



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2003

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a. Les trois composantes de X_{n+1} sont $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$, u_{n+2} et u_{n+1} . La matrice qui réalise ces opérations est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est indépendante de n et vérifie $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) b. Posons $B = A - I$. On calcule :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, le produit de la troisième ligne de B^2 , $(1, -2, 1)$, avec les

trois colonnes vaut respectivement $2 - 2 + 0 = 0$, $-5 + 4 + 1 = 0$ et $2 + 0 - 2 = 0$.

Les deux autres lignes de B^2 sont respectivement quatre fois et deux fois cette troisième ligne. Tous les coefficients du produit sont donc nuls, d'où $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

- 2) a. Le polynôme $P = (X - 1)^2(X - 2)$ est non nul et de degré 3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le théorème de division euclidienne de X^n par P fournit un unique quotient Q_n et un unique reste R_n , de degré strictement inférieur à 3 ou nul, tels que $X^n = PQ_n + R_n$.

Ainsi $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$, avec l'existence et l'unicité demandées. Pour $n = 0, 1, 2$,

le quotient est nul et le reste est simplement X^n .

- 2) b. Écrivons $R_n(X) = \alpha_n + \beta_n X + \gamma_n X^2$. Comme $X = 1 + (X - 1)$ et $X^2 = 1 + 2(X - 1) + (X - 1)^2$, on obtient :

$$R_n(X) = (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) + (\beta_n + 2\gamma_n)(X - 1) + \gamma_n(X - 1)^2.$$

On peut donc choisir $a_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$, $b_n = \beta_n + 2\gamma_n$ et $c_n = \gamma_n$. L'écriture est même unique, puisque les polynômes $1, X - 1, (X - 1)^2$ sont de degrés distincts et forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- 2) c. Évaluons $X^n = PQ_n + R_n$ en 1. Comme $P(1) = 0$, $1 = R_n(1) = a_n$.

Pour obtenir b_n , dérivons cette identité polynomiale. On a $P'(1) = 0$, car 1 est racine double de P . Ainsi $(PQ_n)'(1) = P'(1)Q_n(1) + P(1)Q_n'(1) = 0$.

Pour $n \geq 1$, $(X^n)'(1) = n$, donc $R_n'(1) = b_n = n$. Pour $n = 0$, la dérivée du polynôme constant 1 est nulle, et l'on obtient aussi $b_0 = 0$.

Enfin, l'évaluation en 2, avec $P(2) = 0$, donne $2^n = R_n(2) = a_n + b_n + c_n = 1 + n + c_n$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

- 3) a. La question 1) b. donne $P(A) = 0$. En évaluant la division euclidienne en A et en utilisant la propriété des produits admise dans le sujet :

$$A^n = P(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A).$$

En utilisant 2) c., on obtient donc :

$$A^n = I + n(A - I) + (2^n - n - 1)(A - I)^2.$$

La formule vaut aussi pour $n = 0$: les deux derniers coefficients sont alors nuls et l'on retrouve $A^0 = I$.

- 3) b. Les troisièmes lignes de I , $A - I$ et $(A - I)^2$ sont respectivement $(0, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, -2, 1)$. La formule précédente donne :

$$\text{ligne}_3(A^n) = (2^n - n - 1, n - 2(2^n - n - 1), 1 - n + (2^n - n - 1)).$$

Après regroupement, la troisième ligne est $(2^n - n - 1, 3n + 2 - 2^{n+1}, 2^n - 2n)$.

- 4) a. Les valeurs initiales donnent

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La formule $X_n = A^n X_0$ est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang n , la question 1) a. donne $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$. Par récurrence, elle vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 4) b. Méthode 1 — Lecture de la troisième composante.

Le terme u_n est la troisième composante de X_n . Le produit de la troisième ligne de A^n par ${}^t(1, 1, 0)$ donne :

$$u_n = (2^n - n - 1) + (3n + 2 - 2^{n+1}) = 2n + 1 - 2^n.$$

Méthode 2 — Vérification directe par récurrence.

