



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) Pour $x \in]0, 1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$. La fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est continue sur le segment $[x^2, x]$, puisque ce segment ne contient ni 0 ni 1. L'intégrale orientée entre x et x^2 est donc bien définie.

Aux deux extrémités, les valeurs $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln 2$ sont données séparément. Ainsi F est définie sur tout $[0, 1]$; ces valeurs ne signifient pas qu'on substitue directement 0 ou 1 dans l'intégrale initiale.

- 2) a. Sur $]0, 1[$, $\ln t < 0$ et la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ est dérivable, avec pour dérivée $1/(t \ln t)$. Pour $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln(-\ln(x^2)) - \ln(-\ln x) = \ln(-2 \ln x) - \ln(-\ln x) = \ln 2.$$

Les arguments des logarithmes sont tous strictement positifs.

- 2) b. Pour tenir compte de l'orientation des bornes et du signe du logarithme, écrivons :

$$F(x) = \int_{x^2}^x \frac{-dt}{\ln t} = \int_{x^2}^x t \frac{-dt}{t \ln t}.$$

Sur le segment, $x^2 \leq t \leq x$ et $-1/(t \ln t) > 0$. En multipliant puis en intégrant :

$$x^2 \int_{x^2}^x \frac{-dt}{t \ln t} \leq F(x) \leq x \int_{x^2}^x \frac{-dt}{t \ln t}.$$

Les deux intégrales communes valent $\ln 2$, d'après 2) a. Ainsi $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.

- 2) c. Sur $]0, 1[$, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ possède une primitive H . On peut la définir par une intégrale à partir d'un point fixe de cet intervalle. Alors $F(x) = H(x^2) - H(x)$; comme H est continue, F est continue sur $]0, 1[$.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, les deux bornes de 2) b. tendent vers 0, donc $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$.

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, elles tendent toutes deux vers $\ln 2$, donc $F(x) \rightarrow \ln 2 = F(1)$.

La continuité sur l'intervalle ouvert et aux deux extrémités établit que F est continue sur $[0, 1]$.

3) a. La primitive H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, avec $H'(t) = 1/\ln t$. La formule

$F(x) = H(x^2) - H(x)$ permet de dériver par composition :

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Tous les dénominateurs sont non nuls pour $x \in]0, 1[$. Cette preuve utilise une primitive et ne repose pas sur une dérivation sous le signe intégral.

3) b. La dérivabilité établie en 3) a. implique la continuité sur $]0, 1[$. Aux extrémités, l'encadrement de 2) b. donne $F(x) \rightarrow F(0)$ en 0^+ et $F(x) \rightarrow F(1)$ en 1^- .

On conclut de nouveau que F est continue sur $[0, 1]$. Le sujet demande ici la même conclusion qu'en 2) c. ; la dérivabilité fournit cette fois la continuité à l'intérieur de l'intervalle.

4) Posons $h(t) = (t-1)/\ln t$ pour $t \in]0, 1[$. Cette fonction est continue. En 0^+ , son numérateur tend vers -1 et son dénominateur vers $-\infty$, donc $h(t) \rightarrow 0$.

En 1^- , la dérivabilité de $\ln$ en 1 donne $\ln t/(t-1) \rightarrow 1$, donc $h(t) \rightarrow 1$. La fonction h se prolonge ainsi en une fonction continue sur $[0, 1]$. L'intégrale impropre converge aux deux extrémités, même absolument, puisque ce prolongement est continu sur un segment.

Pour $0 < a < b < 1$, la question 3) a. donne $h = F'$, donc $\int_a^b h(t) dt = F(b) - F(a)$. On peut passer aux limites $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow 1^-$, en utilisant la convergence de l'intégrale et la continuité de F :

$$I = F(1) - F(0) = \ln 2.$$

Exercice 2

1) a. Le produit matriciel donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a + d) \\ b(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $(a + d)M - (ad - bc)I$ a pour coefficients diagonaux $(a + d)a - ad + bc = a^2 + bc$ et $(a + d)d - ad + bc = d^2 + bc$, et pour coefficients hors diagonale $c(a + d)$ et $b(a + d)$.

