



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2004

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Pour une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on dispose des moments finis $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

- 1) a) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique puisque X possède une variance finie. Avec le seuil strictement positif λ , elle donne :

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Comme $E(X) = \lambda$, c'est l'inégalité demandée. Si $\lambda < 1$, la borne dépasse 1, mais l'inégalité reste vraie.

- 1) b) Si $X \geq 2\lambda$, alors $X - \lambda \geq \lambda$ et donc $|X - \lambda| \geq \lambda$. L'inclusion des événements donne :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

- 2) a) On suit la méthode imposée, en minorant l'espérance. Les valeurs y_j sont positives ou nulles et $E(Y)$ est finie. Ainsi :

$$E(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j) \geq \sum_{j: y_j \geq a} y_j P(Y = y_j) \geq a \sum_{j: y_j \geq a} P(Y = y_j) = aP(Y \geq a).$$

Les minoration sont justifiées par la positivité des termes, et le dernier passage utilise la réunion disjointe des événements $[Y = y_j]$ pour les valeurs au moins égales à a . Comme $a > 0$, on peut diviser et obtenir $P(Y \geq a) \leq E(Y)/a$.

C'est l'inégalité de Markov, ici démontrée dans le cadre discret demandé.

- 2) b) Fixons $a > 0$ et $x \geq 0$. Si $Z \geq a$, alors $Z + x \geq a + x > 0$. Sur les réels positifs, la fonction carré est croissante ; donc $(Z + x)^2 \geq (a + x)^2$.

Ainsi $[Z \geq a] \subset [(Z + x)^2 \geq (a + x)^2]$, d'où l'inégalité entre probabilités. L'hypothèse $x \geq 0$ garantit bien la positivité avant élévation au carré.

- 2) c) La variable $(Z + x)^2$ est discrète et positive. Elle possède une espérance finie, car Z a une variance finie et une espérance. Comme $E(Z) = 0$, la formule de Huygens donne $E(Z^2) = V(Z) = \sigma^2$, puis :

$$E((Z + x)^2) = E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2.$$

Appliquons 2) a) avec le seuil $(a + x)^2 > 0$:

$$P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

Avec 2) b), on obtient, pour tous $a > 0$ et $x \geq 0$:

$$P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

- 2) d) Méthode 1 — Minimisation de la borne.

Fixons $a > 0$ et posons $q(x) = (\sigma^2 + x^2)/(a + x)^2$ pour $x \geq 0$. Le dénominateur est strictement positif. La dérivation donne :

$$q'(x) = \frac{2x(a + x) - 2(\sigma^2 + x^2)}{(a + x)^3} = \frac{2(ax - \sigma^2)}{(a + x)^3}.$$

Si $\sigma^2 > 0$, la fonction décroît jusqu'à $x = \sigma^2/a$, puis croît. Si $\sigma^2 = 0$, elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et son minimum est atteint en 0, qui est encore σ^2/a .

Dans tous les cas :

$$\min_{x \geq 0} q(x) = q(\sigma^2/a) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

En choisissant ce x dans 2) c), on conclut $P(Z \geq a) \leq \sigma^2/(\sigma^2 + a^2)$.

Méthode 2 — Identification d'un carré positif.

Pour tout $x \geq 0$, on calcule exactement :

$$\frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2} - \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2} = \frac{(ax - \sigma^2)^2}{(a + x)^2(a^2 + \sigma^2)} \geq 0.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs, puisque $a > 0$. L'égalité est atteinte pour $x = \sigma^2/a \geq 0$, donc la plus petite borne de 2) c) est bien $\sigma^2/(a^2 + \sigma^2)$.

La première méthode suit l'indication de l'énoncé ; la seconde montre algébriquement pourquoi la valeur optimale apparaît. Toutes deux couvrent une variance nulle.

- 2) e) Posons $Z = X - \lambda$. Alors $E(Z) = 0$ et $V(Z) = \lambda$. L'événement $[X \geq 2\lambda]$ est exactement $[Z \geq \lambda]$. L'inégalité de 2) d), avec $a = \lambda > 0$ et $\sigma^2 = \lambda$, donne :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

Cette borne est strictement inférieure à $1/\lambda$ pour tout $\lambda > 0$.

