



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EDHEC**

Mathématiques

**2001**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Corrigé

## Exercice 1

---

- 1) Pour montrer que  $E$  est un espace vectoriel réel, on vérifie que c'est un sous-espace de  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

La fonction nulle appartient à  $E$ . Soient  $u, v \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\alpha u + \beta v$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$(\alpha u + \beta v)''(x) = \alpha u''(x) + \beta v''(x) = (1 + x^2)(\alpha u(x) + \beta v(x)).$$

Ainsi  $\alpha u + \beta v \in E$ . L'ensemble  $E$  est donc un sous-espace vectoriel de  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et en particulier un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

- 2) On dérive la fonction  $W = u'v - v'u$ , qui est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  puisque  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^2$ .

$$W' = u''v + u'v' - v''u - v'u' = u''v - v''u.$$

Comme  $u, v \in E$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$W'(x) = (1 + x^2)u(x)v(x) - (1 + x^2)v(x)u(x) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi  $u'v - v'u$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

- 3) a. La fonction  $f(x) = e^{x^2/2}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . La dérivation donne :

$$f'(x) = xf(x), \quad f''(x) = f(x) + xf'(x) = (1 + x^2)f(x).$$

La fonction  $f$  vérifie donc  $(*)$ , ce qui prouve que  $f \in E$ . On retiendra aussi  $f(x) > 0$  pour tout réel  $x$ ,  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .

- 3) b. On pose  $B(x) = \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$ . L'intégrande  $f^{-2}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  puisque  $f$  ne s'annule pas. L'intégrale existe sur tout segment, avec la convention usuelle  $\int_0^x = -\int_x^0$  lorsque  $x < 0$ .

Le théorème fondamental du calcul intégral donne  $B'(x) = f(x)^{-2}$  et donc  $B''(x) = -2f'(x)f(x)^{-3}$ . En particulier  $B$  et  $g = fB$  sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

En dérivant le produit, on obtient :

$$g' = f'B + fB' = f'B + \frac{1}{f}.$$

Une seconde dérivation fait apparaître deux termes qui se compensent :

$$g'' = f''B + f'B' - \frac{f'}{f^2} = f''B + \frac{f'}{f^2} - \frac{f'}{f^2} = f''B.$$

Puisque  $f'' = (1 + x^2)f$ , on a  $g'' = (1 + x^2)fB = (1 + x^2)g$ . Ainsi  $g \in E$ . On retiendra  $g(0) = 0$  et, d'après la formule de  $g'$ ,  $g'(0) = 1$ .

- 4) a. On applique la question 2 aux fonctions  $h$  et  $f$ . Il existe une constante réelle  $C$  telle que  $h'f - f'h = C$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $f$  est partout strictement positive, le quotient  $h/f$  est dérivable et :

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2} = \frac{C}{f^2}.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et  $x$ , pour tout réel  $x$ , on obtient :

$$\frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)} = C \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}.$$

Avec  $f(0) = 1$ , puis en multipliant par  $f(x)$  :

$$h(x) = h(0)f(x) + Cg(x).$$

L'égalité  $h'f - f'h = C$  évaluée en 0, avec  $f'(0) = 0$ , donne  $C = h'(0)$ . Toute solution de (\*) s'écrit donc :

$$h = h(0)f + h'(0)g.$$

Cette description a été établie par dérivation et intégration de fonctions explicites.

4) b. D'après les questions 3 et 4 a,  $f, g \in E$  et la famille  $(f, g)$  engendre  $E$ . Il reste à prouver qu'elle est libre.

Supposons  $\alpha f + \beta g = 0$  comme égalité de fonctions. En évaluant en 0, on obtient  $\alpha = 0$ , car  $f(0) = 1$  et  $g(0) = 0$ . En dérivant l'égalité puis en évaluant en 0, on obtient  $\beta = 0$ , car  $f'(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$ .

La famille  $(f, g)$  est libre et génératrice de  $E$  : c'est une base de  $E$ , et  $\dim E = 2$ .