Les quatre coefficients sont identiques : $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I$. Cette identité particulière a été vérifiée directement.

1) b. Posons $\delta = ad - bc$ et $s = a + d$.

Si $\delta \neq 0$, la question précédente donne $M(sI - M) = \delta I$. Les deux facteurs commutent, puisque $sI - M$ est un polynôme en M , donc $(sI - M)M = \delta I$ également. Ainsi M possède l'inverse $(sI - M)/\delta$.

Réciproquement, supposons $\delta = 0$ et M inversible. L'identité $M^2 = sM$ peut être multipliée par M^{-1} , ce qui donne $M = sI$. Ses coefficients sont alors $a = d = s$ et $b = c = 0$, donc $\delta = s^2$. Comme $\delta = 0$, $s = 0$, puis $M = 0$, ce qui contredit l'inversibilité.

Par conséquent, M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. La preuve utilise l'identité de 1) a. sans invoquer de critère général d'inversibilité par déterminant.

1) c. Lorsque $\delta \neq 0$, on explicite la matrice obtenue en 1) b. :

$$M^{-1} = \frac{sI - M}{\delta} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

2) a. On a $(\alpha I)^2 = \alpha^2 I$. Cette matrice vaut I si et seulement si $\alpha^2 = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

2) b. Supposons d'abord $M^2 = I$. L'identité de 1) a. donne $sM = (1 + \delta)I$.

Si $s \neq 0$, alors $M = ((1 + \delta)/s)I$ est scalaire. Étant involutive, elle serait égale à I ou $-I$ d'après 2) a., ce qui est exclu. Ainsi $s = 0$. L'égalité devient $0 = (1 + \delta)I$, donc $\delta = -1$.

Réciproquement, si $s = 0$ et $\delta = -1$, la question 1) a. donne $M^2 = 0M - (-1)I = I$. Donc, sous l'hypothèse $M \neq \pm I$, l'involution équivaut à $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3) a. Prenons $\alpha = 2$ et $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est ni I ni $-I$, sa somme diagonale vaut 0 et $3(-3) - 2(-4) = -1$.

Par 2) b., B est involutive. On a donc $A = 2I + B$ avec $B^2 = I$.

3) b. Méthode 1 — Binôme de deux matrices qui commutent.

Les matrices $2I$ et B commutent. Le binôme donne

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k.$$

Comme $B^2 = I$, $B^k = I$ pour k pair et $B^k = B$ pour k impair.

Notons s_n la somme des coefficients d'indices pairs et t_n celle des coefficients d'indices impairs. Les formules du binôme pour $(2 + 1)^n$ et $(2 - 1)^n$ donnent $s_n + t_n = 3^n$ et $s_n - t_n = 1$.

Ainsi $s_n = (3^n + 1)/2$ et $t_n = (3^n - 1)/2$, d'où :

$$A^n = \frac{3^n + 1}{2} I + \frac{3^n - 1}{2} B.$$

La formule vaut aussi pour $n = 0$, avec une somme impaire vide et $A^0 = I$.

Méthode 2 — Décomposition avec deux projecteurs.

Posons $H_+ = (I + B)/2$ et $H_- = (I - B)/2$. Le calcul utilisant $B^2 = I$ donne $H_+^2 = H_+$, $H_-^2 = H_-$, $H_+H_- = H_-H_+ = 0$ et $H_+ + H_- = I$.

On a $A = 3H_+ + H_-$. Pour $n \geq 1$, une récurrence utilisant les produits nuls donne $A^n = 3^n H_+ + H_-$. Pour $n = 0$, la même expression vaut $H_+ + H_- = I$.

En développant les deux projecteurs, on retrouve $A^n = ((3^n + 1)/2)I + ((3^n - 1)/2)B$. La première méthode regroupe les puissances paires et impaires ; la seconde sépare les deux composantes conservées par les projecteurs.

