



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) a) L'unique difficulté est la borne 0. Pour $0 < \varepsilon < 1$, la fonction $t \mapsto 2t - t \ln t$ est une primitive de $1 - \ln t$ sur $[\varepsilon, 1]$. Ainsi :

$$\int_{\varepsilon}^1 (1 - \ln t) dt = 2 - 2\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon.$$

Les croissances comparées donnent $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. En passant à la limite dans cette égalité, l'intégrale impropre converge et :

$$\int_0^1 (1 - \ln t) dt = 2.$$

- 1) b) Fixons $x > 0$ et posons $c = \min(x, 1)$. Pour $0 < t \leq c$, on a $1 - \ln t > 0$ et :

$$0 \leq \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} \leq \frac{1 - \ln t}{2}.$$

La question précédente, ou la même primitive sur $]0, c]$, montre que l'intégrale du majorant converge en 0. Le critère de comparaison prouve donc la convergence absolue de l'intégrale sur $]0, c]$. Si $x > 1$, l'intégrande est continue sur $[1, x]$, donc son intégrale sur ce segment existe. Par addition, l'intégrale définissant $F(x)$ converge pour tout $x > 0$.

- 1) c) Pour $0 < x \leq 1$, intégrons l'encadrement précédent, d'abord de ε à x , puis passons à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Il vient :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^x (1 - \ln t) dt = \frac{x(2 - \ln x)}{2}.$$

Le majorant tend vers 0 par croissance comparée. Ainsi $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. C'est la continuité de F en 0, à l'extrémité de son domaine $[0, +\infty[$.

- 1) d) Pour justifier la dérivation malgré la borne impropre, fixons $c > 0$. Par la relation de Chasles, au voisinage de c :

$$F(x) = F(c) + \int_c^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt.$$

L'intégrande est continue sur $]0, +\infty[$. Le théorème fondamental du calcul intégral

donne donc :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2}.$$

Cette dérivée est continue, donc F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Le dénominateur est positif et $1 - \ln x$ est positif pour $0 < x < e$, nul en e , négatif pour $x > e$. Par conséquent, F est strictement croissante sur $[0, e]$, puis strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Elle possède un maximum global en e . La limite à l'infini n'est pas nécessaire.

- 2) a) Montrons que $[0, 1]$ est stable par F . La croissance de F sur cet intervalle et $F(0) = 0$ donnent $0 \leq F(x) \leq F(1)$ pour $x \in [0, 1]$. D'autre part :

$$F(1) < \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \ln t) dt = 1.$$

L'inégalité est stricte : la différence des intégrandes vaut $\frac{(1 - \ln t)t^2}{2(2 + t^2)} > 0$ sur $]0, 1]$ et son intégrale est strictement positive, notamment sur $[1/2, 1]$. On a aussi $F(1) > 0$ par positivité de l'intégrande.

Ainsi $F([0, 1]) \subset [0, 1]$. Comme $u_0 = 1 \in [0, 1]$, si $u_n \in [0, 1]$, alors $u_{n+1} = F(u_n) \in [0, 1]$. La récurrence donne $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et justifie la définition de tous les termes.

- 2) b) La question précédente fournit $u_1 = F(1) < 1 = u_0$. Supposons $u_{n+1} < u_n$. Tous les termes appartiennent à $[0, 1]$, où F est strictement croissante, donc :

$$u_{n+2} = F(u_{n+1}) < F(u_n) = u_{n+1}.$$

Par récurrence, $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc strictement décroissante, ce qui établit en particulier l'inégalité demandée $u_0 \geq u_1$.

- 2) c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

- 3) a) La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$. Pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2} - 1 = \frac{-1 - \ln x - x^2}{2 + x^2}.$$

Posons $q(x) = -1 - \ln x - x^2$. Cette fonction est continue sur $]0, 1]$ et $q'(x) = -\frac{1}{x} - 2x < 0$. Elle est donc strictement décroissante. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = +\infty$ et $q(1) = -2 < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur un segment $[c, 1]$ avec $c > 0$ assez petit pour que $q(c) > 0$, donne l'existence d'un zéro. La stricte décroissance en assure l'unicité.

