



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Δ l'application qui, à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $\Delta(f) = g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
- 2) a) Vérifier que, pour toute fonction $f \in E$, $\Delta(f)$ est dérivable.
- 2) b) En déduire que Δ n'est pas surjective.
- 3) Montrer que Δ est injective.
- 4) On suppose, dans cette question, que Δ possède une valeur propre réelle λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé : $f \neq 0$ et $\Delta(f) = \lambda f$.
- 4) a) Montrer que la fonction h , définie pour tout réel x par $h(x) = f(x)e^{-x/\lambda}$, est constante.
- 4) b) Déterminer alors $\Delta(f)$.
- 5) Conclure, à l'aide des questions précédentes, que Δ n'a aucune valeur propre réelle.
- 6) Pour toute fonction $f \in E$, on pose $F_0 = \Delta(f)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.
- 6) a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1} .
- 6) b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$, et $f(0) = \ln 2$.

1) On considère la fonction g définie par $g(t) = (\sin t - t)/t^2$ si $t \neq 0$, et $g(0) = 0$.

1) a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

1) b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} g(t) dt = 0$.

1) c) En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

3) b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.

3) c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

3) d) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) a) Montrer que $\forall x > 0, |f(x)| \leq \frac{1}{2x}$.

4) b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5) a) Montrer que $f(\pi/2) > 0$ et $f(\pi) < 0$.

5) b) Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} \right) \sin t dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

- 5) c) Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = 1/(2x)$ et $y = -1/(2x)$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires. On note $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans les bases canoniques et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ celle de g dans les bases canoniques. Ainsi A a deux lignes et trois colonnes, et B trois lignes et deux colonnes.

- 1) Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- 2) a) Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
- 2) b) Montrer que $\dim \text{Im}(g) \leq 2$.
- 2) c) Dédire des questions précédentes que $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq 2$.
- 2) d) Conclure que $g \circ f$ n'est ni surjective ni injective.
- 3) En déduire une valeur propre de BA .

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.

- 4) a) Montrer que $BX \neq 0$.

- 4) b) Montrer que, si λ est valeur propre de AB , alors λ est valeur propre de BA .
- 4) c) En déduire que BA est diagonalisable.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

Partie I

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé (Ω, P) , et A un événement de probabilité non nulle. On note Z/A une variable dont la loi est celle de Z sachant que A est réalisé : $\forall k \in \mathbb{N}, P(Z/A = k) = P(Z = k \mid A)$.

On considère un événement A vérifiant $0 < P(A) < 1$. Montrer que, si Z a une espérance, alors Z/A et $Z/\bar{A}$ ont aussi une espérance et que :

$$E(Z) = P(A)E(Z/A) + P(\bar{A})E(Z/\bar{A}).$$

Partie II

On dispose de deux urnes, U et V . Initialement, U est vide et V contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On effectue une suite d'épreuves indépendantes. Chaque épreuve consiste à choisir de manière équiprobable un entier de 1 à $2n$, puis à transférer la boule portant ce numéro de l'urne dans laquelle elle se trouve vers l'autre urne.

Pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on dit que U est dans l'état E_k lorsqu'elle contient k boules, et qu'elle accède à l'état E_k lorsqu'elle contient k boules pour la première fois.

On note X_k la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves à effectuer pour que U accède à l'état E_k , et égale à 0 si cet état n'est jamais atteint. L'état initial E_0 est atteint au temps 0. On admet que chaque X_k a une espérance, notée m_k .

Pour $j \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$. Le but est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour accéder à l'état E_k , c'est-à-dire m_k .

- 1) Montrer que X_0 et X_1 sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.

- 2) a) Donner, pour tout $j \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$, une interprétation de la variable N_j . On justifiera au préalable que chaque état est atteint presque sûrement. On pourra découper les épreuves en blocs de $4n$ tirages : depuis toute configuration, un choix approprié d'au plus $4n$ numéros permet de vider U , puis de placer dans U exactement k boules.

- 2) b) Montrer que N_j a une espérance, notée μ_j dans la suite.

- 3) Soit $j \in \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$. Après le premier accès à E_j , on note A_j l'événement « le tirage suivant fait accéder à E_{j+1} en une seule épreuve ».

- 3) a) Calculer $P(A_j)$.

- 3) b) Montrer que, conditionnellement à A_j , N_j vaut 1. Conditionnellement à $\overline{A_j}$, le premier tirage fait passer de E_j à E_{j-1} . Notons R_j le nombre de tirages supplémentaires nécessaires pour revenir à E_j , puis S_j le nombre de tirages nécessaires pour passer de ce retour à E_j au premier accès à E_{j+1} . Montrer que $N_j = 1 + R_j + S_j$ sur cet événement et que les lois conditionnelles de R_j et S_j y sont respectivement celles de N_{j-1} et N_j .

On justifiera que la loi de la durée de passage d'un état E_r à E_{r+1} dépend seulement de r , et que les tirages futurs conservent leur loi après un accès à un état, en conditionnant sur les suites finies de tirages déjà effectués et en utilisant l'indépendance des épreuves.

- 3) c) Montrer, en utilisant la partie I, que :

$$\forall j \in \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket, \quad \mu_j = \frac{2n + j\mu_{j-1}}{2n - j}.$$

- 3) d) En déduire que :

$$\forall j \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, \quad \mu_j = 2n \int_0^1 x^{2n-j-1} (2-x)^j dx.$$

4) Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

4) a) Écrire, en la justifiant, la relation liant X_k et $N_0, N_1, \dots, N_{k-1}$.

4) b) En déduire la relation liant m_k et $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}$.

4) c) Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j = x^{2n-k} \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}.$$

Les puissances d'exposant zéro sont égales à 1, y compris en $x = 0$.

4) d) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^{2n-k} \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)} dx$ est convergente.

5) En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad m_k = n \int_0^1 (1-t)^{2n-k} \frac{(1+t)^k - (1-t)^k}{t} dt.$$

Partie III : étude de deux cas particuliers

1) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_n , c'est-à-dire pour que, pour la première fois, les urnes contiennent le même nombre de boules.

- 1) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{2n}}{t} dt$ converge et vaut

$$\sum_{k=1}^{2n} 1/k.$$

On pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

- 1) b) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - (1-t^2)^n}{t} dt$ converge et vaut

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 1/k.$$

On pourra effectuer le changement de variable $s = t^2$.

- 1) c) En déduire que

$$m_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

- 2) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_{2n} , c'est-à-dire pour que, pour la première fois, l'urne V soit vide.

- 2) a) Pour tout entier naturel p , on pose $I_p = \int_0^1 \frac{(1+t)^p - (1-t)^p}{t} dt$. Vérifier que I_p est une intégrale convergente, puis calculer $I_p - I_{p-1}$ pour $p \geq 1$.

- 2) b) En déduire que

$$m_{2n} = n \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^k}{k}.$$