## Exercice 2

---

1) a. On commence par exprimer la différence :

$$w_n - w_{n+1} = v_n - v_{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

## Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire

---

On définit  $q(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$  pour  $x \geq 0$ . Cette fonction est dérivable et :

$$q'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Comme  $q(0) = 0$ , on a  $q(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ , et même  $q(x) > 0$  pour  $x > 0$ . En prenant  $x = 1/n$ , on obtient  $w_n - w_{n+1} = q(1/n) > 0$ , donc l'inégalité demandée.

## Méthode 2 — Comparaison avec une intégrale

---

La fonction  $t \mapsto 1/t$  est décroissante sur  $[n, n+1]$ . Ainsi :

$$\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

En retranchant  $1/(n+1)$ , on obtient  $w_n - w_{n+1} \geq 0$ . La première méthode convient à une expression dépendant d'un paramètre réel; la seconde relie directement les sommes harmoniques au logarithme.

1) b. On utilise les développements limités usuels à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

En multipliant la seconde égalité par  $x$  et en conservant les termes jusqu'à l'ordre 2 :

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2).$$

Par soustraction, il vient :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

- 1) c. D'après la question 1 a,  $w_n - w_{n+1} = q(1/n)$ , où  $q$  est la fonction de la question 1 b.  
Écrivons précisément  $q(x) = x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Comme  $1/n \rightarrow 0$ , on a  $\varepsilon(1/n) \rightarrow 0$ , et :

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En particulier  $w_n - w_{n+1} \sim 1/(2n^2)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

- 2) a. Les termes  $w_n - w_{n+1}$  sont positifs d'après la question 1 a et équivalents à  $1/(2n^2)$  d'après la question 1 c.

La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge puisque son exposant 2 est supérieur à 1. Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs montre donc que

$$\sum_{n \geq 1} (w_n - w_{n+1})$$

converge.

- 2) b. Méthode 1 — Sommes télescopiques

Pour tout  $N \geq 1$ , la somme finie se simplifie :

$$\sum_{n=1}^N (w_n - w_{n+1}) = w_1 - w_{N+1} = 1 - w_{N+1}.$$

La question 2 a montré que le membre de gauche admet une limite finie, notée  $L$ . Ainsi  $w_{N+1} \rightarrow 1 - L$ . La suite  $(w_n)$  converge donc vers un réel  $\gamma$ , avec :

$$\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (w_n - w_{n+1}).$$

## Méthode 2 — Monotonie et minoration

---

La question 1 a montré que  $(w_n)$  est décroissante. Pour chaque entier  $k \geq 1$ , la décroissance de  $1/t$  sur  $[k, k+1]$  donne  $\int_k^{k+1} dt/t \leq 1/k$ . En sommant :

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = v_n.$$

Par conséquent  $w_n = v_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$ . La suite est décroissante et minorée, donc convergente par le théorème de la limite monotone.

La première méthode utilise directement la convergence de la série précédente ; la seconde démontre l'existence de la limite à partir d'un encadrement intégral.

3) Les termes  $u_n$  sont bien définis et strictement positifs, puisque

$$\sum_{k=1}^n k^2 \geq 1.$$

## Méthode 1 — Formule de la somme des carrés

---

On établit la formule nécessaire :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \geq 1).$$

Elle est vraie pour  $n = 1$ . Si elle est vraie au rang  $n$ , alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

Comme  $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ , cette expression vaut  $(n+1)(n+2)(2n+3)/6$ , la formule au rang  $n+1$ . Elle est donc démontrée par récurrence.

On en déduit :

$$u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{3}{n^3}.$$

La série

$$\sum 1/n^3$$

converge, car  $3 > 1$ . Par équivalence de termes positifs,

$$\sum u_n$$

converge.

## Méthode 2 — Comparaison intégrale directe

Pour  $t \in [k-1, k]$ , on a  $t^2 \leq k^2$ . En intégrant puis en sommant pour  $k = 1, \dots, n$  :

$$\frac{n^3}{3} = \int_0^n t^2 dt \leq \sum_{k=1}^n k^2.$$

Les deux membres étant strictement positifs, on peut prendre leurs inverses :  $0 < u_n \leq 3/n^3$ . La comparaison avec une série de Riemann convergente prouve à nouveau la convergence.

La première méthode fournit une expression exacte utile pour calculer la somme ; la seconde suffit pour établir la convergence sans formule explicite.