- 3) a) Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$. Fixons un réel t . La série des valeurs absolues vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) |t|^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda |t|)^k}{k!} = e^{\lambda(|t|-1)} < +\infty,$$

par la série exponentielle du programme. La série définissant $G_X(t)$ est donc absolument convergente pour tout réel t , y compris lorsque $t < 0$.

En utilisant cette fois la série exponentielle au réel λt :

$$G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Pour $t = 0$, seul le terme d'indice 0 subsiste, avec la convention $t^0 = 1$, et la formule donne bien $G_X(0) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

On n'a utilisé aucune théorie générale des séries de fonctions : la convergence et la somme proviennent directement de la série exponentielle.

3) b) Pour $t \geq 1$, la variable t^X est positive et possède l'espérance finie $E(t^X) = G_X(t)$, par transfert et par 3) a). Si $X \geq a$, la croissance de $s \mapsto t^s$ donne $t^X \geq t^a$.

L'inclusion des événements, puis l'inégalité de Markov avec le seuil $t^a > 0$, donnent :

$$P(X \geq a) \leq P(t^X \geq t^a) \leq \frac{E(t^X)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

Lorsque $t = 1$, la borne vaut 1 ; on a utilisé une inclusion, et non une équivalence qui serait fautive dans ce cas.

3) c) La fonction $g(t) = e^{t-1}/t^2$ est strictement positive et dérivable sur $[1, +\infty[$, avec :

$$g'(t) = \frac{e^{t-1}}{t^3} (t - 2).$$

Sa dérivée est négative sur $[1, 2[$, nulle en 2, puis positive sur $]2, +\infty[$. Ainsi son minimum global sur $[1, +\infty[$ est atteint uniquement en 2 et vaut $g(2) = e/4$.

3) d) Prenons $a = 2\lambda$ dans 3) b). Pour tout $t \geq 1$:

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \left(\frac{e^{t-1}}{t^2}\right)^\lambda = g(t)^\lambda.$$

Comme $\lambda > 0$, la puissance conserve l'ordre sur les réels positifs. Le choix $t = 2$ donne donc :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

4) Posons $r = e/4$. On a $0 < r < 1$. Par exemple, la série exponentielle et l'inégalité $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 2$, stricte pour certains indices, donnent :

$$e = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 < 4.$$

Pour comparer les deux bornes, étudions leur rapport :

$$\frac{r^\lambda}{1/(1+\lambda)} = (1+\lambda)r^\lambda = (1+\lambda)e^{-c\lambda}, \quad c = -\ln r > 0.$$

Par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances, ce rapport tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Il est donc strictement inférieur à 1 pour tout λ assez grand.

Ainsi $(e/4)^\lambda < 1/(1+\lambda)$ pour tout paramètre suffisamment grand : la seconde amélioration est alors meilleure que la première.

Exercice 2

- 1) Pour tout réel x , l'intégrande $t \mapsto 1/(1+t+t^{x+1})$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$.
Le seul problème de convergence se situe donc en $+\infty$.

Si $x > 0$, alors, pour $t \geq 1$:

$$0 < \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t^{x+1}}.$$

L'intégrale de droite converge, car $x+1 > 1$. Par comparaison, celle définissant $f(x)$ converge.

Si $x \leq 0$, $t^{x+1} \leq t$ pour $t \geq 1$, et $1 \leq t$. Donc $1+t+t^{x+1} \leq 3t$, puis :

$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \geq \frac{1}{3t}.$$

L'intégrale de $1/(3t)$ sur $[1, +\infty[$ diverge. Par comparaison entre fonctions positives, l'intégrale définissant $f(x)$ diverge alors vers $+\infty$.

Le domaine de définition de la fonction réelle f est exactement $]0, +\infty[$.

- 2) Soient $0 < x_1 < x_2$. Pour tout $t > 1$, $t^{x_1+1} < t^{x_2+1}$, donc :

$$\frac{1}{1+t+t^{x_1+1}} > \frac{1}{1+t+t^{x_2+1}}.$$

Les deux intégrales sont convergentes par 1). Leur comparaison donne $f(x_1) \geq f(x_2)$.
L'inégalité est même stricte : la différence des intégrandes est continue et strictement positive sur le segment $[2, 3]$, donc son intégrale sur ce segment est strictement positive, et son intégrale sur le reste de $[1, +\infty[$ est positive ou nulle.