Ainsi il existe un unique $\beta \in]0, 1[$ tel que $q(\beta) = 0$, donc $g'(\beta) = 0$. Puisque le dénominateur de g' est positif, g' est positive sur $]0, \beta[$ et négative sur $] \beta, 1]$. Avec la continuité en 0, on conclut que g est strictement croissante sur $[0, \beta]$ et strictement décroissante sur $[\beta, 1]$.

- 3) b) On a $g(0) = 0$, donc $g(\beta) > 0$ par la croissance stricte sur $[0, \beta]$. D'autre part $g(1) = F(1) - 1 < 0$. La continuité de g sur $[\beta, 1]$ donne un zéro $\alpha \in]\beta, 1[$. La stricte décroissance sur ce segment prouve son unicité.

Sur $]0, \beta]$, g est strictement positive. Sur $] \beta, 1]$, elle s'annule seulement en α . Les seuls zéros de g dans $[0, 1]$ sont donc 0 et α .

- 4) a) Comme $\alpha < 1 = u_0$, la propriété est vraie au rang 0. Si $u_n \geq \alpha$, la croissance de F sur $[0, 1]$ et l'identité $F(\alpha) = \alpha$ donnent :

$$u_{n+1} = F(u_n) \geq F(\alpha) = \alpha.$$

Par récurrence, $u_n \geq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 4) b) La limite ℓ obtenue en 2) c) vérifie maintenant $\ell \in [\alpha, 1]$. La fonction F est continue sur $[0, 1]$, donc le passage à la limite dans $u_{n+1} = F(u_n)$ donne $\ell = F(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

Les seuls zéros de g dans $[0, 1]$ sont 0 et α . Comme $\ell \geq \alpha > 0$, le zéro 0 est exclu.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 2

Pour alléger les écritures, on note $p_k = P(X = k)$ et

$$C_n = \sum_{k=0}^n p_k = P(X \leq n).$$

- 1) Si $U = 1$, alors $X \leq n$: le commerçant vend X unités et conserve $n - X$ invendus. Son gain vaut $xX - y(n - X)$, qui est également la valeur du membre de droite de l'égalité demandée.

Si $U = 0$, alors $X > n$: les n unités sont vendues, sans invendu. Le gain et le membre de droite valent tous deux nx . Les deux cas couvrent toutes les réalisations, donc :

$$Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U).$$

On a toujours $-ny \leq Y_n \leq nx$. Le gain possède ainsi une espérance, même si aucune espérance n'est supposée pour X .

- 2) a) Sur l'événement $\{X \leq n\}$, $XU = X \in \{0, \dots, n\}$. Sur $\{X > n\}$, $XU = 0$. Par conséquent XU prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ et est une variable bornée.
- 2) b) Pour $1 \leq k \leq n$, l'événement $\{XU = k\}$ est $\{X = k\}$. La valeur 0 regroupe $\{X = 0\}$ et $\{X > n\}$, mais sa contribution à l'espérance est nulle. On obtient donc la somme finie :

$$E(XU) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^n kp_k.$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$, les deux membres étant nuls.

- 2) c) En développant l'expression de 1), on obtient :

$$Y_n = (x + y)XU - n(x + y)U + nx.$$

Les variables XU et U sont bornées, donc la linéarité de l'espérance s'applique. Comme U est l'indicatrice de $\{X \leq n\}$, $E(U) = C_n$. Ainsi :

$$E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^n k p_k - n(x + y) \sum_{k=0}^n p_k + nx,$$

soit, en regroupant les sommes finies :

$$E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^n (k - n) p_k + nx.$$

3) a) Rectification locale : le PDF comporte une parenthèse manquante dans la différence des espérances. La quantité étudiée est $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$.

Méthode 1 — Différence des sommes finies

D'après 2) c), le terme d'indice $n + 1$ dans la première somme ci-dessous est nul :

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x + y) \left[\sum_{k=0}^{n+1} (k - n - 1) p_k - \sum_{k=0}^n (k - n) p_k \right] + x.$$

Pour chaque $k \leq n$, la différence des coefficients est -1 . Par conséquent :

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = x - (x + y)C_n.$$

Méthode 2 — Gain apporté par une unité supplémentaire

Si $X \leq n$, la nouvelle unité reste invendue et $Y_{n+1} - Y_n = -y$. Si $X > n$, la demande, entière, est au moins $n + 1$: la nouvelle unité est vendue et $Y_{n+1} - Y_n = x$. Ainsi :

$$Y_{n+1} - Y_n = -y \mathbf{1}_{\{X \leq n\}} + x \mathbf{1}_{\{X > n\}}.$$

L'espérance donne $-yC_n + x(1 - C_n) = x - (x + y)C_n$. Cette seconde méthode explique directement le rôle du seuil de demande, tandis que la première réutilise la formule obtenue en 2) c).

