



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des fonctions φ de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(*)$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = (1 + x^2)\varphi(x).$$

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que si u et v sont deux éléments de E , alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.
- 3) a. Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par $f(x) = e^{x^2/2}$. Vérifier que f est élément de E .
- 3) b. Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}.$$

Montrer que g est élément de E .

- 4) a. Soit h une solution de $(*)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f , que h est combinaison linéaire de f et de g .
- 4) b. Montrer finalement que (f, g) est une base de E .

Exercice 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \ln n.$$

On rappelle que $v_n \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 1) a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n - w_{n+1} \geq 0$.
- 1) b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.
- 1) c. En déduire que, au voisinage de $+\infty$:

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- 2) a. Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.
- 2) b. En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3) Montrer que la série de terme général u_n converge.

4) a. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$

4) b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1.$$

4) c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}.$$

5) En utilisant la convergence de la suite (w_n) , calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

en fonction de $\ln 2$.

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$ défini par :

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \quad (u | u') = xx' + yy' + zz'.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u | u)}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.

On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a, b, c)$ et on suppose que c est non nul.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur :

$$\varphi(u) = (yc - zb, za - xc, xb - ya).$$

- 1) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
- 2) a. Vérifier que ω appartient à $\text{Ker } \varphi$.
- 2) b. Montrer que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre.
- 2) c. Dédire des questions précédentes que $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(\omega)$.
- 3) a. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $(\varphi(u) \mid \omega) = 0$.
- 3) b. En déduire que $\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$.
- 4) a. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.
- 4) b. Montrer que $(u \mid \omega) = (u_1 \mid \omega)$.
- 4) c. En déduire que $u_1 = \frac{(u \mid \omega)}{\|\omega\|^2} \omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et de ω .
- 5) a. Montrer que $M^3 = -\|\omega\|^2 M$.

5) b. En déduire que $\forall v \in \text{Im } \varphi, \quad \varphi \circ \varphi(v) = -\|\omega\|^2 v.$

5) c. Montrer finalement que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi \circ \varphi(u) = -\|\omega\|^2 u + (u \mid \omega)\omega.$$

Problème

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $R_1, R_2, \dots, R_r$ de probabilités respectives $x_1, x_2, \dots, x_r$. On admet que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}, 0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1) a. Exprimer la variable X en fonction des variables $X_1, X_2, \dots, X_r$.

1) b. Donner la loi de X_i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

1) c. En déduire que l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n.$$

La suite de ce problème consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

- 2) a. Donner la valeur de $x_1 + x_2 + \dots + x_r$, puis écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera f , des $r - 1$ variables $x_1, \dots, x_{r-1}$.

On considère f sur le domaine des probabilités admissibles :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1} : x_i > 0 \text{ pour tout } i, \sum_{i=1}^{r-1} x_i < 1 \right\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^{r-1}$.

- 2) b. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$.
- 3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
- 3) b. Montrer que le seul point de $\mathcal{D}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $R = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$.
- 4) Déterminer la matrice $M \in \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R)$.
- 5) On pose $A = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
- 5) a. Montrer que J est diagonalisable.
- 5) b. Exprimer J^2 en fonction de J et de r . En déduire que les valeurs propres de J sont 0 et $r - 1$.
- 5) c. Montrer que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre $r - 1$ est de dimension 1.

- 5) d. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour montrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P d'inverse ${}^tP$ telle que $A = PD{}^tP$, où D est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ dont les $r - 2$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la $r - 1$ -ième ligne étant égal à r .
- 6) a. Dédire des questions précédentes que, pour toute colonne $H \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tHMH > 0$.
- 6) b. En posant ${}^tH = (h_1, h_2, \dots, h_{r-1})$, exprimer ${}^tHMH$ en fonction des réels h_i et des dérivées partielles d'ordre 2 de f au point R .
- 6) c. En déduire que f présente un minimum local au point R .
- 6) d. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.