 2i + 1$ , il faut  $2i$  noires puis une blanche. Les  $2i$  noires forment  $i$  paires, de probabilité  $q^i$ , quel que soit le choix initial.

Après un nombre pair de changements d'urne, le tirage  $2i + 1$  a lieu dans l'urne initiale. La probabilité de la blanche finale est  $a$  si l'on a commencé dans  $U$  et  $b$  si l'on a commencé dans  $V$ . Ainsi

$$P(Y = 2i + 1) = \frac{1}{2}q^i a + \frac{1}{2}q^i b = \frac{1}{2}q^i.$$

Pour  $i = 0$ , il n'y a aucune noire avant la blanche. La formule donne  $P(Y = 1) = 1/2$ , ce qui est la probabilité d'une blanche au premier tirage; elle reste donc valable.

Les probabilités paires et impaires forment bien une loi normalisée. En posant  $c = (a^2 + b^2)/2 = (1 - 2q)/2$ ,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = 2i) + \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = 2i + 1) = \frac{c}{1 - q} + \frac{1}{2(1 - q)} = 1.$$

La probabilité de n'avoir obtenu aucune blanche après  $2m$  tirages est  $q^m \rightarrow 0$ , donc l'attente de la première blanche est finie presque sûrement.

- 2) c) Question adaptée au programme actuel : l'indice des sommes partielles est noté  $m$  pour distinguer la limite  $m \rightarrow +\infty$  du nombre fixé  $n$  de boules dans chaque urne.

Conservons  $q = (n - 1)/n^2 \in ]0, 1[$  et  $c = (1 - 2q)/2$ . En séparant les indices pairs et impairs dans une somme finie,

$$E_{2m}(Y) = \sum_{i=1}^m 2i c q^{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1} (2i + 1) \frac{1}{2} q^i.$$

Donc

$$E_{2m}(Y) = 2c \sum_{i=1}^m i q^{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1} i q^i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} q^i.$$

Les trois suites de sommes partielles convergent, car  $|q| < 1$  et les séries géométrique et dérivée du programme convergent. Leurs limites sont respectivement  $1/(1-q)^2$ ,  $q/(1-q)^2$  et  $1/(1-q)$ .

Il en résulte

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{2m}(Y) = \frac{2c+q}{(1-q)^2} + \frac{1}{2(1-q)}.$$

Comme  $2c = 1 - 2q$ , on a  $2c + q = 1 - q$ , donc cette limite vaut

$$\frac{3}{2(1-q)} = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}.$$

Pour les sommes partielles impaires, on isole le dernier terme :

$$E_{2m+1}(Y) - E_{2m}(Y) = (2m+1)P(Y = 2m+1) = \frac{2m+1}{2}q^m.$$

Comme  $0 < q < 1$ , les croissances comparées donnent  $mq^m \rightarrow 0$  et  $q^m \rightarrow 0$ . La différence tend donc vers 0, et les sommes partielles impaires ont la même limite que les paires.

Toute somme partielle de la série

$$\sum_{k \geq 1} kP(Y = k)$$

appartient à l'une de ces deux suites. Leurs limites étant égales et finies, la série converge. Les termes sont positifs, donc cette convergence établit l'existence de l'espérance de  $Y$ , et

$$E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}.$$

On a travaillé d'abord avec des sommes finies, puis avec trois séries convergentes, sans réarrangement injustifié d'une série infinie.

**3)** a) Pour  $n = 2$ , la loi de  $X$  obtenue en 1) b) devient

$$P(X = k) = \frac{1+1}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Pour  $Y$ , on a  $q = 1/4$  et  $c = 1/4$ . Les probabilités de 2) a) et 2) b) deviennent

$$P(Y = 2i) = \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2^{2i}}, \quad i \geq 1,$$

et

$$P(Y = 2i + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2^{2i+1}}, \quad i \geq 0.$$

Ainsi, pour tout  $k \geq 1$ ,  $P(Y = k) = 2^{-k} = P(X = k)$ . Ces probabilités sont celles d'une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $1/2$ .