- 3) c. Comme $B^2 = I$, $(2I + B)(2I - B) = 4I - B^2 = 3I$, et les deux facteurs commutent. Ainsi A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{2I - B}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant n par -1 dans la formule de 3) b., on obtient :

$$\frac{3^{-1} + 1}{2}I + \frac{3^{-1} - 1}{2}B = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B = \frac{2I - B}{3} = A^{-1}.$$

La formule est donc bien valable pour $n = -1$.

Exercice 3

- 1) a. Les formules d'addition donnent $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$. En l'appliquant à $t = x/2^{n+1}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} \sin(x/2^{n+1}) = u_n \cos(x/2^{n+1}) \sin(x/2^{n+1}) = \frac{1}{2} u_n \sin(x/2^n) = \frac{1}{2} v_n.$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison $1/2$. Son premier terme vaut

$$v_0 = \cos x \sin x = \sin(2x)/2, \text{ donc } v_n = \sin(2x)/2^{n+1}.$$

- 1) b. Comme $x \in]0, \pi/2[$, $x/2^n \in]0, \pi/2[$ et $\sin(x/2^n) > 0$. On peut donc diviser l'égalité précédente par ce sinus :

$$u_n = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1} \sin(x/2^n)}.$$

La formule vaut également pour $n = 0$ et donne alors $u_0 = \cos x$.

- 1) c. Posons $t_n = x/2^n$. Alors $t_n \rightarrow 0^+$ et :

$$u_n = \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{t_n}{\sin t_n}.$$

La dérivabilité de $\sin$ en 0 donne $\sin t/t \rightarrow 1$. Comme $\sin t_n > 0$, $t_n/\sin t_n \rightarrow 1$. On en déduit la convergence de (u_n) et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

- 2) a. Code adapté en Python. Puisque $\cos x > 0$, les initialisations sont définies et donnent $a_0 = 1$, $b_0 = 1/\cos x$.

Supposons qu'avant un passage de boucle, les variables contiennent $a_{k-1} > 0$ et $b_{k-1} > 0$. La première affectation remplace a par leur moyenne, strictement positive. La seconde utilise cette nouvelle valeur de a et l'ancienne valeur de b , puis prend la racine carrée d'un produit positif. Les deux nouvelles valeurs sont donc définies et positives.

Par récurrence, les initialisations et les n passages calculent successivement les couples d'indices $0, 1, \dots, n$. Le programme affiche le dernier couple. Pour $n = 0$, la boucle est vide et le couple initial est affiché.

Code complet exécuté :

Python

```
import numpy as np

x = float(input("Entrez x, avec 0 < x < pi/2 : "))
```

```
n = int(input("Entrez un entier n >= 0 : "))
a = 1.0
b = 1.0 / np.cos(x)
for k in range(1, n + 1):
    a = (a + b) / 2
    b = np.sqrt(a * b)
print(a, b)
```

La borne supérieure de range est exclue : range(1, n + 1) effectue bien n passages. Le calcul de b reste successif, comme dans le programme initial. Les essais numériques ne remplacent pas les démonstrations sur les suites.

2) b. Le premier passage donne $a_1 = (1 + 1/\cos x)/2$ et $b_1 = \sqrt{a_1 b_0}$. Ainsi :

$$b_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x}}.$$

Les formules d'addition et $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ donnent $\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1$, donc $(1 + \cos x)/2 = \cos^2(x/2)$.

Comme $\cos(x/2) > 0$ et $\cos x > 0$, on obtient $b_1 = \cos(x/2)/\cos x$.

2) c. La lecture successive des affectations donne, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}.$$

Dans la seconde relation, c'est bien a_n qui intervient, et non a_{n-1} .

2) d. On a $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 1/\cos x > 0$. Si $a_{n-1}, b_{n-1} > 0$, leur moyenne a_n est strictement positive, puis $a_n b_{n-1} > 0$ et $b_n > 0$.