Posons $v_n = 2n + 1 - 2^n$. On a $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_2 = 1$. Le terme affine satisfait :

$$(2n + 7) - 4(2n + 5) + 5(2n + 3) - 2(2n + 1) = 0.$$

Le terme exponentiel satisfait

$$2^{n+3} - 4 \times 2^{n+2} + 5 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n = 2^n(8 - 16 + 10 - 2) = 0.$$

Par soustraction, $v_{n+3} = 4v_{n+2} - 5v_{n+1} + 2v_n$. Une récurrence, à partir des trois valeurs initiales, montre alors $u_n = v_n$ pour tout n .

La première méthode construit la formule demandée ; la seconde permet de vérifier une expression explicite sans utiliser de théorie générale des récurrences d'ordre trois.

Exercice 2

- 1) a. Pour $k \geq p+1$ et $t \in [k-1, k]$, la décroissance de f donne $f(t) \geq f(k)$. En intégrant sur cet intervalle de longueur 1, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.

Pour $n > p$, la somme de ces inégalités pour $k = p+1, \dots, n$ donne :

$$S_n - f(p) = \sum_{k=p+1}^n f(k) \leq \int_p^n f(t) dt.$$

Pour $n = p$, les deux membres sont nuls, donc l'inégalité reste vraie.

- 1) b. Comme f est strictement positive, les sommes partielles S_n sont croissantes. L'inégalité précédente et la positivité de l'intégrale donnent :

$$S_n \leq f(p) + \int_p^n f(t) dt \leq f(p) + \int_p^{+\infty} f(t) dt.$$

La dernière borne est finie par hypothèse. La suite (S_n) est donc croissante et majorée, et converge. Par définition, la série

$$\sum_{k=p}^{+\infty} f(k)$$

converge.

- 2) a. Pour $N > n$, la décroissance fournit, pour $k = n + 1, \dots, N$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$. En sommant, puis en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, les convergences déjà établies donnent :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

Pour la borne inférieure, sur $[k, k + 1]$, $f(t) \leq f(k)$. On somme pour $k = n, \dots, N$:

$$\int_n^{N+1} f(t) dt \leq f(n) + \sum_{k=n+1}^N f(k).$$

Le passage à la limite donne $\int_n^{+\infty} f(t) dt \leq f(n) + R_n$, soit la borne inférieure demandée. Ainsi :

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

- 2) b. Posons $I_n = \int_n^{+\infty} f(t) dt$. Cette intégrale est finie et strictement positive, puisque f est continue et strictement positive. On peut donc diviser l'encadrement précédent par I_n :

$$1 - \frac{f(n)}{I_n} \leq \frac{R_n}{I_n} \leq 1.$$

Une condition suffisante est donc $f(n)/I_n \rightarrow 0$, c'est-à-dire $f(n) = o(I_n)$. Sous cette condition, l'encadrement donne $R_n/I_n \rightarrow 1$, donc $R_n \sim I_n$.

- 3) a. On prend $p = 2$. Sur $[2, +\infty[$, les fonctions x et $\ln x$ sont strictement positives, donc $f(x) = 1/(x(\ln x)^2)$ est continue et strictement positive.

Sa dérivée sur $]2, +\infty[$, et également celle de son prolongement au voisinage de 2, vaut :

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3} < 0.$$

La fonction est donc décroissante. Comme $(-1/\ln x)' = f(x)$, pour $R \geq n \geq 2$:

$$\int_n^R f(t) dt = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln R}.$$

La limite en $R \rightarrow +\infty$ existe et donne $I_n = 1/\ln n$, en particulier

$$\int_2^{+\infty} f(t) dt = 1/\ln 2 < +\infty.$$

Enfin, $f(n)/I_n = 1/(n \ln n) \rightarrow 0$. Les quatre hypothèses et la condition suffisante sont donc toutes vérifiées.