- 4) a. La formule établie à la question 3 donne  $u_n = 6/[n(n+1)(2n+1)]$ . Tous les dénominateurs étant non nuls pour  $n \geq 1$ , l'égalité demandée équivaut à :

$$6 = a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1).$$

En développant :

$$6 = (2a + 2b + c)n^2 + (3a + b + c)n + a.$$

Cette égalité étant requise pour une infinité de valeurs de  $n$ , le polynôme obtenu en soustrayant 6 est identiquement nul. L'identification des coefficients donne :

$$a = 6, \quad 2a + 2b + c = 0, \quad 3a + b + c = 0.$$

Les deux dernières équations deviennent  $2b + c = -12$  et  $b + c = -18$ . En les soustrayant, on obtient  $b = 6$ , puis  $c = -24$ . Le triplet est unique et :

$$u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

4) b. On sépare les indices pairs et impairs dans la somme finie définissant  $v_{2n+1}$  :

$$v_{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

En isolant la dernière somme, on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1.$$

4) c. On somme la décomposition de la question 4 a sur les seuls indices  $k = 1, \dots, n$ . Il s'agit de sommes finies, ce qui permet de séparer les trois termes sans condition de convergence :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 6v_n + 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

La deuxième somme vaut  $v_{n+1} - 1 = v_n + 1/(n+1) - 1$ . Pour la troisième, on utilise la question 4 b. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 6v_n + 6v_n + \frac{6}{n+1} - 6 - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24.$$

On regroupe les termes et on utilise  $18 + 6/(n+1) = 24 - 6n/(n+1)$  :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}.$$

- 5) On utilise la convergence de  $(w_n)$ , et non une soustraction d'équivalents de  $(v_n)$ .

Puisque  $v_n = w_n + \ln n$ , on a :

$$v_n - v_{2n+1} = w_n - w_{2n+1} + \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right).$$

Les suites  $w_n$  et  $w_{2n+1}$  tendent toutes deux vers  $\gamma$ , donc leur différence tend vers 0. De plus,  $n/(2n+1) \rightarrow 1/2 > 0$ ; la continuité du logarithme donne :

$$v_n - v_{2n+1} \rightarrow \ln(1/2) = -\ln 2.$$

On sait déjà que

$$\sum u_n$$

converge. En passant à la limite dans l'expression de ses sommes partielles obtenue à la question 4 c, avec  $n/(n+1) \rightarrow 1$ , on conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24 \ln 2.$$

### Exercice 3

---

- 1) Les colonnes de la matrice de  $\varphi$  sont les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique. La définition donne :

$$\varphi(e_1) = (0, -c, b), \quad \varphi(e_2) = (c, 0, -a), \quad \varphi(e_3) = (-b, a, 0).$$

Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

2) a. En appliquant la définition à  $\omega = (a, b, c)$  :

$$\varphi(\omega) = (bc - cb, ca - ac, ab - ba) = (0, 0, 0).$$

Donc  $\omega \in \text{Ker } \varphi$ . De plus  $\omega \neq 0$ , car  $c \neq 0$ .

2) b. Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha\varphi(e_1) + \beta\varphi(e_2) = 0$ . En coordonnées, cette égalité s'écrit :

$$(\beta c, -\alpha c, \alpha b - \beta a) = (0, 0, 0).$$

La première coordonnée donne  $\beta = 0$ , puis la deuxième donne  $\alpha = 0$ , puisque  $c \neq 0$ . La famille  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$  est donc libre.

2) c. Méthode 1 — Théorème du rang

La question 2 b fournit deux vecteurs libres de l'image, donc  $\text{rg } \varphi \geq 2$ . La question 2 a fournit un vecteur non nul du noyau, donc  $\dim \text{Ker } \varphi \geq 1$ .

Le théorème du rang dans  $\mathbb{R}^3$  donne  $\text{rg } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = 3$ . Les deux inégalités imposent  $\text{rg } \varphi = 2$  et  $\dim \text{Ker } \varphi = 1$ .

Comme  $\text{Vect}(\omega) \subset \text{Ker } \varphi$  et que les deux espaces ont dimension 1, on conclut  $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(\omega)$ .