Par récurrence, les deux suites sont définies et strictement positives à tous les rangs.

3) a. La positivité permet d'écrire $b_n = \sqrt{a_n} \sqrt{b_{n-1}}$. Pour $n \geq 1$, on rationalise la différence :

$$b_n - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{\sqrt{a_n}(b_{n-1} - a_n)}{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. D'après 2) c., $b_{n-1} - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$.

Ainsi :

$$b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1}).$$

- 3) b. Comme $0 < \cos x < 1$, $a_0 = 1 < b_0 = 1/\cos x$. Le facteur devant $b_{n-1} - a_{n-1}$ dans 3) a. est strictement positif.

Si $b_{n-1} - a_{n-1} > 0$, cette relation donne $b_n - a_n > 0$. Par récurrence, $a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 3) c. Pour $n \geq 1$, on a $a_n - a_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1})/2 > 0$. La suite (a_n) est donc strictement croissante.

Comme $a_{n-1} < b_{n-1}$, leur moyenne vérifie $a_n < b_{n-1}$. La positivité donne $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} < \sqrt{b_{n-1}^2} = b_{n-1}$. Ainsi (b_n) est strictement décroissante.

- 3) d. Posons $d_n = b_n - a_n > 0$. Le facteur de 3) a. est positif et inférieur à $1/2$, puisque $\sqrt{a_n} < \sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}$. Donc $0 < d_n \leq d_{n-1}/2$.

Pour $n = 0$, $d_0 = 1/\cos x - 1 > 0$. Une récurrence donne $d_n \leq 2^{-n}d_0$. Ainsi :

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right).$$

- 3) e. Pour tout n , les variations et l'ordre donnent $1 = a_0 \leq a_n < b_n \leq b_0$. La suite (a_n) est croissante et majorée, donc converge vers un réel ℓ_a . La suite (b_n) est décroissante et minorée, donc converge vers un réel ℓ_b .

La question 3) d. et l'encadrement donnent $b_n - a_n \rightarrow 0$, donc $\ell_b - \ell_a = 0$. Les suites ont la même limite $\ell = \ell_a = \ell_b$. Ce sont des suites adjacentes.

- 4) a. On procède par récurrence simultanée sur les deux formules. Pour $n = 0$, $u_0 = \cos x$, donc :

$$\frac{u_0 \cos x}{\cos^2 x} = 1 = a_0, \quad \frac{u_0}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = b_0.$$

Supposons les formules vraies au rang n . Posons $t = x/2^{n+1}$, donc $x/2^n = 2t$. La relation sur a_{n+1} et l'identité démontrée en 2) b. donnent :

$$a_{n+1} = \frac{u_n}{2 \cos^2 x} (1 + \cos(2t)) = \frac{u_n \cos^2 t}{\cos^2 x} = \frac{u_{n+1} \cos t}{\cos^2 x}.$$

Pour la seconde suite :

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} = \sqrt{\frac{u_n^2 \cos^2 t}{\cos^4 x}} = \frac{u_n \cos t}{\cos^2 x} = \frac{u_{n+1}}{\cos^2 x}.$$

La racine se simplifie sans valeur absolue supplémentaire, car $u_n > 0$ et $\cos t > 0$. La positivité de u_n découle de $u_0 = \cos x > 0$ et de sa récurrence dont tous les facteurs cosinus sont positifs.

Les deux formules sont donc vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) b. Comme $\cos^2 x > 0$ est constant, la formule de b_n et 1) c. donnent :

$$\ell = \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

En utilisant $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, on simplifie :

$$\ell = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\tan x}{x}.$$

La formule de a_n donne la même limite, puisque $\cos(x/2^n) \rightarrow 1$.

Problème

Partie I

- 1) a. Question adaptée au programme actuel : les coefficients de M sont définis par les règles de transition, même lorsqu'une position a une probabilité nulle à l'instant considéré. Une probabilité conditionnelle n'est utilisée que lorsque l'événement conditionnant est de probabilité strictement positive.