- 3) b) Posons $q = \frac{x}{x+y}$. Puisque $x, y > 0$, on a $0 < q < 1$. La suite (C_n) est croissante et tend vers 1, car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

pour une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Il existe donc un entier m tel que $C_m \geq q$.

Prenons le plus petit de ces entiers, noté n_1 . L'hypothèse $C_0 = p_0 < q$ impose $n_1 \geq 1$. Par minimalité, $C_{n_1-1} < q$ et $C_{n_1} \geq q$. L'entier $n_0 = n_1 - 1 \in \mathbb{N}$ vérifie donc les deux inégalités demandées.

Pour l'unicité, si un entier j vérifie $C_j < q$ et $C_{j+1} \geq q$, aucun indice au plus j ne peut atteindre le seuil, par croissance de (C_n) , et l'indice $j + 1$ l'atteint. Il s'agit donc du premier indice n_1 , d'où $j = n_1 - 1 = n_0$.

- 3) c) Pour $n < n_1$, la minimalité de n_1 donne $C_n < q$, donc :

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x + y)(q - C_n) > 0.$$

Pour $n \geq n_1$, la croissance de (C_n) donne $C_n \geq q$, donc cette différence est négative ou nulle. L'espérance de gain est strictement croissante jusqu'à l'indice n_1 , puis décroissante au sens large. Son maximum sur $\mathbb{N}$ est donc atteint en $n_1 = n_0 + 1$.

Le stock optimal n'est pas nécessairement unique : une différence peut être nulle lorsque $C_n = q$. La conclusion demandée assure que n_1 est un stock optimal, sans affirmer son unicité.

- 4) a) Pour une loi de Poisson de paramètre $a > 0$, $p_k = e^{-a} \frac{a^k}{k!} > 0$. Ainsi :

$$p_{k+1} = e^{-a} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{a}{k+1} p_k.$$

La récurrence s'initialise avec $p_0 = e^{-a}$.

4) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Il faut rechercher le premier entier n tel que $C_n \geq q = \frac{x}{x+y}$. Le programme ci-dessous utilise la récurrence de 4) a) avec des logarithmes, afin d'éviter que e^{-a} soit arrondi à zéro pour un grand paramètre.

On conserve $\log_p$, égal à $\ln p_n$, et $\log_c$, égal à $\ln C_n$. La récurrence devient $\ln p_{n+1} = \ln p_n + \ln a - \ln(n+1)$. Pour ajouter deux quantités positives dont les logarithmes sont A et B , on utilise l'identité :

$$\ln(e^A + e^B) = L + \ln(e^{A-L} + e^{B-L}), \quad L = \max(A, B).$$

Les deux exposants sont négatifs ou nuls et l'un vaut zéro : la somme utilisée dans le logarithme est donc strictement positive. Cette identité découle de la factorisation $e^A + e^B = e^L(e^{A-L} + e^{B-L})$.

Python

```
import numpy as np

def stock_optimal(x, y, a):
    log_q = np.log(x / (x + y))
    log_a = np.log(a)
    n = 0
    log_p = -a
    log_c = -a
    while log_c < log_q:
        n = n + 1
        log_p = log_p + log_a - np.log(n)
        L = max(log_c, log_p)
        log_c = L + np.log(np.exp(log_c - L) + np.exp(log_p - L))
    return n
```

```
x = float(input("Bénéfice net par unité vendue : "))
y = float(input("Perte nette par unité invendue : "))
a = float(input("Paramètre de Poisson : "))
print(stock_optimal(x, y, a))
```

Les entrées sont supposées respecter les hypothèses du sujet : $x, y, a > 0$ et $e^{-a} < \frac{x}{x+y}$. À l'initialisation, $n = 0$ et $\log_p = \log_c = -a$, car $p_0 = C_0 = e^{-a}$. Chaque passage dans la boucle calcule la probabilité suivante, puis la nouvelle probabilité cumulée. À l'arrêt, l'indice est le premier pour lequel le seuil est atteint : c'est n_1 . En arithmétique exacte, la terminaison découle de $C_n \rightarrow 1 > q$.