Ainsi $f(x_1) > f(x_2)$: f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. La preuve repose sur une comparaison, sans dériver l'intégrale par rapport au paramètre.

3) a) Fixons $x > 0$. L'intégrande de $g(x)$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$ et vérifie :

$$0 < \frac{1}{t(1+t^x)} \leq \frac{1}{t^{x+1}}.$$

L'intégrale de référence converge puisque $x+1 > 1$. Par comparaison, $g(x)$ existe pour tout $x > 0$.

3) b) Pour $t \geq 1$ et $x > 0$, le calcul algébrique donne :

$$\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Sur un segment $[1, R]$, avec $R > 1$, on peut donc utiliser la primitive :

$$\int_1^R \frac{dt}{t(1+t^x)} = \left[\ln t - \frac{1}{x} \ln(1+t^x) \right]_1^R.$$

En effet, la dérivée de $\frac{1}{x} \ln(1+t^x)$ par rapport à t est $t^{x-1}/(1+t^x)$. Le membre de droite vaut :

$$\ln R - \frac{1}{x} \ln(1+R^x) + \frac{\ln 2}{x} = \frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x} \ln(1+R^{-x}).$$

Puisque $x > 0$, $R^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow +\infty$; par continuité du logarithme en 1, le dernier terme tend vers 0. Ainsi :

$$g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$

On a intégré la différence sur un segment avant de passer à la limite. On n'a pas soustrait deux intégrales impropres divergentes.

- 3) c) Pour tout $t \geq 1$, $1 + t + t^{x+1} \geq t + t^{x+1} = t(1 + t^x)$. Les deux dénominateurs sont positifs, donc :

$$0 < \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \leq \frac{1}{t(1 + t^x)}.$$

Par comparaison des intégrales convergentes, $0 \leq f(x) \leq g(x) = \ln 2/x$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la borne supérieure tend vers 0. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 4) a) Fixons $x > 0$ et posons $D(t) = t + t^{x+1} > 0$. La différence entre les deux intégrandes est :

$$\frac{1}{D(t)} - \frac{1}{1 + D(t)} = \frac{1}{D(t)(1 + D(t))}.$$

Les deux intégrales $g(x)$ et $f(x)$ convergent ; la linéarité permet donc d'intégrer leur différence. Comme $D(t) \geq t^{x+1}$ et $1 + D(t) \geq D(t)$:

$$0 \leq \frac{1}{D(t)(1 + D(t))} \leq \frac{1}{D(t)^2} \leq \frac{1}{t^{2x+2}}.$$

L'intégrale de droite vaut $1/(2x + 1)$, car $2x + 2 > 1$. Ainsi :

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq \int_1^{+\infty} t^{-2x-2} dt = \frac{1}{2x + 1}.$$

En utilisant $g(x) = \ln 2/x$, on obtient l'encadrement demandé.

- 4) b) L'inégalité précédente donne :

$$\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, le premier terme $\ln 2/x$ tend vers $+\infty$ et le terme retranché reste borné, inférieur ou égal à 1. La borne inférieure tend donc vers $+\infty$, d'où $f(x) \rightarrow +\infty$.

Pour établir l'équivalent, divisons par $\ln 2/x > 0$:

$$1 - \frac{x}{(2x+1)\ln 2} \leq \frac{f(x)}{\ln 2/x} \leq 1.$$

Le terme soustrait tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$. Par encadrement, le rapport tend vers 1.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln 2/x$.

5) La fonction est strictement décroissante par 2), sa limite en 0^+ est $+\infty$ par 4) b), et sa limite en $+\infty$ est 0 par 3) c). Son tableau de variation est :

x	0^+	$]0, +\infty[$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Les valeurs aux deux extrémités sont des limites. Pour chaque $x > 0$, $f(x) > 0$, puisque son intégrande est strictement positive.

Exercice 3

1) a) Les variables X et Y sont indépendantes et admettent la densité uniforme, égale à 1 sur $[0, 1]$ et à 0 ailleurs. Ces densités sont bornées, intégrables et continues par morceaux ; la formule de convolution s'applique à leur somme.