3) b. En appliquant 2) b. à la fonction précédente, on obtient $R_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 1/\ln n$.

3) c. Méthode 1 — Équivalence puis comparaison à la série harmonique.

La question précédente donne $R_n/(1/\ln n) \rightarrow 1$. Ainsi, pour n suffisamment grand, $R_n \geq 1/(2 \ln n)$. De plus, $\ln n \leq n$ pour $n \geq 2$, donc $R_n \geq 1/(2n)$ à partir d'un certain rang.

La série harmonique diverge et les termes sont positifs. Par comparaison,

$$\sum R_n$$

diverge vers $+\infty$.

Méthode 2 — Regroupement fini des termes du reste.

Pour $N \geq 2$, on ne garde, dans chacun des restes, que les termes d'indice au plus $N + 1$. On obtient :

$$\sum_{n=1}^N R_n \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k(\ln k)^2} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{k-1}{k(\ln k)^2}.$$

L'égalité est un regroupement de sommes finies : pour k fixé, il y a $k - 1$ indices n entre 1 et $k - 1$. Comme $(k - 1)/k \geq 1/2$, la dernière somme est au moins

$$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{N+1} 1/(\ln k)^2.$$

Les croissances comparées donnent $(\ln k)^2/k \rightarrow 0$, donc $1/(\ln k)^2 \geq 1/k$ pour k suffisamment grand. Ces sommes partielles tendent vers $+\infty$, ce qui prouve à nouveau la divergence.

La première méthode utilise l'équivalent obtenu ; la seconde montre comment les termes de la série initiale sont comptés dans plusieurs restes, sans échanger des séries infinies.

Le reste

$$R_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} 1/(k(\ln k)^2)$$

est bien défini par la convergence de la série initiale. Ce premier terme ne change pas la nature de

$$\sum R_n.$$

Exercice 3

1) Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, le coefficient diagonal de rang j de ${}^tAB$ est

$$\sum_{i=1}^3 a_{i,j} b_{i,j}.$$

En sommant ces trois coefficients :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{i,j} b_{i,j}.$$

Cette expression est bilinéaire et symétrique. Elle vérifie

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 0.$$

Si cette somme est nulle, chaque coefficient $a_{i,j}$ est nul, donc $A = 0$. Réciproquement, $A = 0$ donne une somme nulle.

L'application est donc un produit scalaire réel sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sa norme associée est

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}.$$

2) Le produit matriciel donne $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les coefficients non nuls de I , J et J^2

occupent des positions disjointes : respectivement la diagonale, les positions $(1, 2)$, $(2, 3)$, et la position $(1, 3)$.

La formule du produit scalaire obtenue en 1) donne donc

$\langle I, J \rangle = \langle I, J^2 \rangle = \langle J, J^2 \rangle = 0$. La famille est orthogonale, et ses trois matrices sont non nulles.

3) a. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. La famille (I, J, J^2) est donc une base de E . Les normes valent $\|I\| = \sqrt{3}$, $\|J\| = \sqrt{2}$ et $\|J^2\| = 1$.

En normalisant séparément chaque matrice, on obtient une base orthonormale satisfaisant les conditions :

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}I, \quad K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}J, \quad K_2 = J^2.$$

3) b. La formule coefficient par coefficient de la question 1) donne :

$$\langle K_0, A \rangle = \frac{a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}}{\sqrt{3}},$$

$$\langle K_1, A \rangle = \frac{a_{1,2} + a_{2,3}}{\sqrt{2}}, \quad \langle K_2, A \rangle = a_{1,3}.$$

3) c. Méthode 1 — Formule de la projection en base orthonormale.