Le programme complet a été exécuté avec des entrées simulées. Pour $(x, y, a) = (1, 1, 1)$, il affiche 1 ; pour $(1, 1, 5)$, il affiche 5 ; pour $(3, 1, 20)$, il affiche 23 ; pour $(1, 1, 1000)$, il affiche 1000. Ces contrôles vérifient le code, sans remplacer la démonstration du critère d'optimalité. Comme pour tout calcul en nombres flottants, une comparaison extrêmement proche du seuil dépend de la précision numérique.

Exercice 3

Pour tout $t \geq 0$, l'hypothèse appliquée à $(\sqrt{t}, 0)$ donne $g(t) = f_1(\sqrt{t})f_2(0) > 0$. Toutes les divisions par g utilisées ci-dessous sont donc légitimes.

- 1) La densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$. Pour $t > 0$, en choisissant $(x, y) = (\sqrt{t}, 0)$ dans l'hypothèse :

$$g(t) = f_1(\sqrt{t})f_2(0) = \frac{1}{2\pi}e^{-t/2}.$$

Ainsi $g(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$ pour tout $x > 0$, comme demandé. Ce calcul utilise uniquement les deux densités marginales : aucune indépendance de X_1 et X_2 n'est requise.

- 2) a) Fixons $y \in \mathbb{R}$ et dérivons l'identité $f_1(x)f_2(y) = g(x^2 + y^2)$ par rapport à $x \neq 0$. La dérivation d'une composée est valable, puisque $x^2 + y^2 > 0$, et fournit :

$$f_1'(x)f_2(y) = 2xg'(x^2 + y^2).$$

Divisons par $xf_1(x)f_2(y) = xg(x^2 + y^2)$, qui est non nul puisque $x \neq 0$ et les densités sont strictement positives. Il vient :

$$\frac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \frac{2g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}.$$

L'égalité vaut pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$.

- 2) b) Pour comparer h en deux points, faisons coïncider les arguments de g . Prenons $T > \max(x_1^2, x_2^2)$ et posons $y_1 = \sqrt{T - x_1^2}$ et $y_2 = \sqrt{T - x_2^2}$. Ces deux nombres sont réels et $x_j^2 + y_j^2 = T$ pour $j \in \{1, 2\}$. La question précédente donne :

$$h(x_1) = \frac{2g'(T)}{g(T)} = h(x_2).$$

L'égalité est donc vraie pour deux points non nuls distincts ; elle est également vraie s'ils sont égaux. Ainsi h est constante sur tout $\mathbb{R}^*$, y compris entre points de signes opposés. Notons a sa valeur. On a alors $f_1'(x) = axf_1(x)$ pour tout $x \neq 0$.

- 2) c) La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables.
Pour $x \neq 0$:

$$k'(x) = e^{-ax^2/2}(f_1'(x) - axf_1(x)) = 0.$$

Le théorème des accroissements finis entraîne que k est constante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Notons ces constantes K_- et K_+ .

La dérivabilité de f_1 assure sa continuité en 0, donc celle de k . Par conséquent $K_- = \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = k(0)$ et $K_+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = k(0)$. Les deux constantes coïncident. Ainsi k est constante sur tout $\mathbb{R}$, de valeur $K = k(0) = f_1(0) > 0$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = Ke^{ax^2/2}.$$

- 2) d) Comme f_1 est une densité, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Si $a \geq 0$, alors $e^{ax^2/2} \geq 1$, donc $f_1(x) \geq K > 0$ pour tout x . Pour tout $R > 0$, cela donnerait :

$$1 \geq \int_{-R}^R f_1(x) dx \geq 2RK.$$

C'est impossible pour $R > \frac{1}{2K}$. On en déduit $a < 0$. Le nombre $\sigma_1 = \sqrt{-\frac{1}{a}}$ est donc bien défini et strictement positif, et $a = -\frac{1}{\sigma_1^2}$.

2) e) Question adaptée au programme actuel : le second paramètre de la loi normale désigne ici la variance. Le nombre σ_1 est l'écart-type.