Une densité de Z est donc $h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(z-t) dt$. L'intégrande vaut 1 si $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq z-t \leq 1$, soit si :

$$\max(0, z-1) \leq t \leq \min(1, z).$$

Il vaut 0 ailleurs. L'intégrale est la longueur de cet intervalle lorsqu'il est non vide. Ainsi :

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ z & \text{si } 0 \leq z \leq 1, \\ 2 - z & \text{si } 1 < z \leq 2, \\ 0 & \text{si } z > 2. \end{cases}$$

Cette densité est positive et son intégrale vaut $\int_0^1 z \, dz + \int_1^2 (2 - z) \, dz = 1$. Elle est symétrique par rapport à 1.

1) b) Fixons $x \in]0, 1[$ et notons $A = [Z > 1]$, $B = [1 - x < Z \leq 1 + x]$.

Méthode 1 — Calcul des trois probabilités.

Avec la densité de 1) a) :

$$P(A) = \int_1^2 (2 - z) \, dz = \frac{1}{2}.$$

Comme $1 - x \in]0, 1[$ et $1 + x \in]1, 2[$:

$$P(B) = \int_{1-x}^1 z \, dz + \int_1^{1+x} (2 - z) \, dz.$$

La première intégrale vaut $\frac{1}{2}(1 - (1 - x)^2) = x - x^2/2$, et la seconde vaut également $x - x^2/2$. Ainsi $P(B) = 2x - x^2$.

L'intersection est $A \cap B = [1 < Z \leq 1 + x]$, donc $P(A \cap B) = x - x^2/2$. Par conséquent :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}(2x - x^2) = P(A)P(B).$$

Cette égalité est la définition de l'indépendance des deux événements.

Méthode 2 — Symétrie de la loi.

Les variables $1 - X$ et $1 - Y$ sont elles aussi indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$. Leur somme $2 - Z$ a donc la même loi que Z . Comme Z possède une densité, il n'a pas d'atome, notamment en 1 et aux extrémités de l'intervalle définissant B .

La symétrie donne $P(Z > 1) = P(Z < 1)$; ces deux probabilités ont pour somme 1, donc elles valent $1/2$. Elle donne également :

$$P(1 < Z \leq 1 + x) = P(1 - x < Z < 1),$$

les différences de choix des bornes étant de probabilité nulle. Ces deux événements disjoints composent B à un événement négligeable près. Ainsi

$$P(A \cap B) = P(B)/2 = P(A)P(B).$$

La première méthode fournit les valeurs numériques en fonction de x ; la seconde explique pourquoi toute fenêtre symétrique de cette forme partage sa probabilité également de part et d'autre de 1.

- 2) a) Notons F_T la fonction de répartition du maximum. Pour $t < 0$, elle vaut 0; pour $t > 1$, elle vaut 1. Si $0 \leq t \leq 1$, l'événement $[T \leq t]$ est $[X \leq t] \cap [Y \leq t]$. Par indépendance :

$$F_T(t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = t^2.$$

La fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 en dehors des deux points 0 et 1. Le maximum est donc une variable à densité. Une densité est :

$$f_T(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs retenues aux bornes n'affectent pas la loi.

- 2) b) Comme $0 \leq T \leq 1$ presque sûrement, T possède une espérance finie. Par transfert :

$$E(T) = \int_0^1 t \, 2t \, dt = 2 \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3}.$$

- 2) c) Pour tous réels x, y , $|x - y| = 2 \max(x, y) - (x + y)$: si $x \geq y$, le membre de droite vaut $x - y$; si $y \geq x$, il vaut $y - x$.

Appliquée aux variables du sujet, cette identité donne $U = 2T - Z$, qui est bien une combinaison linéaire de Z et T .

Les variables X, Y, T, U sont bornées presque sûrement, donc possèdent une espérance. Par linéarité, $E(Z) = E(X) + E(Y) = 1/2 + 1/2 = 1$, puis :

$$E(U) = 2E(T) - E(Z) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Cette utilisation de la linéarité ne nécessite pas que Z et T soient indépendantes.