La projection orthogonale sur un sous-espace possédant une base orthonormale est la somme des composantes dans cette base. Par symétrie du produit scalaire :

$$p(A) = \langle K_0, A \rangle K_0 + \langle K_1, A \rangle K_1 + \langle K_2, A \rangle K_2.$$

En substituant les résultats précédents :

$$p(A) = \frac{a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}}{\sqrt{3}}K_0 + \frac{a_{1,2} + a_{2,3}}{\sqrt{2}}K_1 + a_{1,3}K_2.$$

On peut aussi l'écrire $p(A) = dI + eJ + a_{1,3}J^2$, où $d = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})/3$ et $e = (a_{1,2} + a_{2,3})/2$. Explicitement :

$$p(A) = \begin{pmatrix} d & e & a_{1,3} \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Minimisation de la distance à E .

Une matrice de E s'écrit $T = \alpha I + \beta J + \gamma J^2$. La formule de la norme donne :

$$\|A - T\|^2 = \sum_{i=1}^3 (a_{i,i} - \alpha)^2 + (a_{1,2} - \beta)^2 + (a_{2,3} - \beta)^2 + (a_{1,3} - \gamma)^2 + a_{2,1}^2 + a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2.$$

En posant $d = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})/3$, on développe les carrés pour obtenir

$$\sum_{i=1}^3 (a_{i,i} - \alpha)^2 = \sum_{i=1}^3 (a_{i,i} - d)^2 + 3(\alpha - d)^2,$$

car

$$\sum_{i=1}^3 (a_{i,i} - d) = 0.$$

De même, avec $e = (a_{1,2} + a_{2,3})/2$, les deux carrés dépendant de β sont la somme de leurs valeurs en e et de $2(\beta - e)^2$.

La distance au carré atteint donc son unique minimum pour $\alpha = d$, $\beta = e$, $\gamma = a_{1,3}$. La caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la distance donne à nouveau $p(A) = dI + eJ + a_{1,3}J^2$.

La première méthode utilise les coordonnées orthogonales; la seconde explique pourquoi les coefficients diagonaux et ceux de la première surdiagonale sont remplacés par leurs moyennes.

3) d. Les matrices K_0, K_1, K_2 sont libres. Ainsi $p(A) = 0$ si et seulement si les trois coefficients de la décomposition sont nuls, c'est-à-dire :

$$a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0, \quad a_{1,2} + a_{2,3} = 0, \quad a_{1,3} = 0.$$

Une matrice du noyau s'écrit donc :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & -\beta \\ \eta & \theta & -\alpha - \delta \end{pmatrix}.$$

Notons $E_{i,j}$ la matrice ayant un coefficient 1 en position (i, j) et des zéros ailleurs. La décomposition précédente donne :

$$A = \alpha(E_{1,1} - E_{3,3}) + \delta(E_{2,2} - E_{3,3}) + \beta(E_{1,2} - E_{2,3}) + \gamma E_{2,1} + \eta E_{3,1} + \theta E_{3,2}.$$

Ces six matrices engendrent donc le noyau. Elles sont libres : dans une combinaison nulle, les positions $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(3, 2)$ imposent successivement la nullité de chaque coefficient.

Une base de $\text{Ker } p$ est donc $(E_{1,1} - E_{3,3}, E_{2,2} - E_{3,3}, E_{1,2} - E_{2,3}, E_{2,1}, E_{3,1}, E_{3,2})$. Sa taille 6 est cohérente avec le théorème du rang : $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim E = 9 - 3 = 6$.

Problème

Partie 1

1) On fixe $r \in \mathbb{N}$. La fonction $f(x) = (1 - x)^{-(r+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$, ce qui inclut l'intervalle considéré et le point 0 nécessaire ensuite.

Sa première dérivée est $f'(x) = (r + 1)(1 - x)^{-(r+2)}$. Si

$f^{(k)}(x) = \frac{(r + k)!}{r!} (1 - x)^{-(r+k+1)}$, une nouvelle dérivation multiplie le coefficient par $r + k + 1$ et augmente de 1 l'exposant du dénominateur.