La colonne d'indice $j + 1$ donne les probabilités d'arrivée en 0, 1, 2, 3 à partir de la position j . À partir de 0, on arrive certainement en 1 ; à partir de 1, on arrive en 0 ou 2 avec probabilité $1/2$; à partir de 2, on arrive en 1 ou 3 avec probabilité $1/2$; à partir de 3, on reste en 3. Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.

- 1) b. Pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, notons $m_{i,j}$ la probabilité de transition de j vers i , située à la ligne $i + 1$, colonne $j + 1$. Si $P(X_n = j) > 0$, la règle de déplacement donne :

$$P(X_n = j, X_{n+1} = i) = P(X_n = j)m_{i,j}.$$

Si $P(X_n = j) = 0$, les deux membres sont nuls, donc cette égalité reste vraie sans avoir à définir une probabilité conditionnelle sur cet événement.

Les quatre événements $\{X_n = j\}$ forment un système complet d'événements. Par disjonction :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^3 m_{i,j}P(X_n = j).$$

Ces quatre égalités sont exactement les quatre lignes de $U_{n+1} = MU_n$.

- 2) a. Pour chercher un vecteur propre $v = {}^t(a, b, c, d)$ associé à un réel λ , on résout $Mv = \lambda v$, soit :

$$\frac{b}{2} = \lambda a, \quad a + \frac{c}{2} = \lambda b, \quad \frac{b}{2} = \lambda c, \quad \frac{c}{2} + d = \lambda d.$$

Pour $\lambda = 0$, on obtient $b = 0, c = -2a, d = a$. Le vecteur $v_0 = {}^t(1, 0, -2, 1)$ est donc un vecteur propre non nul, et l'espace propre associé est $\mathbb{R}v_0$.

Pour $\lambda = 1$, les première et troisième équations donnent $a = c = b/2$. La deuxième impose alors $3b/4 = b$, donc $b = a = c = 0$. Le réel d est libre : $v_1 = {}^t(0, 0, 0, 1)$ est un vecteur propre et l'espace propre est $\mathbb{R}v_1$.

Pour $\lambda = \sqrt{3}/2$ ou $\lambda = -\sqrt{3}/2$, on a $\lambda \neq 0, 1$. Les première et troisième équations donnent $c = a$ et $b = 2\lambda a$. La deuxième équation est satisfaite puisque $2\lambda^2 = 3/2$. La dernière impose $d = a/[2(\lambda - 1)]$. Pour chacune des deux valeurs, cela donne respectivement :

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont non nuls et les espaces propres associés sont leurs droites engendrées. Les quatre réels demandés sont donc bien des valeurs propres de M .

- 2) b. Les quatre valeurs propres précédentes sont distinctes. Les quatre vecteurs propres correspondants sont donc linéairement indépendants. Ils forment une base de $\mathbb{R}^4$, ce qui justifie l'inversibilité de la matrice ayant ces vecteurs pour colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 - \sqrt{3} & -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ce choix respecte la normalisation demandée. Dans la première droite propre, les vecteurs sont ${}^t(a, 0, -2a, a)$: deux coefficients peuvent valoir 1, en choisissant $a = 1$, mais pas trois. Dans la deuxième, seul le dernier coefficient peut valoir 1.

Dans chacune des deux dernières droites, le vecteur est un multiple de v_+ ou de v_- . Les première et troisième coordonnées sont égales ; les deux autres sont distinctes l'une de l'autre et distinctes de 1. On peut donc obtenir deux coefficients égaux à 1 par le choix effectué, mais pas davantage. Chaque colonne contient ainsi le nombre maximum possible de coefficients égaux à 1.

Les relations sur les colonnes donnent $MP = PD$, avec le D de l'énoncé. En multipliant à droite par P^{-1} , on conclut que $M = PDP^{-1}$.

