



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2004

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Une première inégalité.

1) a) Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

1) b) En déduire l'inégalité (*) : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

2) Première amélioration de l'inégalité (*).

2) a) Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs positives ou nulles et ayant une espérance. On note $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$. Montrer, en minorant $E(Y)$, que :

$$\forall a > 0, \quad P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

2) b) On considère une variable aléatoire discrète Z , d'espérance nulle et de variance σ^2 . Montrer que, pour tout couple $(a, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$:

$$P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2).$$

2) c) En appliquant l'inégalité obtenue en 2) a) à la variable $(Z + x)^2$, montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

2) d) En déduire que $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. On pourra étudier la fonction f

qui, à tout $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$.

2) e) Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$.

3) Deuxième amélioration de l'inégalité (*).

Pour tout réel t , on pose

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k,$$

avec la convention $t^0 = 1$, y compris lorsque $t = 0$.

3) a) Justifier l'existence de $G_X(t)$ et montrer que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

3) b) Montrer que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

3) c) Déterminer le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$.

3) d) En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

4) Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question

2) e) dès que λ prend des valeurs assez grandes.

Exercice 2

- 1) On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$. Montrer que le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- 3) a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}.$$
- 3) b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $t \in [1, +\infty[$, simplifier $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$
- 3) c) En déduire que $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 4) a) Montrer que $\forall x > 0, 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$.
- 4) b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$, ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0^+ .
- 5) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) , indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.

- 1) a) Déterminer une densité de Z .

- 1) b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, les événements $[Z > 1]$ et $[1 - x < Z \leq 1 + x]$ sont indépendants.
- 2) On pose $T = \max(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé.
- 2) a) Montrer que T est une variable à densité, puis donner une densité de T .
- 2) b) En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.
- 2) c) On pose $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T , puis en déduire l'espérance de U .

Problème

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie 1

On note E_n l'espace vectoriel réel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0, 1]$. En particulier, E_0 est l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0, 1]$. Les dérivées aux extrémités sont comprises comme dérivées unilatérales, avec prolongement continu des dérivées depuis l'intérieur du segment.

On note N l'ensemble des fonctions $f \in E_2$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. On considère l'application $u : N \rightarrow E_0$ qui, à toute fonction $f \in N$, associe sa dérivée seconde f'' .

- 1) Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2 .
- 2) Montrer que u est une application linéaire injective.

3) Soit $g \in E_0$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t|g(t) dt$.

3) a) Justifier que $G \in E_1$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_x^1 g(t) dt \right).$$

3) b) En déduire que $G \in E_2$ et déterminer G'' .

3) c) Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b , sous forme d'intégrales, pour que $H \in N$.

3) d) Déterminer $u(H)$, puis en déduire que u est surjective.

3) e) Que peut-on déduire des questions 2) et 3) d) ?

4) Vérifier que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(u^{-1}(g))(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t|g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 tg(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1 - 2t)g(t) dt.$$

Partie 2

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n . Pour tout entier naturel k et tout réel x , on pose $e_k(x) = x^k$, avec $e_0(x) = 1$. On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de P_n .

On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P telles que $P(0) = P(1) = 0$. Pour tout entier naturel k et tout réel x , on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x - 1)$.

1) Montrer que $\mathcal{C} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de N_{n+2} .

On considère l'application linéaire $v : N_{n+2} \rightarrow P_n$ qui, à toute fonction $P \in N_{n+2}$, associe sa dérivée seconde P'' .

2) a) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, déterminer $v(f_k)$ en fonction de certains vecteurs de $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice A de v relativement aux bases $\mathcal{C}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée.

2) b) En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n .

2) c) Simplifier, pour tout réel x et tout entier naturel k , la somme

$$\sum_{j=0}^k f_j(x).$$

2) d) Justifier que le résultat de la quatrième question de la partie 1 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question 2) c), la matrice A^{-1} .

2) e) Vérifier cette dernière dans le cas $n = 2$. Les calculs devront figurer dans la réponse.

3) On considère l'application w qui, à tout élément P de P_n , associe la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto (x^2 - x)P(x)$.

3) a) Montrer que w est un endomorphisme de P_n .

3) b) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, déterminer $w(e_k)$.

3) c) En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 2) a).

- 3) d) L'endomorphisme w est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de P_n ?
- 3) e) Dans le cas $n = 2$, déterminer les sous-espaces propres de w .