La forme obtenue devient $f_1(x) = K e^{-x^2/(2\sigma_1^2)}$. Il reste à déterminer K grâce à la normalisation. La densité normale centrée réduite, dont l'intégrale vaut 1, donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}.$$

Le changement de variable affine $x = \sigma_1 u$, effectué sur des segments puis étendu aux intégrales convergentes par passage aux limites des bornes, entraîne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/(2\sigma_1^2)} dx = \sigma_1 \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi $1 = K \sigma_1 \sqrt{2\pi}$ et $K = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}}$. La densité est exactement :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma_1^2)}.$$

Par conséquent X_1 suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$.

3) Question adaptée au programme actuel : la même convention de variance est appliquée à X_2 . On utilise le résultat admis dans l'énoncé : X_2 suit $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ pour un certain $\sigma_2 > 0$.

En appliquant l'identité définissant g aux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$:

$$g(1) = f_1(1)f_2(0) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-1/(2\sigma_1^2)},$$

$$g(1) = f_1(0)f_2(1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-1/(2\sigma_2^2)}.$$

Le facteur commun est strictement positif ; en le simplifiant, puis en utilisant l'injectivité de l'exponentielle, on obtient $\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma_2^2}$. Les deux écarts-types étant positifs, $\sigma_1 = \sigma_2$.

Les variables suivent donc la même loi normale centrée, sans que cela impose leur indépendance.

Problème

Partie I : étude des symétries de $\mathbb{R}^n$

- 1) a) Tout $x \in F_1$ possède la décomposition $x = x + 0$, avec $x \in F_1$ et $0 \in F_2$. Par définition de s , on a donc $s(x) = x - 0 = x$.
- 1) b) La question précédente donne $F_1 \subset \text{Ker}(s - \text{Id})$. Réciproquement, si x appartient à ce noyau, décomposons-le en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. L'égalité $s(x) = x$ devient $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$, soit $2x_2 = 0$. Ainsi $x_2 = 0$ et $x = x_1 \in F_1$. Les deux inclusions donnent $\text{Ker}(s - \text{Id}) = F_1$.
- 2) a) Pour $x \in F_2$, la décomposition est $x = 0 + x$. La définition entraîne $s(x) = 0 - x = -x$.
- 2) b) D'après 2) a), $F_2 \subset \text{Ker}(s + \text{Id})$. Si x appartient à ce noyau, écrivons $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe. L'égalité $s(x) = -x$ donne $x_1 - x_2 = -x_1 - x_2$, soit $2x_1 = 0$. Ainsi $x_1 = 0$ et $x \in F_2$. Donc $\text{Ker}(s + \text{Id}) = F_2$.
- 3) Posons $r = \dim F_1$. Puisque F_1 et F_2 sont non nuls et supplémentaires, $1 \leq r \leq n - 1$ et $\dim F_2 = n - r$. Prenons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F_1 et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de F_2 . Leur réunion est une base de $\mathbb{R}^n$, car la somme est directe et égale à l'espace entier.

Chaque vecteur de la première base est propre pour la valeur 1, et chaque vecteur de la seconde est propre pour -1 . Il existe donc une base de vecteurs propres : s est

diagonalisable. Dans cette base :

$$\text{Mat}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres sont présentes puisque les deux sous-espaces sont non nuls.

- 4) Soit un endomorphisme dont la matrice dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ est la matrice diagonale précédente, avec $1 \leq r \leq n - 1$. Posons $F_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et $F_2 = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. Ce sont deux sous-espaces non nuls et supplémentaires.

La matrice montre que $s(x_1) = x_1$ pour $x_1 \in F_1$ et $s(x_2) = -x_2$ pour $x_2 \in F_2$. Par linéarité, $s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$. Il s'agit donc de la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . La présence de chacun des deux signes sur la diagonale est nécessaire pour respecter la définition du sujet.

Partie II : étude de deux exemples

- 1) a) Méthode 1 — Calcul des noyaux et des dimensions

Pour la valeur 1, le système $(M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ est :

$$-4x + 2y + 2z = 0, \quad 2x - y - z = 0, \quad 2x - y - z = 0.$$

Ces équations équivalent à $-2x + y + z = 0$. Ainsi :

$$E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}.$$

Tout vecteur de ce plan s'écrit $x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1)$. Les deux vecteurs sont indépendants, donc $\dim E_1 = 2$.