2) c. Notons Q la matrice proposée. Pour un vecteur ${}^t(a, b, c, d)$, son image est :

$$Q \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - c)/3 \\ a + b + c + d \\ (2a + \sqrt{3}b + c)/6 \\ (2a - \sqrt{3}b + c)/6 \end{pmatrix}.$$

En appliquant cette expression aux colonnes de P , on obtient :

$$Qv_0 = \begin{pmatrix} (1 + 2)/3 \\ 1 - 2 + 1 \\ (2 - 2)/6 \\ (2 - 2)/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Qv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$Qv_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \sqrt{3} + 1 - 2 - \sqrt{3} \\ (2 + 3 + 1)/6 \\ (2 - 3 + 1)/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$Qv_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \sqrt{3} + 1 - 2 + \sqrt{3} \\ (2 - 3 + 1)/6 \\ (2 + 3 + 1)/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $QP = I_4$. Puisque P est inversible, on a $Q = P^{-1}$, ce qui vérifie la formule donnée.

2) d. Pour $n = 0$, $M^0 = I_4 = PD^0P^{-1}$. Si $M^n = PD^nP^{-1}$, alors :

$$M^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La formule $M^n = PD^nP^{-1}$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

La première colonne de M^0 est $e_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$. Posons $\rho = \sqrt{3}/2$. Pour $n \geq 1$, on a $D^n = \text{diag}(0, 1, \rho^n, (-\rho)^n)$ et :

$$P^{-1}e_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad D^n P^{-1}e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \rho^n/3 \\ (-\rho)^n/3 \end{pmatrix}.$$

En multipliant par P , la première colonne de M^n est donc, pour $n \geq 1$:

$$M^n e_0 = \begin{pmatrix} (\rho^n + (-\rho)^n)/3 \\ \sqrt{3}(\rho^n - (-\rho)^n)/3 \\ (\rho^n + (-\rho)^n)/3 \\ 1 - ((2 + \sqrt{3})\rho^n + (2 - \sqrt{3})(-\rho)^n)/3 \end{pmatrix}.$$

Le cas $n = 0$ est traité séparément pour ne pas remplacer à tort la première valeur diagonale de D^0 par 0.

- 2) e. Le mobile part de 0 avec certitude, donc $U_0 = e_0$. Par la relation de 1) b. et une récurrence, $U_n = M^n U_0 = M^n e_0$.

Les quatre coefficients calculés en 2) d. donnent la loi de X_n . On peut la présenter plus simplement en distinguant la parité. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $q_m = (3/4)^m$.

Instant	$P(X_n = 0)$	$P(X_n = 1)$	$P(X_n = 2)$	$P(X_n = 3)$
$n = 0$	1	0	0	0
$n = 2m, m \geq 1$	$2q_m/3$	0	$2q_m/3$	$1 - 4q_m/3$
$n = 2m + 1, m \geq 0$	0	q_m	0	$1 - q_m$

En effet, $\rho^{2m} = q_m$ et $(-\rho)^{2m} = q_m$. Pour un exposant impair, $(-\rho)^{2m+1} = -\rho^{2m+1}$ et $2\sqrt{3}\rho/3 = 1$, ce qui donne les deux dernières lignes.

Ces masses sont positives ou nulles et leur somme vaut 1. Pour les instants pairs strictement positifs, $q_m \leq 3/4$ assure notamment $1 - 4q_m/3 \geq 0$. Enfin $q_m \rightarrow 0$, donc $P(X_n = 3) \rightarrow 1$.

Partie II

- 1) a. Question adaptée au programme actuel : la convention $Y = 0$ sur les trajectoires qui n'atteignent jamais C définit une variable aléatoire réelle partout. On montrera en 1) c. que ces trajectoires ont une probabilité nulle.

Pour $j \geq 3$, l'égalité $Y = j$ signifie que le mobile n'est pas en C aux instants $0, 1, \dots, j-1$ et qu'il s'y trouve à l'instant j . Cette condition est également suffisante pour que j soit le premier instant d'arrivée en C . Ainsi :

$$\{Y = j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\} \right] \cap \{X_j = 3\}.$$

Il faut au moins trois déplacements pour aller de 0 à 3, puisque le chemin le plus court est 0, 1, 2, 3.