## Méthode 2 — Résolution du système du noyau

---

Pour  $u = (x, y, z)$ , l'égalité  $\varphi(u) = 0$  équivaut au système :

$$cy - bz = 0, \quad az - cx = 0, \quad bx - ay = 0.$$

Puisque  $c \neq 0$ , les deux premières équations donnent  $y = bz/c$  et  $x = az/c$ . Ces valeurs satisfont aussi la troisième équation, car  $b(az/c) - a(bz/c) = 0$ .

Ainsi  $u = (z/c)(a, b, c) = (z/c)\omega$ . Réciproquement tout multiple de  $\omega$  appartient au noyau par la question 2 a. Donc  $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(\omega)$ .

La première méthode exploite les dimensions et les questions précédentes ; la seconde donne directement les solutions du système linéaire.

3) a. Pour  $u = (x, y, z)$ , on développe le produit scalaire :

$$(\varphi(u) \mid \omega) = a(cy - bz) + b(az - cx) + c(bx - ay).$$

Les termes se compensent deux à deux :

$$(\varphi(u) \mid \omega) = acy - abz + abz - bcx + bcx - acy = 0.$$

L'image de tout vecteur par  $\varphi$  est donc orthogonale à  $\omega$ .

3) b. La question 3 a donne  $\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(\omega)^\perp = (\text{Ker } \varphi)^\perp$ .

On sait par la question 2 c et le théorème du rang que  $\dim \text{Im } \varphi = 2$ . Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on a aussi  $\dim(\text{Ker } \varphi)^\perp = 3 - \dim \text{Ker } \varphi = 2$ .

Une inclusion entre deux sous-espaces de même dimension est une égalité. Ainsi

$$\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp.$$

- 4) a. Dans un espace euclidien de dimension finie, tout sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires. La question 3 b permet donc d'écrire :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \varphi \oplus (\text{Ker } \varphi)^\perp = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi.$$

Par définition de cette somme directe, tout vecteur  $u$  se décompose en  $u = u_1 + u_2$ , avec  $u_1 \in \text{Ker } \varphi$  et  $u_2 \in \text{Im } \varphi$ .

Pour expliciter l'unicité, si  $u = u'_1 + u'_2$  est une autre telle décomposition, alors  $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2$  appartient à l'intersection des deux sous-espaces. Cette intersection est réduite au vecteur nul, donc  $u_1 = u'_1$  et  $u_2 = u'_2$ .

- 4) b. Puisque  $u_2 \in \text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$  et  $\omega \in \text{Ker } \varphi$ , on a  $(u_2 | \omega) = 0$ . Par linéarité du produit scalaire :

$$(u | \omega) = (u_1 + u_2 | \omega) = (u_1 | \omega) + (u_2 | \omega) = (u_1 | \omega).$$

- 4) c. La question 2 c donne  $u_1 = \lambda \omega$  pour un réel  $\lambda$ . La question 4 b entraîne :

$$(u | \omega) = \lambda(\omega | \omega) = \lambda \|\omega\|^2.$$

Or  $\|\omega\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 > 0$ , car  $c \neq 0$ . On peut donc diviser et obtenir :

$$u_1 = \frac{(u | \omega)}{\|\omega\|^2} \omega, \quad u_2 = u - u_1 = u - \frac{(u | \omega)}{\|\omega\|^2} \omega.$$

Ces formules sont celles de la projection orthogonale sur la droite  $\text{Vect}(\omega)$  et de la composante orthogonale à cette droite.

5) a. On pose  $s = a^2 + b^2 + c^2 = \|\omega\|^2$  et  $\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . On calcule d'abord  $M^2$ .

Par exemple, les trois coefficients de la première ligne sont  $-c^2 - b^2$ ,  $ab$  et  $ac$ ; ceux de la deuxième sont  $ab$ ,  $-c^2 - a^2$  et  $bc$ ; ceux de la troisième sont  $ac$ ,  $bc$  et  $-a^2 - b^2$ . Ainsi :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \Omega^t \Omega - sI_3.$$

La question 2 a donne  $M\Omega = 0$ . En multipliant l'identité précédente à gauche par  $M$  :

$$M^3 = M\Omega^t \Omega - sM = -sM = -\|\omega\|^2 M.$$

5) b. L'identité matricielle précédente donne l'identité d'endomorphismes  $\varphi^3 = -\|\omega\|^2 \varphi$ .