Pour la valeur -1 , le système $(M + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ devient :

$$2x + 2y + 2z = 0, \quad 2x + 5y - z = 0, \quad 2x - y + 5z = 0.$$

La différence des deux dernières équations donne $6(y - z) = 0$. Ainsi $y = z$, puis la première donne $x = -2y$. Ces relations satisfont également les deux autres équations. Donc :

$$E_{-1} = \text{Ker}(s + \text{Id}) = \text{Vect}((-2, 1, 1)).$$

Son intersection avec E_1 est nulle : pour $(-2t, t, t) \in E_1$, l'équation du plan donne $6t = 0$. Les dimensions 2 et 1 s'additionnent à 3 ; ces espaces sont donc supplémentaires et fournissent une base de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice est $\text{diag}(1, 1, -1)$, dont les seules valeurs propres sont 1 et -1 . Il n'y en a donc aucune autre pour s .

Méthode 2 — Action sur un plan et sa normale

Posons $v = (-2, 1, 1)$, considéré comme un vecteur colonne. On vérifie coefficient par coefficient que :

$$v^t v = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = I_3 - \frac{1}{3} v^t v.$$

Par conséquent, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, $s(w) = w - \frac{1}{3} \langle v, w \rangle v$. Si $w \in v^\perp$, alors $s(w) = w$. De plus $\langle v, v \rangle = 6$, donc $s(v) = v - 2v = -v$.

La décomposition orthogonale $\mathbb{R}^3 = v^\perp \oplus \text{Vect}(v)$ donne donc une base de vecteurs propres, avec 1 sur le plan $v^\perp$ et -1 sur la droite de v . Les espaces propres sont exactement ceux calculés dans la première méthode. Cette approche fait déjà apparaître la géométrie orthogonale de la transformation; la première méthode s'applique aussi à des matrices sans structure géométrique visible.

1) b) Les espaces E_1 et E_{-1} trouvés en 1) a) sont non nuls et supplémentaires. Si $w = w_1 + w_{-1}$ selon cette décomposition, la linéarité donne $s(w) = w_1 - w_{-1}$. Ainsi s est la symétrie par rapport au plan $-2x + y + z = 0$, parallèlement à la droite $\text{Vect}((-2, 1, 1))$.

2) a) Comme $s^2 = \text{Id}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$s(x + s(x)) = s(x) + s^2(x) = s(x) + x = x + s(x),$$

$$s(x - s(x)) = s(x) - s^2(x) = s(x) - x = -(x - s(x)).$$

On a donc $x + s(x) \in \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $x - s(x) \in \text{Ker}(s + \text{Id})$.

2) b) Notons $A = \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $B = \text{Ker}(s + \text{Id})$. Pour tout x , la décomposition :

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

a son premier terme dans A et son second dans B , d'après 2) a). Ainsi $A + B = \mathbb{R}^n$.

Si $z \in A \cap B$, alors $s(z) = z$ et $s(z) = -z$. Donc $2z = 0$ et $z = 0$. La somme est directe : $\mathbb{R}^n = A \oplus B$.

2) c) Rectification locale : la définition de la partie I impose deux sous-espaces non nuls. L'hypothèse $s^2 = \text{Id}$ autorise pourtant $s = \text{Id}$ et $s = -\text{Id}$. La question adaptée distingue ces cas.

Pour $x = x_A + x_B$ avec $x_A \in A$ et $x_B \in B$, la définition des noyaux et la linéarité donnent $s(x) = x_A - x_B$.

Si $A = \{0\}$, alors la somme directe de 2) b) impose $B = \mathbb{R}^n$, donc $s = -\text{Id}$. Si $B = \{0\}$, alors $A = \mathbb{R}^n$, donc $s = \text{Id}$. Ainsi, lorsque $s \neq \text{Id}$ et $s \neq -\text{Id}$, les deux sous-espaces sont non nuls. Avec la formule précédente, s est bien la symétrie par rapport à A parallèlement à B au sens de la partie I.