- 1) b. Si $X_{j-1} \neq 3$ et $X_j = 3$, la position à l'instant $j-1$ est 0, 1 ou 2. Les règles de déplacement excluent une arrivée en 3 depuis 0 ou 1. La position précédente est donc nécessairement 2.

Réciproquement, si $X_{j-1} = 2$ et $X_j = 3$, alors $X_{j-1} \neq 3$. On a ainsi l'égalité d'événements :

$$\{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j = 3\} = \{X_{j-1} = 2\} \cap \{X_j = 3\}.$$

- 1) c. Comme C est absorbant, une trajectoire passée par C ne peut plus être en 2. Par conséquent :

$$\{X_{j-1} = 2\} \subset \bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}.$$

En utilisant 1) a. et 1) b., on peut donc supprimer ces conditions supplémentaires :

$$\{Y = j\} = \{X_{j-1} = 2\} \cap \{X_j = 3\} \quad (j \geq 3).$$

La probabilité de la transition de 2 vers 3 vaut $1/2$. L'égalité de probabilités conjointes établie en partie I, 1) b., donne, même lorsque $P(X_{j-1} = 2) = 0$:

$$P(Y = j) = \frac{1}{2}P(X_{j-1} = 2).$$

Pour $j = 2m + 1$ avec $m \geq 1$, la loi de X_{2m} donne :

$$P(Y = 2m + 1) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^m = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}.$$

Pour $j \geq 4$ pair, $j - 1$ est impair et $P(X_{j-1} = 2) = 0$, donc $P(Y = j) = 0$. Les masses en 1 et 2 sont également nulles, puisqu'il faut au moins trois déplacements.

Il reste à traiter les trajectoires qui n'atteignent jamais C . Posons $E_n = \{X_n \neq 3\}$.

L'absorption assure $E_{n+1} \subset E_n$, et $\bigcap_{n \geq 0} E_n$ est précisément l'événement de non-arrivée en C . Par continuité décroissante des probabilités et par la partie I, 2) e. :

$$P\left(\bigcap_{n \geq 0} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = 0.$$

Donc $P(Y = 0) = 0$. La loi complète de Y est ainsi concentrée sur $\{3, 5, 7, \dots\}$, avec les masses ci-dessus. Leur somme vaut bien :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 3/4} = 1.$$

1) d. Méthode 1 — Reconnaître une loi géométrique.

Posons $W = (Y - 1)/2$. Presque sûrement, W prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour $m \geq 1$, $P(W = m) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}$. La valeur de W sur l'événement négligeable $\{Y = 0\}$ ne modifie pas sa loi. Ainsi W suit une loi géométrique de paramètre $1/4$.

Cette loi admet une espérance finie $E(W) = 4$. Comme $Y = 2W + 1$, Y admet une espérance et :

$$E(Y) = 2E(W) + 1 = 9.$$

Méthode 2 — Calculer directement la série d'espérance.

La variable Y est positive ou nulle. La série d'espérance est donc une série à termes

positifs. Pour $q = 3/4$, les séries géométriques usuelles donnent

$$\sum_{m \geq 1} q^{m-1} = 1/(1-q)$$

et

$$\sum_{m \geq 1} mq^{m-1} = 1/(1-q)^2,$$

toutes deux convergentes puisque $0 < q < 1$. On obtient :

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \frac{1}{4} q^{m-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{4} (32 + 4) = 9.$$

La convergence de cette série justifie l'existence de l'espérance et donne $E(Y) = 9$. La première méthode utilise directement une loi usuelle ; la seconde calcule à partir des masses et s'applique également lorsqu'on ne reconnaît pas immédiatement une loi. Le nombre moyen de déplacements nécessaires pour atteindre C est donc 9.

