



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Question préliminaire

La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi. On montrera qu'il existe un entier naturel N tel que, si $n \geq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$.

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch , définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

et, d'autre part, la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
- 2) Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
- 3a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
- 3b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- 4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1.$$

- 4a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.

4b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

4c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k).$$

En déduire que la série de terme général v_n est divergente.

5a) Montrer que

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}.$$

5b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.

5c) En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc « Pile » ou « Face » avec la probabilité $1/2$.

On note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au k -ième lancer ». Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, « Pile » puis « Face », dans cet ordre, aux lancers $k - 1$ et k , où $k \geq 2$. La variable X prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, « Pile » suivi de « Pile » aux lancers $k - 1$ et k , où $k \geq 2$. La variable Y prend la

valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, « contre toute attente », $E(Y) > E(X)$.

1) Calculer $P(X = 2)$.

2a) Soit $k \geq 3$. Montrer que, si le premier lancer est un « Pile », alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \cdots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

2b) En déduire que

$$\forall k \geq 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}.$$

2c) On pose, pour tout entier $k \geq 2$, $u_k = 2^k P(X = k)$. Déterminer u_k , puis donner la loi de X .

3) Montrer que X a une espérance, notée $E(X)$, et la calculer.

4a) Montrer que $(F_1, P_1 P_2, P_1 F_2)$ est un système complet d'événements.

4b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 4$,

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k - 1) + \frac{1}{4}P(Y = k - 2). \quad (*)$$

4c) On pose, pour tout entier $k \geq 2$, $v_k = P(Y = k)$. Déterminer v_2 et v_3 , puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a, pour tout entier $k \geq 2$,

$$v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}.$$

4d) En déduire la suite $(v_k)_{k \geq 0}$, puis donner la loi de Y .

4e) Montrer que Y a une espérance, notée $E(Y)$, et la calculer.

Exercice 3

1) On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

1b) Déterminer la fonction de répartition de Z .

1c) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale. Déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

2) Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1, et on pose $Z = X - Y$.

2a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.

2b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.

2c) Déterminer l'espérance de Z .

2d) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n . On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.

On note φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par

$$Q = (X - 1)P' - XP''.$$

Partie I : étude de φ

1a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1b) Pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, calculer $\varphi(X^j)$.

1c) Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.

1d) En déduire que φ est diagonalisable.

2) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$, et on écrit

$$L_k = \sum_{i=0}^p a_i X^i, \quad a_p = 1.$$

- 2a)** Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k .
- 2b)** Déterminer L_0 .
- 2c)** Écrire, lorsque $k \geq 1$, le système d'équations dont $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ sont solutions.
- 2d)** En déduire que, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$,

$$a_i = (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i}^2.$$

- 3)** On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$. Montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x).$$

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

- 1)** Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\psi(P, Q) = (P \mid Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) \, dx.$$

- 1a)** Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale

$$I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} \, dx$$

converge.

1b) Vérifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.

1c) Montrer que ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t) \, dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t) \, dt.$$

3) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $f_k^{(i)}(0) = 0$, où f_k est la fonction définie à la question I.3.

4) Soient i et k deux entiers appartenant à $\{0, \dots, n\}$.

4a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t) \, dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t) \, dt.$$

La somme est vide si $k = 0$.

4b) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t} \, dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t) \, dt.$$

4c) Montrer que, pour le produit scalaire ψ , la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 4d)** Montrer que $I_{k+1} = (k+1)I_k$, puis donner la valeur de I_k . En déduire la norme de L_k , notée $\|L_k\|$, puis donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III : étude des racines de L_n

On rappelle que $n \geq 1$.

On pose

$$R(x) = \prod_{j=1}^p (x - x_j),$$

où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n . On convient que $R(x) = 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+$. Les racines dites positives sont ici strictement positives.

- 1)** Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}_+$.
- 2)** On suppose, dans cette question, que $p < n$.
 - 2a)** En remarquant que $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $(R \mid L_n) = 0$.
 - 2b)** En déduire que RL_n est le polynôme nul.
 - 3a)** En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que $p = n$.
 - 3b)** En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.