Si $s = \text{Id}$, on a $A = \mathbb{R}^n$ et $B = \text{Ker}(2\text{Id}) = \{0\}$. Si $s = -\text{Id}$, on a $A = \text{Ker}(-2\text{Id}) = \{0\}$ et $B = \mathbb{R}^n$. Ces deux applications vérifient toujours $s^2 = \text{Id}$, mais ne répondent pas à la définition avec deux sous-espaces non nuls retenue dans ce sujet.

Partie III : symétries orthogonales

- 1) D'après la partie II, s est la symétrie par rapport à $E_1 = \{(x, y, z) : -2x + y + z = 0\}$ parallèlement à $E_{-1} = \text{Vect}(v)$, où $v = (-2, 1, 1)$.

L'équation de E_1 est $\langle v, (x, y, z) \rangle = 0$, donc $E_1 = v^\perp$. Le vecteur v est orthogonal à tout vecteur de E_1 , et $\dim E_1^\perp = 3 - 2 = 1$. Ainsi $E_1^\perp = \text{Vect}(v) = E_{-1}$. La symétrie est donc orthogonale par rapport à E_1 .

- 2) a) Notons $A = \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $B = \text{Ker}(s + \text{Id})$. Puisque s est une symétrie au sens de la partie I, les espaces A et B sont non nuls et supplémentaires.

Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $s(x) = x$ et $s(y) = -y$. La symétrie de l'endomorphisme signifie que $\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$ pour tous les vecteurs. Ici, cela donne :

$$\langle x, y \rangle = -\langle x, y \rangle,$$

donc $\langle x, y \rangle = 0$. On en déduit $B \subset A^\perp$. Comme $\dim B = n - \dim A = \dim A^\perp$, cette inclusion est une égalité. La symétrie par rapport à A parallèlement à B est donc la symétrie orthogonale par rapport à A .

- 2) b) Les composantes x_1, y_1 appartiennent à F , et x_2, y_2 à $F^\perp$. Les produits scalaires croisés sont nuls. Comme $s(x) = x_1 - x_2$, on a :

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle.$$

De même, puisque $s(y) = y_1 - y_2$:

$$\langle x, s(y) \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Les deux expressions sont égales pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. L'endomorphisme s est donc symétrique. Avec 2) a), cela établit l'équivalence demandée.

Les occurrences de l'espace E , non défini dans le PDF, sont ici rectifiées en $\mathbb{R}^n$; en particulier, le couple (x, y) appartient à $(\mathbb{R}^n)^2$.

3) a) Décomposons $x = x_F + x_\perp$ avec $x_F \in F$ et $x_\perp \in F^\perp$. Par définition, $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_\perp$. Ainsi :

$$(2p - \text{Id})(x) = 2x_F - (x_F + x_\perp) = x_F - x_\perp = s(x).$$

L'identité étant vraie pour tout x , on a $s = 2p - \text{Id}$.

3) b) Dans une base orthonormale $(u_1, \dots, u_d)$ de F , la projection orthogonale est donnée par

$$p(x) = \sum_{i=1}^d \langle x, u_i \rangle u_i.$$

En effet, ce vecteur est dans F et, pour chaque j , l'orthonormalité donne :

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^d \langle x, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle x, u_j \rangle - \langle x, u_j \rangle = 0.$$

Le résidu est donc dans $F^\perp$, ce qui caractérise la projection. En remplaçant $p(x)$ dans 3) a), on conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad s(x) = 2 \sum_{i=1}^d \langle x, u_i \rangle u_i - x.$$

L'indice supérieur $d = \dim F$ permet de distinguer la dimension de la projection notée p .

- 4) a) Le plan F est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$. Il est de dimension 2.

Méthode 1 — Résolution des équations d'orthogonalité

Le vecteur $v_1 = (2, 1, 0)$ appartient à F et $\|v_1\|^2 = 5$. Cherchons un vecteur (x, y, z) de F orthogonal à v_1 . Il doit satisfaire :

$$x - 2y + 3z = 0, \quad 2x + y = 0.$$

La seconde équation donne $y = -2x$, puis la première donne $5x + 3z = 0$. En prenant $x = -3$, on obtient $y = 6$ et $z = 5$. Ainsi $v_2 = (-3, 6, 5)$ convient. Son carré de norme est $9 + 36 + 25 = 70$ et $\langle v_1, v_2 \rangle = -6 + 6 = 0$.

