



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Pour un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$$

et une matrice $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, on rappelle que $P(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_m A^m$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

On admet que, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour ce faire, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) a. Écrire la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n , telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

1) b. Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

2) On considère le polynôme $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.

2) a. Justifier l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n = PQ_n + R_n$.

2) b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que $R_n(X) = a_n + b_n(X - 1) + c_n(X - 1)^2$.

- 2) c. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1, \quad b_n = n, \quad c_n = 2^n - n - 1.$
- 3) a. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I , $A - I$ et $(A - I)^2$.
- 3) b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n .
- 4) a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 4) b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue, strictement positive et décroissante sur $[p, +\infty[$, telle que $\int_p^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Pour tout entier $n \geq p$, on pose

$$S_n = \sum_{k=p}^n f(k).$$

- 1) a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout $n \geq p$,

$$S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t) dt.$$

- 1) b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier $n \geq p$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k).$$

- 2) a. Montrer que, pour tout $n \geq p$:

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

- 2) b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ pour que

$$R_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

- 3) Dans cette question, pour tout $x \in [2, +\infty[$, on pose $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

- 3) a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2) b.

- 3) b. En déduire un équivalent, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

- 3) c. La série de terme général R_n , pour $n \geq 1$, est-elle convergente ?

Exercice 3

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa transposée et $\text{Tr}(A)$ sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, on associe $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.

- 1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dans toute la suite, on se place dans cet espace euclidien muni de ce produit scalaire.
- 2) Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.
- 3) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2) .
 - 3) a. Déterminer une base orthonormale de E , notée (K_0, K_1, K_2) , telle que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i , avec $J^0 = I$.
 - 3) b. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ une matrice quelconque. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, exprimer $\langle K_i, A \rangle$ en fonction de certains éléments de A .
 - 3) c. On note p la projection orthogonale sur E . Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A .
 - 3) d. En déduire une base de $\text{Ker } p$.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, $r \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$. On utilise la notation $C_b^a = \binom{b}{a}$ pour les coefficients binomiaux.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée k -ième de la fonction f définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

2) Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $C_{n+r}^n \sim \frac{n^r}{r!}$.

3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+1} x^n = 0$.

4) Soit φ_x définie sur $[0, x]$ par $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}$. Montrer que $\forall t \in [0, x], \quad 0 \leq \varphi_x(t) \leq x$.

5) a. Écrire la formule de Taylor entre 0 et x , avec reste intégral, pour la fonction f , à l'ordre n .

5) b. En déduire que :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n C_{k+r}^k x^k \leq (n+r+1) C_{n+r}^n x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.$$

5) c. Montrer finalement que

$$\forall x \in]0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^k x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Partie 2

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, chacune ayant une probabilité de succès $p \in]0, 1[$.

On note X_n le nombre d'épreuves à réaliser pour obtenir pour la première fois n succès, pas forcément consécutifs. Ainsi X_n est le numéro de l'épreuve où l'on obtient le n -ième succès. On convient que $X_n = 0$ si l'on n'obtient pas n succès.

1) Dans cette question seulement, $n = 1$.

1) a. Reconnaître la loi de X_1 .

1) b. Donner l'espérance et la variance de X_1 .

Dans toute la suite, on suppose $n \geq 2$.

2) a. Pour déterminer $X_n(\Omega)$, on considère comme issues toutes les suites possibles de succès et d'échecs. Déterminer $X_n(\Omega)$.

2) b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité d'obtenir $n - 1$ succès au cours des $n + k - 1$ premières épreuves.

2) c. Dédurre de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = n + k) = C_{n+k-1}^{n-1} p^n (1-p)^k.$$

2) d. Utiliser le résultat de la partie 1 pour vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = 1.$$

En déduire $P(X_n = 0)$.

On dit que X_n suit la loi binomiale négative de paramètres n, p .

Pour les expressions comportant une division par X_n ou $X_n - 1$ dans la suite, on attribue par convention la valeur 0 sur l'événement $\{X_n = 0\}$.

3) a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, (n+k)C_{n+k-1}^{n-1} = nC_{n+k}^n.$

3) b. En utilisant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n+1+k) = 1,$$

montrer que X_n possède une espérance et donner sa valeur en fonction de n, p .

4) a. Montrer que $\forall n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{n+k-1}C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-2}^{n-2}.$

4) b. Utiliser le théorème de transfert pour montrer que, pour tout $n \geq 2$, la variable $\frac{n-1}{X_n-1}$ possède une espérance et que $E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p.$

5) a. Justifier que n/X_n possède une espérance. On n'en demande pas le calcul.

5) b. Montrer, sans calculer $E(n/X_n)$, que $E(n/X_n) > p.$

6) Dans cette question, le paramètre p est inconnu. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$Y_n = \frac{n-1}{X_n-1} \text{ et } Z_n = \frac{n}{X_n}.$$

Des deux suites $(Y_n)_{n \geq 2}$ et $(Z_n)_{n \geq 2}$, laquelle est un estimateur sans biais de p ? On ne se préoccupe pas de l'éventuelle convergence de ces estimateurs.