Par récurrence, pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} \frac{1}{(1-x)^{r+k+1}}.$$

La même expression est valable pour $k = 0$, avec $f^{(0)} = f$.

2) Si $r = 0$, $C_{n+r}^n = 1 = n^0/0!$ pour $n \geq 1$, donc l'équivalent est immédiat dans ce cas.

Pour $r \geq 1$, la formule factorielle donne $C_{n+r}^n = \frac{(n+1) \cdots (n+r)}{r!}$. Pour $n \geq 1$:

$$\frac{C_{n+r}^n}{n^r/r!} = \prod_{j=1}^r \left(1 + \frac{j}{n}\right) \rightarrow 1.$$

Le nombre de facteurs est fixé, puisque r est fixé. Ainsi $C_{n+r}^n \sim n^r/r!$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3) Comme $x \in]0, 1[$, on a $\ln x < 0$. Posons $a = -\ln x > 0$; alors $n^{r+1}x^n = n^{r+1}e^{-an}$.

Les croissances comparées entre exponentielle et puissance donnent $n^{r+1}e^{-an} \rightarrow 0$. On peut aussi expliciter le contrôle : son logarithme est $(r+1)\ln n - an$, et $\ln n/n \rightarrow 0$; ce logarithme tend donc vers $-\infty$, puis l'expression tend vers 0.

4) Méthode 1 — Comparaison algébrique.

Pour $t \in [0, x]$, $x - t \geq 0$ et $1 - t \geq 1 - x > 0$, donc $\varphi_x(t) \geq 0$. De plus :

$$\frac{x-t}{1-t} \leq x \iff x-t \leq x-xt \iff t(1-x) \geq 0.$$

La dernière inégalité est vraie, donc $0 \leq \varphi_x(t) \leq x$.

Méthode 2 — Variations sur le segment.

La fonction est dérivable au voisinage de $[0, x]$ et $\varphi'_x(t) = (x-1)/(1-t)^2 < 0$. Elle est donc décroissante sur ce segment. Ses valeurs aux bornes sont $\varphi_x(0) = x$ et $\varphi_x(x) = 0$, ce qui donne le même encadrement.

La première méthode utilise directement les signes ; la seconde décrit les variations de la fonction qui servira à contrôler le reste de Taylor.

- 5) a. La formule définissant f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$.
Pour $x < 1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un ouvert contenant $[0, x]$; la formule de Taylor avec reste intégral s'applique :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Cette vérification permet d'utiliser le point 0, bien que l'énoncé initial ait présenté la fonction sur $]0, 1[$.

- 5) b. D'après la question 1), $f^{(k)}(0)/k! = \frac{(r+k)!}{r!k!} = C_{k+r}^k$. Le coefficient du reste vaut $\frac{(n+r+1)!}{r!n!} = (n+r+1)C_{n+r}^n$.

Ainsi la formule de Taylor devient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^n C_{k+r}^k x^k = (n+r+1)C_{n+r}^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+r+2}} dt.$$

Pour $t \in [0, x]$, on peut factoriser l'intégrande sous la forme $\varphi_x(t)^n / (1-t)^{r+2}$. Par la question 4), $0 \leq \varphi_x(t)^n \leq x^n$, également pour $n = 0$ en prenant la puissance nulle égale à 1.

Tous les facteurs étant positifs ou nuls, l'intégration donne :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n C_{k+r}^k x^k \leq (n+r+1)C_{n+r}^n x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.$$

- 5) c. Pour $x \in]0, 1[$ et r fixé, l'intégrale $\int_0^x (1-t)^{-(r+2)} dt$ est finie, puisque l'intégrande est continue sur le segment et $1-t \geq 1-x > 0$.