Soit  $v \in \text{Im } \varphi$ . Il existe  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que  $v = \varphi(u)$ . Par conséquent :

$$\varphi^2(v) = \varphi^3(u) = -\|\omega\|^2 \varphi(u) = -\|\omega\|^2 v.$$

L'égalité demandée est donc vraie pour tout vecteur de l'image.

5) c. Méthode 1 — Décomposition orthogonale

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^3$ , on utilise la décomposition  $u = u_1 + u_2$  de la question 4. Comme  $u_1 \in \text{Ker } \varphi$ , on a  $\varphi^2(u_1) = 0$ . Comme  $u_2 \in \text{Im } \varphi$ , la question 5 b donne  $\varphi^2(u_2) = -\|\omega\|^2 u_2$ .

La linéarité et la formule de  $u_2$  entraînent :

$$\varphi^2(u) = -\|\omega\|^2 \left( u - \frac{(u | \omega)}{\|\omega\|^2} \omega \right) = -\|\omega\|^2 u + (u | \omega) \omega.$$

## Méthode 2 — Utilisation de la matrice carrée

Soit  $U$  la colonne des coordonnées de  $u$  dans la base canonique. L'identité

$M^2 = \Omega \Omega^t - \|\omega\|^2 I_3$  obtenue à la question 5 a donne :

$$M^2 U = \Omega(\Omega^t U) - \|\omega\|^2 U.$$

Puisque la base canonique est orthonormale,  $\Omega^t U = (u | \omega)$ . En revenant aux vecteurs, on obtient à nouveau  $\varphi^2(u) = -\|\omega\|^2 u + (u | \omega) \omega$ .

La première méthode explique l'action de  $\varphi^2$  sur deux sous-espaces orthogonaux ; la seconde lit directement cette action dans la matrice calculée.

## Problème

- 1) a. Pour chaque issue de l'expérience,  $X_i$  compte le résultat numéro  $i$  s'il n'a pas été obtenu. En additionnant ces indicatrices, on compte exactement tous les résultats absents. Ainsi :

$$X = \sum_{i=1}^r X_i.$$

- 1) b. Fixons  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Le résultat  $R_i$  est absent d'une épreuve avec probabilité  $1 - x_i$ .

L'événement  $\{X_i = 1\}$  signifie que  $R_i$  est absent de chacune des  $n$  épreuves. Celles-ci sont indépendantes ; les événements d'absence relatifs à ces épreuves le sont donc également. Ainsi :

$$P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n, \quad P(X_i = 0) = 1 - (1 - x_i)^n.$$

Donc  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $(1 - x_i)^n$ , qui appartient à  $(0, 1)$  puisque  $0 < x_i < 1$ .

- 1) c. Les variables  $X_i$  sont bornées, donc possèdent une espérance, et  $E(X_i) = (1 - x_i)^n$  d'après leur loi de Bernoulli. La variable  $X$  est elle-même bornée entre 0 et  $r$ , donc son espérance existe.

Par linéarité de l'espérance appliquée à la somme finie de la question 1 a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^r E(X_i) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n.$$

Cette linéarité ne nécessite pas l'indépendance des variables  $X_i$ .

- 2) a. Question adaptée au programme actuel.

On précise le domaine correspondant aux probabilités admissibles. Les résultats  $R_1, \dots, R_r$  forment un système complet d'événements pour une épreuve, donc :

$$x_1 + \dots + x_r = 1.$$

On pose  $m = r - 1$  et  $S = x_1 + \dots + x_m$ . Alors  $x_r = 1 - S$ , d'où  $1 - x_r = S$  et :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m (1 - x_i)^n + S^n.$$

Les contraintes sur les probabilités équivalent à  $x_i > 0$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $S < 1$ . En effet, elles impliquent  $S > 0$ , donc  $0 < x_r = 1 - S < 1$ , et chaque  $x_i < S < 1$ .

Le domaine est donc :

$$\mathcal{D} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i > 0 \text{ pour tout } i, S < 1\}.$$

Il est ouvert, car il est défini par un nombre fini d'inégalités strictes portant sur des fonctions linéaires continues. Il est convexe : toute combinaison convexe de deux points dont les coordonnées sont positives garde des coordonnées positives, et la somme des coordonnées reste strictement inférieure à 1.