Problème

Partie 1

- 1) La fonction nulle appartient à E_2 et s'annule en 0 et en 1, donc elle appartient à N .
Soient $f, h \in N$ et $a, b \in \mathbb{R}$. La combinaison $af + bh$ est de classe C^2 sur le segment, et :

$$(af + bh)(0) = af(0) + bh(0) = 0, \quad (af + bh)(1) = af(1) + bh(1) = 0.$$

Ainsi $af + bh \in N$. L'ensemble N est donc un sous-espace vectoriel de E_2 .

- 2) Si $f \in N$, sa dérivée seconde est continue, donc $u(f) = f''$ appartient bien à E_0 . La linéarité de la dérivation donne $u(af + bh) = au(f) + bu(h)$.

Pour établir l'injectivité, supposons $u(f) = 0$. Alors $f'' = 0$ sur le segment. La fonction f' est donc constante, et f est affine : $f(x) = cx + d$. Les conditions $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ imposent $d = 0$ puis $c = 0$. Ainsi $f = 0$.

Le noyau de u est réduit à la fonction nulle ; l'application u est donc linéaire et injective. Ce raisonnement n'utilise pas un théorème de dimension, les espaces de cette partie n'étant pas supposés de dimension finie.

- 3) a) Pour $x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto |x - t|g(t)$ est continue sur le segment ; l'intégrale définissant $G(x)$ existe donc.

Scindons l'intégrale en $t = x$, afin de supprimer la valeur absolue :

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x (x - t)g(t) dt + \int_x^1 (t - x)g(t) dt \right).$$

Posons $I(x) = \int_0^x g(t) dt$ et $J(x) = \int_0^x tg(t) dt$. Les fonctions g et $t \mapsto tg(t)$ sont

continues ; le théorème fondamental du calcul intégral donne $I, J \in E_1$, $I'(x) = g(x)$ et $J'(x) = xg(x)$, avec les dérivées unilatérales aux extrémités.

En développant les deux intégrales à l'aide de I et J :

$$G(x) = xI(x) - J(x) + \frac{1}{2}J(1) - \frac{x}{2}I(1).$$

Cette expression montre $G \in E_1$. Sa dérivée est :

$$G'(x) = I(x) + xg(x) - xg(x) - \frac{1}{2}I(1) = I(x) - \frac{1}{2}I(1).$$

Comme $\int_x^1 g(t) dt = I(1) - I(x)$, on retrouve :

$$G'(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_x^1 g(t) dt \right).$$

Cette preuve repose uniquement sur des primitives de fonctions continues et des opérations sur fonctions ; elle ne différencie pas directement une intégrale dont l'intégrande contient une valeur absolue.

3) b) L'expression précédente s'écrit $G'(x) = I(x) - I(1)/2$. Comme $I \in E_1$ et $I' = g$, la fonction G' est de classe C^1 et sa dérivée vaut g .

Ainsi $G \in E_2$ et $G''(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, selon la convention des dérivées aux bornes.

3) c) Pour tous réels a, b , $H(x) = G(x) + ax + b$ appartient à E_2 . Il reste à imposer ses valeurs aux deux extrémités.

En 0, $G(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 tg(t) dt$. La condition $H(0) = 0$ impose :

$$b = -G(0) = -\frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt.$$

En 1, $G(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)g(t) dt$. La condition $H(1) = 0$ impose $a = -G(1) - b = G(0) - G(1)$, soit :

$$a = \frac{1}{2} \int_0^1 (2t-1)g(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-2t)g(t) dt.$$

Ces choix sont uniques et rendent les deux valeurs de H nulles. Ils sont donc nécessaires et suffisants pour que $H \in N$.

3) d) Avec les choix de 3) c), $H \in N$ et sa dérivée seconde est $H'' = G'' = g$, puisque la fonction affine ajoutée a une dérivée seconde nulle. Ainsi $u(H) = g$.

La fonction g était un élément quelconque de E_0 . Tout élément de E_0 possède donc un antécédent dans N : u est surjective.

3) e) La question 2) montre que u est linéaire et injective ; 3) d) montre qu'elle est surjective. C'est donc un isomorphisme de N sur E_0 .

En particulier, pour chaque fonction continue g sur $[0, 1]$, il existe une unique fonction H de classe C^2 telle que $H'' = g$ et $H(0) = H(1) = 0$.

4) Méthode 1 — Utilisation de l'antécédent construit.