La question 2) donne $(n + r + 1)C_{n+r}^n \sim n^{r+1}/r!$. En combinant ce contrôle avec la question 3), le membre de droite de l'inégalité de 5) b. tend vers 0.

Par encadrement, les sommes partielles tendent donc vers $f(x)$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^k x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Ce résultat particulier a été démontré à l'aide du reste de Taylor, sans invoquer de théorie générale des séries entières ni dériver une série infinie.

Partie 2

Dans cette partie, on note $q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

- 1) a. Pour $k \geq 1$, l'événement $X_1 = k$ signifie que les $k - 1$ premières épreuves sont des échecs et que la k -ième est un succès. Par indépendance, $P(X_1 = k) = q^{k-1}p$.

L'événement $X_1 = 0$ signifie qu'il n'y a jamais de succès. C'est l'intersection décroissante des événements «les m premières épreuves sont des échecs», de probabilités q^m . Par continuité décroissante des probabilités, $P(X_1 = 0) = \lim_{m \rightarrow \infty} q^m = 0$.

Ainsi X_1 suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p ; la valeur 0 introduite par convention ne reçoit aucune masse de probabilité.

- 1) b. Comme $p \in]0, 1[$, les moments usuels de cette loi existent. On a $E(X_1) = 1/p$ et $V(X_1) = (1 - p)/p^2$.
- 2) a. Question adaptée au programme actuel : le sujet précise que les issues envisagées sont toutes les suites de succès et d'échecs. Cette précision permet de déterminer l'image exacte, y compris sur les issues de probabilité nulle.

Pour obtenir n succès, au moins n épreuves sont nécessaires. Si le n -ième succès est obtenu, X_n est donc un entier supérieur ou égal à n ; sinon il vaut 0 par convention.

Pour chaque $k \geq 0$, une suite composée de k échecs puis de n succès donne $X_n = n + k$, quelle que soit la continuation. La suite composée uniquement d'échecs donne $X_n = 0$.

Ainsi $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \{n, n+1, n+2, \dots\}$. L'image d'une variable aléatoire peut contenir une valeur de probabilité nulle, ce qui sera le cas de 0.

- 2) b. Le nombre de succès dans les $n + k - 1$ premières épreuves est une somme de $n + k - 1$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Il suit donc la loi binomiale de paramètres $n + k - 1, p$.

La probabilité d'obtenir exactement $n - 1$ succès est :

$$C_{n+k-1}^{n-1} p^{n-1} q^{(n+k-1)-(n-1)} = C_{n+k-1}^{n-1} p^{n-1} q^k.$$

Le nombre de places est suffisant pour $n - 1$ succès, même lorsque $k = 0$.

- 2) c. L'événement $X_n = n + k$ équivaut à la conjonction de deux événements : exactement $n - 1$ succès dans les $n + k - 1$ premières épreuves, et un succès à l'épreuve suivante.

Ces événements sont indépendants, car ils dépendent de groupes disjoints d'épreuves indépendantes. En multipliant la probabilité de 2) b. par p , on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = n + k) = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k.$$

- 2) d. Par symétrie des coefficients binomiaux, $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$. On applique la partie 1, question 5) c., avec $r = n - 1 \in \mathbb{N}$ et $x = q \in]0, 1[$. Cela donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = p^n \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^k q^k = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1.$$

Les événements $X_n = n + k$ sont disjoints et leur réunion est $X_n \neq 0$. Par additivité des probabilités, $P(X_n \neq 0) = 1$, donc $P(X_n = 0) = 0$.

Le n -ième succès survient ainsi presque sûrement. La loi est bien définie et normalisée, sans supposer a priori que le temps d'attente est toujours fini.

Dans la suite, les quotients sont définis conformément à la convention du sujet : leur valeur est 0 lorsque $X_n = 0$. Sur l'événement de probabilité 1 où $X_n \geq n \geq 2$, tous les dénominateurs utilisés sont strictement positifs.