Donc  $X$  et  $Y$  ont la même loi  $\mathcal{G}(1/2)$ .

- 3) b) Lorsque  $n = 2$ , les deux urnes contiennent chacune une blanche et une noire. Quelle que soit l'urne choisie à un tirage, et quelle que soit l'histoire des tirages précédents, les deux couleurs ont chacune probabilité  $1/2$ .

Les tirages avec remise utilisent à chaque fois une nouvelle sélection aléatoire. Le changement d'urne ne modifie donc pas l'expérience des couleurs : celle-ci est une succession d'épreuves indépendantes, de même probabilité  $1/2$  pour chaque couleur.

Le rang d'apparition de la première noire et celui de la première blanche sont chacun une attente géométrique de paramètre  $1/2$ . On justifie ainsi directement l'égalité des lois et leur nature géométrique, sans calculer les formules des parties précédentes.

- 4) Les espérances existent et valent

$$E(X) = \frac{n^2}{2(n-1)}, \quad E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}.$$

Les dénominateurs sont strictement positifs puisque  $n \geq 2$ . Leur différence est

$$E(X) - E(Y) = \frac{n^2(n^2 - n + 1 - 3(n-1))}{2(n-1)(n^2 - n + 1)} = \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-1)(n^2 - n + 1)}.$$

Cette quantité est positive ou nulle, et elle vaut 0 exactement lorsque  $n = 2$ . Donc  $E(Y) \leq E(X)$ , avec égalité si et seulement si  $n = 2$ .

### 5) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le programme conserve les conventions 1 pour  $U$ , 0 pour  $V$ , et le code 0 pour la boule minoritaire de chaque urne. Il reste dans la même urne après une blanche et change d'urne après une noire, conformément au protocole.

Comme on cherche le rang de la première noire, ce changement intervient seulement au dernier passage de la boucle et aucun nouveau tirage n'est effectué ensuite.

#### Python

```
import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez n, supérieur ou égal à 2 : '))
hasard = rd.randint(2)
x = 0
blanche = True
while blanche:
    x = x + 1
    tirage = rd.randint(n)
    if hasard == 1:
        blanche = tirage == 0
    else:
        blanche = tirage != 0
    if not blanche:
        hasard = 1 - hasard
print(x)
```

La variable `hasard` reste constante tant que les tirages sont blancs. La sortie est donc le même rang d'attente que dans la partie 1, ce qui concorde avec l'égalité des lois démontrée en 1) b).

L'arrêt est presque sûr, car les probabilités de rester sans noire dans l'urne initiale sont  $a^k$  ou  $b^k$  et tendent vers 0. Le programme a été exécuté et les fréquences et moyennes empiriques concordent avec les résultats de cette partie. Ces contrôles numériques ne remplacent pas les démonstrations.

## Relevé des adaptations

---

Exercice 3, question 4) b) : le recours à la formule de Stirling, extérieure au référentiel fourni, est remplacé par la limite particulière admise de l'intégrale étudiée. Cette limite suffit à obtenir le même équivalent final sans utiliser un théorème général sur les factorielles.

Problème, partie 1, question 4 : code adapté en Python. La génération d'entiers utilise `numpy.random.randint`, avec borne supérieure exclue. Les boucles sont réécrites avec `while` et une initialisation garantissant au moins un tirage. Les blancs à compléter sont conservés dans le sujet. Les commandes de saisie et d'affichage, ainsi que le codage des couleurs dans chaque urne, sont explicités.

### Problème, partie 2, question 4 : programme demandé en Python avec mise à jour de l'urne après la couleur observée, suivant le deuxième protocole.

---

Problème, partie 3, question 2) c) : l'indice des sommes partielles est renommé  $m$ , tandis que  $n$  reste le nombre fixé de boules dans chaque urne. Cette rectification supprime la collision de notations de l'original et précise quelle variable tend vers l'infini.

Problème, partie 3, question 5 : programme demandé en Python avec conservation de l'urne après une blanche et changement après une noire, suivant le troisième protocole.