La restriction au domaine  $\mathcal{D}$  garantit que  $f$  représente effectivement une espérance pour toute valeur de ses arguments.

2) b. Question adaptée au programme actuel.

La fonction  $f$  est la restriction à l'ouvert  $\mathcal{D}$  d'une fonction polynomiale des variables  $x_1, \dots, x_m$ . Une fonction polynomiale est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^m$ .

Ainsi  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{D}$ , ce qui autorisera le calcul de sa hessienne et l'étude de ses extrema en des points intérieurs.

3) a. Pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , seul le terme  $(1 - x_i)^n$  dépend de  $x_i$  dans la première somme, tandis que  $\partial S / \partial x_i = 1$ . En dérivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = -n(1 - x_i)^{n-1} + nS^{n-1}.$$

Cette formule est valable en tout point de  $\mathcal{D}$ .

3) b. Question adaptée au programme actuel.

On recherche les points critiques sur  $\mathcal{D}$ . En ce domaine,  $1 - x_i > 0$  et  $S > 0$ . La fonction  $t \mapsto t^{n-1}$  est strictement croissante sur  $(0, +\infty)$ , puisque  $n - 1 \geq 1$ .

Par la question 3 a, l'annulation simultanée des dérivées partielles équivaut donc à :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (1 - x_i)^{n-1} = S^{n-1} \iff 1 - x_i = S.$$

Toutes les coordonnées  $x_i$  sont alors égales à un même réel  $t$ . Comme  $S = mt$ , les équations donnent  $1 - t = mt$ , soit  $(m + 1)t = 1$  et  $t = 1/r$ .

Réciproquement, au point  $R = (1/r, \dots, 1/r)$ , les coordonnées sont positives et  $S = m/r = (r - 1)/r < 1$ , donc  $R \in \mathcal{D}$ . On a  $1 - x_i = S = (r - 1)/r$ , ce qui annule toutes les dérivées partielles.

Le point  $R$  est donc l'unique point critique de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ .

La restriction du domaine est essentielle : l'affirmation d'unicité sur tout  $\mathbb{R}^{r-1}$  est fausse en général. Par exemple, pour  $n = 3$  et  $r = 3$ , au point  $(-1, -1)$ , on a  $S = -2$  et  $(1 - x_i)^2 = S^2 = 4$  pour les deux indices; les dérivées partielles s'y annulent également. Ce point n'appartient pas au domaine des probabilités.

4) On dérive les expressions de la question 3 a. Pour tout  $i$ , on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = n(n-1)(1 - x_i)^{n-2} + n(n-1)S^{n-2}.$$

Pour  $i \neq j$ , le terme  $(1 - x_i)^{n-1}$  ne dépend pas de  $x_j$ , donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = n(n-1)S^{n-2}.$$

Au point  $R$ , les quantités  $1 - x_i$  et  $S$  valent toutes  $(r - 1)/r$ . On définit :

$$\kappa = n(n-1) \left( \frac{r-1}{r} \right)^{n-2} > 0.$$

Pour  $n = 2$ , la puissance d'exposant 0 vaut 1 et  $\kappa = 2$ , donc ce cas est également couvert. Les coefficients de la hessienne  $M$  sont :

$$M_{ii} = 2\kappa, \quad M_{ij} = \kappa \quad (i \neq j).$$

Avec les matrices  $I$  et  $J$  introduites à la question suivante, cela s'écrit

$$M = \kappa(I + J) = \kappa A.$$

5) a. La matrice  $J$  est réelle et symétrique, puisqu'elle a tous ses coefficients égaux à 1.

Le théorème spectral réel s'applique : une matrice symétrique réelle possède une base orthonormale de vecteurs propres et est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale. Ainsi  $J$  est diagonalisable.

5) b. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , le coefficient  $(J^2)_{ij}$  est la somme de  $m$  produits égaux à 1. Ainsi  $(J^2)_{ij} = m$  et :

$$J^2 = mJ = (r - 1)J.$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $J$  et  $V \neq 0$  un vecteur propre associé. En appliquant l'identité à  $V$  :

$$\lambda^2 V = J^2 V = mJ V = m\lambda V.$$

Puisque  $V \neq 0$ , on en déduit  $\lambda(\lambda - m) = 0$ . Toute valeur propre est donc 0 ou  $m$ .