3) a. Pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$, les expressions factorielles donnent :

$$(n+k)C_{n+k-1}^{n-1} = (n+k) \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!k!},$$

$$nC_{n+k}^n = n \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}.$$

Les deux membres sont égaux. Cette démonstration vaut également pour $n = 1$ et $k = 0$.

3) b. Les valeurs de X_n sont positives ou nulles. Pour justifier l'existence de son espérance, on vérifie directement la convergence de la série des valeurs pondérées par leurs probabilités.

En utilisant 3) a., pour tout entier $K \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^K (n+k)P(X_n = n+k) = \sum_{k=0}^K nC_{n+k}^n p^n q^k = \frac{n}{p} \sum_{k=0}^K P(X_{n+1} = n+1+k).$$

La dernière somme tend vers 1, d'après la normalisation de la loi de X_{n+1} . La série converge donc, et comme ses termes sont non négatifs, il s'agit aussi de la convergence absolue nécessaire à l'existence de l'espérance. La valeur 0 n'apporte aucune contribution.

Ainsi X_n possède une espérance et $E(X_n) = n/p$. L'égalité est aussi conforme à la valeur obtenue pour $n = 1$.

4) a. Pour $n \geq 2$ et $k \geq 0$, $n+k-1 > 0$. La formule factorielle donne :

$$\frac{n-1}{n+k-1} C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{n-1}{n+k-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-2)!}{(n-2)!k!} = C_{n+k-2}^{n-2}.$$

- 4) b. Question adaptée au programme actuel : le quotient est explicitement défini sur l'événement $X_n = 0$, de probabilité nulle. Notons $Y_n = (n-1)/(X_n-1)$ sur $X_n \geq n$, et $Y_n = 0$ sur $X_n = 0$.

Pour $X_n \geq n \geq 2$, $0 < Y_n \leq 1$. Avec sa valeur conventionnelle, $0 \leq Y_n \leq 1$ partout. Il possède donc une espérance.

Le théorème de transfert, appliqué à cette fonction bornée de la variable discrète X_n , donne :

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+k-1} C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k.$$

Par 4) a., cela vaut

$$p \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k-2}^{n-2} p^{n-1} q^k.$$

Les termes de cette dernière somme sont les probabilités $P(X_{n-1} = n-1+k)$.

Pour $n > 2$, leur somme vaut 1 par 2) d. ; pour $n = 2$, on retrouve la loi géométrique de X_1 , également normalisée. Ainsi, dans tous les cas, $E(Y_n) = p$.

- 5) a. Question adaptée au programme actuel : on pose $Z_n = n/X_n$ lorsque $X_n \geq n$ et $Z_n = 0$ lorsque $X_n = 0$, de façon à ne jamais diviser par zéro.

Sur $X_n \geq n$, $0 < Z_n \leq 1$; la valeur conventionnelle donne aussi $0 \leq Z_n \leq 1$ sur tout l'espace. Cette variable est bornée et possède donc une espérance. Aucun calcul de sa valeur n'est nécessaire.

- 5) b. Question adaptée au programme actuel : les quotients utilisent les conventions des questions 4) b. et 5) a.

Méthode 1 — Comparaison avec l'estimateur précédent.

Pour tout entier $m \geq n \geq 2$, les dénominateurs sont strictement positifs, et :

$$\frac{n}{m} - \frac{n-1}{m-1} = \frac{n(m-1) - (n-1)m}{m(m-1)} = \frac{m-n}{m(m-1)} \geq 0.$$

L'inégalité est stricte pour $m > n$. On a donc $Z_n - Y_n \geq 0$ partout, y compris sur $X_n = 0$ où les deux valeurs sont nulles.