En normalisant, on obtient :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3, 6, 5).$$

Ces deux vecteurs sont unitaires, orthogonaux et dans F . Ils sont indépendants et leur nombre égale $\dim F = 2$: ils forment une base orthonormale de F .

Méthode 2 — Soustraction de la projection sur une droite

Les vecteurs $v_1 = (2, 1, 0)$ et $w = (-3, 0, 1)$ appartiennent à F et sont indépendants, notamment parce que le second a une troisième coordonnée non nulle. Ils forment donc une base de ce plan.

Retranchons à w sa projection sur la droite de v_1 :

$$w_{\perp} = w - \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (-3, 0, 1) + \frac{6}{5}(2, 1, 0) = \frac{1}{5}(-3, 6, 5).$$

Ce vecteur est dans F par combinaison linéaire. De plus :

$$\langle w_{\perp}, v_1 \rangle = \langle w, v_1 \rangle - \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle = 0.$$

Il est non nul et sa norme vaut $\sqrt{70}/5$. La normalisation de v_1 et $w_{\perp}$ redonne les vecteurs u_1, u_2 ci-dessus, donc une base orthonormale. Cette méthode construit l'orthogonalité à partir d'une base quelconque; la première exploite directement les équations du plan. Aucune procédure générale d'orthonormalisation n'est supposée connue.

4) b) Méthode 1 — Formule dans la base orthonormale du plan

Pour un vecteur colonne X , l'application $X \mapsto \langle X, u_j \rangle u_j$ a pour matrice $u_j {}^t(u_j)$. D'après

3) b), la matrice cherchée est donc $N = 2(u_1 {}^t(u_1) + u_2 {}^t(u_2)) - I_3$. Les deux produits sont :

$$u_1 {}^t(u_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 {}^t(u_2) = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 9 & -18 & -15 \\ -18 & 36 & 30 \\ -15 & 30 & 25 \end{pmatrix}.$$

La somme, avec le dénominateur commun 70, vaut :

$$P = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 65 & 10 & -15 \\ 10 & 50 & 30 \\ -15 & 30 & 25 \end{pmatrix}.$$

En doublant puis en retranchant I_3 :

$$N = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 60 & 20 & -30 \\ 20 & 30 & 60 \\ -30 & 60 & -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan F .

Méthode 2 — Projection sur la droite normale

Le vecteur $v = (1, -2, 3)$ est normal à F et $\|v\|^2 = 14$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, sa projection sur $F^\perp = \text{Vect}(v)$ est $\frac{\langle X, v \rangle}{14}v$. La symétrie conserve la composante dans F et change le signe de la composante dans $F^\perp$:

$$s(X) = X - 2\frac{\langle X, v \rangle}{14}v.$$

Ainsi :

$$N = I_3 - \frac{1}{7}v^t v = I_3 - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette deuxième méthode utilise un seul vecteur normal et sert de contrôle indépendant du calcul issu de la base du plan. La première répond directement à la consigne « en déduire » et se généralise à un sous-espace donné par une base orthonormale.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, 3) a) : rectification de la parenthèse manquante dans $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$.
- Exercice 2, 4) b) : Code adapté en Python. La consigne de programmation est convertie en Python, et la syntaxe des entrées et de l'affichage est précisée dans le sujet. La récurrence des probabilités est conservée ; son écriture logarithmique évite la sous-évaluation numérique de e^{-a} à zéro.

- Exercice 3, 2) e) et 3) : les lois normales sont notées $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ avec la convention actuelle du second paramètre égal à la variance ; les σ_j restent des écarts-types. Cette convention est annoncée dans le préambule de l'exercice.
- Problème, partie II, 2) c) : distinction de $s = \text{Id}$ et $s = -\text{Id}$ pour rendre la conclusion compatible avec la définition imposant deux sous-espaces non nuls. La conclusion de symétrie est conservée pour tous les autres cas.
- Problème, partie III, préambule, 2) b) et 3) : remplacement des occurrences de E , espace non défini dans le PDF, par $\mathbb{R}^n$, et de E^2 par $(\mathbb{R}^n)^2$.
- Problème, partie III, 3) b) : l'indice supérieur de la base orthonormale est renommé d , afin de ne pas confondre la dimension de F avec la projection notée p .