Il faut aussi vérifier que ces deux possibilités sont réalisées. La colonne  $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1)$  vérifie  $J\mathbf{1} = m\mathbf{1}$ , donc  $m = r - 1$  est valeur propre. Comme  $m \geq 2$ , la colonne non nulle  ${}^t(1, -1, 0, \dots, 0)$  a une somme de coordonnées nulle et est envoyée sur 0 par  $J$  ; ainsi 0 est également valeur propre.

Les valeurs propres de  $J$  sont exactement 0 et  $r - 1$ .

5) c. Pour une colonne  $V = {}^t(v_1, \dots, v_m)$ , chaque coordonnée de  $JV$  vaut

$$\sigma = v_1 + \dots + v_m.$$

L'équation  $JV = mV$  équivaut à  $\sigma = mv_i$  pour chaque indice  $i$ . Comme  $m > 0$ , toutes les coordonnées sont alors égales à  $\sigma/m$ , et  $V$  est un multiple de  $\mathbf{1}$ .

Réciproquement, tout multiple de  $\mathbf{1}$  vérifie cette équation. Le sous-espace propre est donc :

$$E_m(J) = \text{Vect}(\mathbf{1}), \quad \dim E_m(J) = 1.$$

On note aussi, pour la suite,  $E_0(J) = \{V : v_1 + \dots + v_m = 0\} = \text{Vect}(\mathbf{1})^\perp$ . Cet espace est de dimension  $m - 1 = r - 2$ .

5) d. On munit l'espace des colonnes réelles du produit scalaire canonique

$\langle U, V \rangle = {}^tUV$ . D'après le théorème spectral et la description des espaces propres, on choisit une base orthonormale  $V_1, \dots, V_{m-1}$  de  $E_0(J)$ , puis  $V_m = \mathbf{1}/\sqrt{m}$ .

La colonne  $V_m$  est unitaire et orthogonale aux précédentes. La famille  $(V_1, \dots, V_m)$  est donc une base orthonormale de l'espace des colonnes, formée de vecteurs propres de  $J$ .

Comme  $A = I + J$ , on a :

$$AV_i = V_i \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad AV_m = (1+m)V_m = rV_m.$$

On forme  $P$  en mettant ces colonnes dans cet ordre. Elles constituent une base, donc  $P$  est inversible; leur orthonormalité donne  ${}^tPP = I$ , donc  $P^{-1} = {}^tP$ .

En posant  $D = \text{diag}(1, \dots, 1, r)$ , avec  $m-1 = r-2$  coefficients égaux à 1, les égalités précédentes s'écrivent  $AP = PD$ . En multipliant à droite par  $P^{-1}$  :

$$A = PDP^{-1} = PD{}^tP.$$

Cela prouve la diagonalisation demandée avec une matrice de passage orthogonale.

## 6) a. Méthode 1 — Diagonalisation orthogonale

On utilise  $M = \kappa A = \kappa P D^t P$  avec  $\kappa > 0$ . Soit  $H \neq 0$  et posons  $Y = {}^t P H$ . Comme  ${}^t P$  est inversible,  $Y \neq 0$ .

En écrivant  $Y = {}^t(y_1, \dots, y_m)$ , on obtient :

$${}^t H M H = \kappa {}^t Y D Y = \kappa \left( \sum_{i=1}^{m-1} y_i^2 + r y_m^2 \right) > 0.$$

En effet,  $r > 0$  et au moins l'une des coordonnées  $y_i$  est non nulle. La forme quadratique associée à  $M$  est donc strictement positive sur les colonnes non nulles.

## Méthode 2 — Somme de carrés dans la base canonique

---

Avec  $H = {}^t(h_1, \dots, h_m)$ , on a

$${}^t H I H = \sum_i h_i^2$$

et, puisque tous les coefficients de  $J$  valent 1 :

$${}^t H J H = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i h_j = \left( \sum_{i=1}^m h_i \right)^2.$$

Ainsi :

$${}^t H M H = \kappa \left( \sum_{i=1}^m h_i^2 + \left( \sum_{i=1}^m h_i \right)^2 \right) > 0,$$

car  $H \neq 0$  implique

$$\sum_i h_i^2 > 0.$$

La première méthode suit la diagonalisation demandée ; la seconde donne une expression explicite particulièrement simple de la forme quadratique.