La fonction H de 3) c) et 3) d) est l'unique antécédent de g , car u est bijective. Donc $u^{-1}(g) = H$. En remplaçant G, a, b par leurs valeurs :

$$(u^{-1}(g))(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t)g(t) dt.$$

C'est la formule demandée, valable aussi pour $x = 0$ et $x = 1$.

Méthode 2 — Deux primitives et les conditions aux bornes.

Avec $I(x) = \int_0^x g(t) dt$, toute solution de $H'' = g$ vérifie $H'(x) = c + I(x)$ pour une constante c , puis $H(x) = d + cx + \int_0^x I(t) dt$ pour une constante d .

Par intégration par parties sur $[0, x]$, justifiée par $I \in E_1$:

$$\int_0^x I(t) dt = xI(x) - \int_0^x tg(t) dt = \int_0^x (x-t)g(t) dt.$$

La condition $H(0) = 0$ donne $d = 0$, et $H(1) = 0$ donne $c = -\int_0^1 (1-t)g(t) dt$. Ainsi :

$$H(x) = \int_0^x (x-t)g(t) dt - x \int_0^1 (1-t)g(t) dt.$$

Pour retrouver l'expression de l'énoncé, développons la valeur absolue :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt = \int_0^x (x-t)g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 tg(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 g(t) dt.$$

Après soustraction des deux termes supplémentaires de la formule demandée, le coefficient en x devient $-\int_0^1 (1-t)g(t) dt$. On obtient exactement l'expression de H ci-dessus, donc celle de $u^{-1}(g)$.

La première méthode suit la construction de l'énoncé ; la seconde donne une forme de l'inverse sans valeur absolue, utile pour calculer des antécédents particuliers.

Partie 2

1) Méthode 1 — Factorisation par les deux racines.

Chaque $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$ est un polynôme de degré $k+2 \leq n+2$, s'annulant en 0 et en 1. Donc $f_k \in N_{n+2}$.

Si $P \in N_{n+2}$, le polynôme s'annule en 0, donc il se factorise par x . Comme il s'annule aussi en 1, avec $1 \neq 0$, il se factorise par $x(x-1) : P(x) = x(x-1)Q(x)$, où Q est de degré au plus n , ou est nul.

Écrivons

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

dans la base canonique de P_n . Alors

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k f_k(x) :$$

la famille $\mathcal{C}$ engendre N_{n+2} .

Si une combinaison

$$\sum c_k f_k$$

est nulle, alors le polynôme

$$x(x-1) \sum c_k x^k$$

est nul. Le premier facteur n'étant pas nul, le second est nul également ; sinon le degré du produit serait la somme des degrés de deux polynômes non nuls. Ainsi tous les c_k sont nuls. La famille est libre et génératrice : c'est une base.

Méthode 2 — Dimension et degrés distincts.

Considérons l'application linéaire $L : P_{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(P) = (P(0), P(1))$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le polynôme affine $P(x) = a + (b - a)x$ appartient à P_{n+2} et vérifie $L(P) = (a, b)$. L'application est donc surjective, de rang 2.

Son noyau est N_{n+2} . Comme $\dim P_{n+2} = n + 3$, le théorème du rang donne $\dim N_{n+2} = n + 1$.

Les polynômes $f_0, \dots, f_n$ appartiennent à ce noyau et ont des degrés distincts $2, 3, \dots, n + 2$, avec coefficient dominant 1. Dans une combinaison non triviale, le polynôme d'indice maximal ayant un coefficient non nul apporte un terme dominant que les autres ne peuvent annuler. La famille est donc libre.

Elle contient $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$; c'est une base. Les deux méthodes valent aussi pour $n = 0$, où N_2 est engendré par $f_0(x) = x(x - 1)$.

La factorisation construit les coordonnées de tout élément ; la méthode de dimension permet de traiter des espaces définis par des conditions linéaires d'évaluation.

2) a) On a $f_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1}$. Pour $k = 0$, sa dérivée seconde est 2, donc $v(f_0) = 2e_0$.