Pour établir une inégalité stricte entre espérances, on utilise l'événement $X_n = n+1$. Sa probabilité est $C_n^{n-1} p^n q = np^n q > 0$, et la différence vaut alors $1/(n(n+1))$. Ainsi :

$$E(Z_n - Y_n) \geq \frac{1}{n(n+1)} P(X_n = n+1) = \frac{p^n q}{n+1} > 0.$$

Les deux variables sont intégrables ; la linéarité et 4) b. donnent $E(Z_n) > E(Y_n) = p$.

Méthode 2 — Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Posons $U = \sqrt{X_n}$ et $V = 1/\sqrt{X_n}$ sur $X_n > 0$, avec $U = V = 0$ sur $X_n = 0$. Les moments d'ordre deux existent : $E(U^2) = E(X_n) = n/p < +\infty$ et $E(V^2) = E(1/X_n) \leq 1/n$ avec la même convention en 0.

Le produit UV vaut 1 presque sûrement, car $P(X_n = 0) = 0$. On établit ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ces variables à l'aide d'un carré positif. Posons $v = E(V^2) > 0$; cette positivité résulte par exemple de $P(X_n = n) = p^n > 0$.

Le carré $(U - V/v)^2$ possède une espérance, puisque U^2 et V^2 sont intégrables et UV vaut 1 presque sûrement. Sa positivité et la linéarité donnent :

$$0 \leq E((U - V/v)^2) = E(U^2) - \frac{2}{v} E(UV) + \frac{1}{v^2} E(V^2) = E(U^2) - \frac{1}{v}.$$

En multipliant par v , on obtient :

$$1 = (E(UV))^2 \leq E(U^2)E(V^2) = \frac{n}{p}E(1/X_n).$$

L'égalité imposerait que le carré positif $(U - V/v)^2$ ait une espérance nulle. Dans la somme discrète définissant cette espérance, chaque terme est positif ou nul : le carré serait donc nul sur chaque valeur de X_n de probabilité strictement positive. Cela imposerait $X_n = 1/v$ presque sûrement. Or $P(X_n = n) = p^n > 0$ et $P(X_n = n + 1) = np^n q > 0$. L'égalité est impossible et l'inégalité est stricte.

En multipliant par $p > 0$, puis en utilisant $E(Z_n) = nE(1/X_n)$, on obtient à nouveau $E(Z_n) > p$.

La première méthode compare deux fonctions du même temps d'attente ; la seconde explique l'effet de l'inversion d'une variable positive non constante. Aucune des deux ne calcule explicitement $E(Z_n)$.

6) Question adaptée au programme actuel : on utilise les conventions de définition des quotients sur $X_n = 0$. Les variables Y_n et Z_n sont des fonctions de l'observation X_n qui ne nécessitent pas de connaître p pour être calculées. Ce sont donc des estimateurs du paramètre p .

Pour chaque $n \geq 2$, la question 4) b. donne $E(Y_n) = p$. Ainsi $(Y_n)_{n \geq 2}$ est une suite d'estimateurs sans biais de p .

La question 5) b. donne $E(Z_n) > p$. L'estimateur Z_n possède donc un biais strictement positif, et la suite $(Z_n)_{n \geq 2}$ n'est pas sans biais.

La convergence éventuelle de ces estimateurs n'est pas demandée et n'est pas nécessaire pour cette comparaison.

Relevé des adaptations

- Problème, partie 2, question 2) a. : précision que toutes les suites de succès et d'échecs sont envisagées comme issues, afin de déterminer l'image exacte $X_n(\Omega)$, notamment l'appartenance de 0. Sans cette précision, les lois de probabilité seules ne déterminent pas la présence d'issues de probabilité nulle dans l'espace choisi.

- Problème, partie 2, questions 4) b., 5) a., 5) b. et 6) : ajout d'une convention commune attribuant la valeur 0 aux quotients sur l'événement $X_n = 0$. Cet événement est démontré de probabilité nulle en 2) d. ; les espérances et les conclusions sur les biais sont donc inchangées. Les dénominateurs sont strictement positifs sur $X_n \geq n \geq 2$.