6) b. Par définition du produit matriciel et des coefficients de  $M$  :

$${}^tHMH = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R).$$

La hessienne est symétrique, car  $f$  est de classe  $C^2$  et le théorème de Schwarz s'applique. On peut donc regrouper les termes symétriques :

$${}^tHMH = \sum_{i=1}^m h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(R) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R).$$

En remplaçant les dérivées par les valeurs de la question 4 :

$${}^tHMH = 2\kappa \sum_{i=1}^m h_i^2 + 2\kappa \sum_{1 \leq i < j \leq m} h_i h_j = \kappa \left( \sum_{i=1}^m h_i^2 + \left( \sum_{i=1}^m h_i \right)^2 \right).$$

6) c. Méthode 1 — Signes des valeurs propres de la hessienne

La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathcal{D}$  contenant  $R$ , d'après la question 2 b. Le point  $R$  est critique d'après la question 3 b. Sa hessienne est  $M = \kappa A$ , avec  $\kappa > 0$ .

La question 5 d donne les valeurs propres de  $A$  : 1, sur un espace de dimension  $r - 2$ , et  $r$ , sur un espace de dimension 1. Les valeurs propres de  $M$  sont donc  $\kappa$  et  $r\kappa$ , toutes strictement positives.

Le critère de classification des points critiques par la hessienne s'applique :  $f$  présente un minimum local strict au point  $R$ .

## Méthode 2 — Convexité d'une fonction d'une variable

On pose  $\psi(t) = (1 - t)^n$  pour  $t \in (0, 1)$ . Cette fonction est de classe  $C^2$  et :

$$\psi''(t) = n(n - 1)(1 - t)^{n-2} > 0.$$

Elle est donc strictement convexe sur  $(0, 1)$ . Pour toute configuration admissible, les probabilités  $x_1, \dots, x_r$  appartiennent à cet intervalle et leur moyenne est  $1/r$ . L'inégalité de convexité pour une combinaison finie à coefficients  $1/r$  donne :

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \psi(x_i) \geq \psi\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i\right) = \psi(1/r).$$

La stricte convexité implique que l'égalité n'a lieu que lorsque toutes les probabilités sont égales. Ainsi :

$$E(X) \geq r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n,$$

avec égalité uniquement pour  $x_1 = \dots = x_r = 1/r$ . Ce choix correspond à  $R$  dans la paramétrisation par les  $r - 1$  premières probabilités. Il donne un minimum global strict sur  $\mathcal{D}$ , et donc aussi un minimum local strict.

La première méthode utilise les outils demandés dans le problème ; la seconde établit en plus le caractère global du minimum grâce à la convexité d'une fonction d'une variable.

6) d. Au point  $R$ , les  $r - 1$  premières probabilités valent  $1/r$  et la dernière vaut :

$$x_r = 1 - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r}.$$

En remplaçant dans l'expression de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n = r \left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$$

Cette valeur est atteinte pour les résultats équiprobables. La seconde méthode de la question 6 c montre qu'elle est également la valeur minimale globale parmi les probabilités strictement positives de somme 1.

## Relevé des adaptations

---

- Problème, 2 a : remplacement du cube  $(0, 1)^{r-1}$  par le domaine

$$\mathcal{D} = \{(x_1, \dots, x_{r-1}) : x_i > 0, \sum_{i=1}^{r-1} x_i < 1\},$$

avec précision qu'il est ouvert et convexe. La contrainte garantit que la probabilité restante

$$x_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x_i$$

appartient à  $(0, 1)$  et que l'expression étudiée représente bien l'espérance du problème.

- Problème, 2 b : étude de la régularité sur  $\mathcal{D}$  pour assurer la cohérence avec le domaine corrigé de la question 2 a.

- Problème, 3 b : unicité du point critique formulée sur  $\mathcal{D}$  au lieu de tout  $\mathbb{R}^{r-1}$ . L'énoncé original est faux en général sur l'espace entier ; le domaine des probabilités assure les signes permettant de conclure à l'unicité.