Pour $1 \leq k \leq n$, en dérivant deux fois :

$$v(f_k) = (k + 1)(k + 2)e_k - k(k + 1)e_{k-1}.$$

La matrice A a pour colonne d'indice k les coordonnées de $v(f_k)$ dans $\mathcal{B}$. En indexant les lignes et les colonnes de 0 à n , et en posant $d_i = (i + 1)(i + 2)$, ses coefficients sont :

$$a_{i,j} = \begin{cases} d_i & \text{si } j = i, \\ -d_i & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi A est triangulaire supérieure, avec diagonale $(2, 6, 12, \dots, (n+1)(n+2))$, et le seul autre ensemble de coefficients éventuellement non nuls est la première diagonale au-dessus de la diagonale principale.

Pour $n = 0$, $A = (2)$. Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- 2) b) La matrice est carrée d'ordre $n+1$, puisque les deux bases ont $n+1$ éléments. Elle est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux $d_i = (i+1)(i+2)$ sont strictement positifs.

Par le critère d'inversibilité des matrices triangulaires, A est inversible. L'application linéaire v représentée par cette matrice est donc un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n .

- 2) c) Les termes se simplifient par télescopage :

$$\sum_{j=0}^k f_j(x) = \sum_{j=0}^k (x^{j+2} - x^{j+1}) = x^{k+2} - x.$$

L'identité est valable pour tout réel x , y compris 0 et 1, et pour $k = 0$. Elle ne nécessite pas une division par $x - 1$.

- 2) d) Un polynôme $g \in P_n$, restreint à $[0, 1]$, appartient à E_0 . La partie 1 fournit donc une unique solution $H \in N$ de $H'' = g$.

En intégrant deux fois le polynôme g , toute solution est une fonction polynomiale de degré au plus $n+2$, à laquelle on ajoute éventuellement une fonction affine. Les conditions aux bornes imposées dans la partie 1 ne changent pas cette propriété. Ainsi H est la restriction d'un élément de N_{n+2} ; c'est exactement $v^{-1}(g)$ sur le segment. Deux polynômes égaux sur ce segment étant identiques, cela détermine aussi le polynôme sur tout $\mathbb{R}$.

Calculons l'image de chaque e_k , avec $0 \leq k \leq n$. Pour $g(t) = t^k$, la fonction de la partie 1 vaut :

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x (x-t)t^k dt + \int_x^1 (t-x)t^k dt \right).$$

Les deux intégrales se calculent par les primitives des puissances :

$$\int_0^x (x-t)t^k dt = \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)},$$

$$\int_x^1 (t-x)t^k dt = \frac{1}{k+2} - \frac{x}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}.$$

En posant $d_k = (k+1)(k+2)$, on obtient donc :

$$G(x) = \frac{x^{k+2}}{d_k} + \frac{1}{2(k+2)} - \frac{x}{2(k+1)}.$$

La formule de la partie 1 retranche le terme $\frac{1}{2} \int_0^1 t^{k+1} dt = 1/(2(k+2))$ et ajoute le terme affine $-\frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t)t^k dt$. Comme :

$$\int_0^1 (1-2t)t^k dt = \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} = -\frac{k}{d_k},$$

on obtient :

$$v^{-1}(e_k)(x) = \frac{x^{k+2}}{d_k} - \frac{x}{2(k+1)} + \frac{kx}{2d_k} = \frac{x^{k+2} - x}{d_k}.$$

Par 2) c), cela s'écrit

$$v^{-1}(e_k) = \frac{1}{d_k} \sum_{j=0}^k f_j.$$

La matrice de v^{-1} , avec $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée, est A^{-1} . Sa colonne d'indice k contient donc $1/d_k$ aux lignes 0 à k , et 0 au-delà. Ainsi, pour $0 \leq i, j \leq n$:

$$(A^{-1})_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{(j+1)(j+2)} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

L'inverse est donc triangulaire supérieure, avec des coefficients constants dans chaque partie non nulle d'une colonne.

2) e) Pour $n = 2$, la formule donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Vérifions les produits en explicitant les coefficients :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6} & 2 \cdot \frac{1}{12} - 2 \cdot \frac{1}{12} \\ 0 & 6 \cdot \frac{1}{6} & 6 \cdot \frac{1}{12} - 6 \cdot \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 12 \cdot \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 & -2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{6} & -6 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} \cdot 6 & -6 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux produits sont l'identité, donc $B = A^{-1}$, conformément à la formule générale.

- 3) a) Si $P \in P_n$, le produit $(x^2 - x)P(x)$ est un polynôme de degré au plus $n + 2$. Sa dérivée seconde a un degré au plus n , ou est nulle. Ainsi $w(P) \in P_n$.

La multiplication par le polynôme fixé $x^2 - x$ et la dérivation seconde sont linéaires. Leur composition est donc linéaire de P_n dans lui-même : w est un endomorphisme.

- 3) b) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $(x^2 - x)e_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1} = f_k(x)$. Donc $w(e_k) = f_k'' = v(f_k)$.

Explicitement :

$$w(e_0) = 2e_0, \quad w(e_k) = (k+1)(k+2)e_k - k(k+1)e_{k-1} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Le cas $k = 0$ est séparé pour ne pas introduire de vecteur e_{-1} .

- 3) c) La colonne d'indice k de la matrice de w dans $\mathcal{B}$ est le vecteur de coordonnées de $w(e_k)$ dans $\mathcal{B}$. Par 3) b), c'est le même vecteur que celui de $v(f_k)$, qui constituait la colonne d'indice k de A en 2) a).

Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = A$. La même matrice numérique représente donc deux applications différentes, avec les bases de départ et d'arrivée précisées dans chaque cas.

- 3) d) La matrice de w est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux :

$$\lambda_k = (k+1)(k+2), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Ces $n+1$ valeurs sont deux à deux distinctes : $\lambda_{k+1} - \lambda_k = 2(k+2) > 0$. Un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$ possédant $n+1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable. Ainsi w est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Tous les coefficients diagonaux sont non nuls, donc la matrice triangulaire A est inversible. L'endomorphisme w est donc bijectif : c'est un automorphisme de P_n .

Pour $n=0$, w est la multiplication par 2 sur l'espace des constantes ; les deux conclusions restent valables.

3) e) Pour $n=2$, écrivons $P(x) = a + bx + cx^2$. Le vecteur de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ est ${}^t(a, b, c)$ et :

$$w(P)(x) = (2a - 2b) + (6b - 6c)x + 12cx^2.$$

Les valeurs propres sont 2, 6 et 12. On détermine chaque espace propre par identification des coefficients, sans calcul de déterminant.

Pour la valeur propre 2, l'équation $w(P) = 2P$ donne $-2b = 0$, $4b - 6c = 0$ et $10c = 0$. Donc $b = c = 0$ et a est libre. Ainsi :

$$\text{Ker}(w - 2\text{Id}) = \text{Vect}(1).$$

Pour la valeur propre 6, les équations donnent $-4a - 2b = 0$, $-6c = 0$ et $6c = 0$. Donc $c = 0$ et $b = -2a$. Ainsi :

$$\text{Ker}(w - 6\text{Id}) = \text{Vect}(1 - 2x).$$

Pour la valeur propre 12, les équations donnent $-10a - 2b = 0$ et $-6b - 6c = 0$, la troisième étant identiquement nulle. Donc $b = -5a$ et $c = -b = 5a$. Ainsi :

$$\text{Ker}(w - 12 \text{Id}) = \text{Vect}(1 - 5x + 5x^2).$$

Ces trois espaces sont de dimension 1 et leur somme est directe. La famille $(1, 1 - 2x, 1 - 5x + 5x^2)$ est une base de vecteurs propres, cohérente avec la diagonalisation obtenue en 3) d).

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 2) a) : « positives ou nulles » explicite le sens de l'hypothèse de positivité, sans changer l'inégalité ni la preuve demandée.
- Exercice 1, préambule de la question 3 : la convention $t^0 = 1$ est explicitée, notamment pour $t = 0$, afin de fixer le terme d'indice 0 de G_X .
- Exercice 3, préambule et question 2 : l'espace probabilisé est noté (Ω, P) , sans composante abstraite inutilisée ; les probabilités, les hypothèses d'indépendance et toutes les questions sont conservées.
- Problème, partie 1, préambule : la convention de dérivation unilatérale aux extrémités est précisée pour les fonctions de classe C^n sur le segment. Elle explicite le sens des formules aux points 0 et 1.
- Problème, partie 2, question 2) a) : les bases de départ et d'arrivée de la matrice sont explicitement distinguées. La matrice et la demande mathématique restent celles du sujet original.