- 2) a. Le point B n'est pas absorbant : le mobile peut atteindre B , revenir en A , puis atteindre une nouvelle fois B . Les seuls événements $\{X_{j-1} = 1\}$ et $\{X_j = 2\}$ ne permettent donc pas de savoir s'il s'agit d'une première arrivée.

Par exemple, la trajectoire $0, 1, 2, 1, 2$ a une probabilité $1 \times (1/2)^3 = 1/8$. Elle vérifie $X_3 = 1$ et $X_4 = 2$, mais $Z = 2$, et non 4. L'égalité proposée est donc fausse pour $j = 4$.

- 2) b. Question adaptée au programme actuel : on a posé $Z = 0$ lorsque le mobile n'atteint jamais B . Cette convention sera sans effet sur sa loi, car cet événement est négligeable.

Avant la première arrivée en B , le mobile ne peut pas être en C , car toute arrivée en C exige un passage par B . Il reste donc dans $\{O, A\}$ et alterne entre ces deux points. Pour atteindre B pour la première fois à l'instant $2j$, avec $j \geq 1$, il doit revenir de A vers O lors

des $j - 1$ premières occasions, puis aller de A vers B lors de la j -ième. Ainsi :

$$\{Z = 2j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_{2k} = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_{2k+1} = 1\} \right] \cap \{X_{2j} = 2\}.$$

Cette trajectoire est nécessaire et suffisante pour que la première arrivée en B ait lieu à cet instant. Les transitions de O vers A sont certaines, et chacune des j transitions imposées à partir de A a une probabilité $1/2$ conditionnellement à l'historique. La formule des probabilités composées donne :

$$P(Z = 2j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad (j \geq 1).$$

Il n'est pas nécessaire de supposer indépendantes les positions du mobile : ce produit repose sur les probabilités conditionnelles successives spécifiées dans l'énoncé.

Notons H_j l'événement de non-arrivée en B durant les $2j$ premiers déplacements. Il correspond aux j choix successifs de retour de A vers O , donc $P(H_j) = 2^{-j}$. Les événements H_j sont décroissants et leur intersection est l'événement de non-arrivée en B . La continuité décroissante donne une probabilité égale à $\lim_{j \rightarrow \infty} 2^{-j} = 0$ pour cette intersection.

Par la convention de définition, $P(Z = 0) = 0$. La formule pour tous les $j \in \mathbb{N}$ est donc $P(Z = 2j) = 2^{-j}$ si $j \geq 1$, et $P(Z = 0) = 0$ si $j = 0$.

2) c. Avant la première arrivée en B , les positions aux instants pairs sont O et celles aux instants impairs sont A . La première transition vers B se fait depuis A , donc nécessairement à un instant pair. On en déduit :

$$P(Z = 2j + 1) = 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Avec 2) b., la loi complète est concentrée sur $\{2, 4, 6, \dots\}$, et

$$\sum_{j \geq 1} 2^{-j} = 1,$$

ce qui contrôle sa normalisation.

2) d. Méthode 1 — Reconnaître une loi géométrique.

La variable $V = Z/2$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$, puisque

$P(V = j) = 2^{-j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$ pour $j \geq 1$ et que les autres masses sont nulles. Elle admet donc une espérance finie $E(V) = 2$. Comme $Z = 2V$, la variable Z admet une espérance et :

$$E(Z) = 2E(V) = 4.$$

Méthode 2 — Calculer directement la série d'espérance.

La série

$$\sum_{j \geq 1} j(1/2)^{j-1}$$

converge et sa somme est $1/(1 - 1/2)^2 = 4$. Donc la série d'espérance de Z , à termes positifs, converge et :

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} 2j 2^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 4.$$

Comme pour Y , la reconnaissance d'une loi usuelle fournit rapidement l'existence et la valeur de l'espérance, tandis que la série permet de les vérifier directement à partir de la loi. Le nombre moyen de déplacements nécessaires pour atteindre B est 4.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, 2) a. à 2) d. : l'algorithme d'origine est transcrit en Python avec NumPy. Les affectations successives sont conservées : le calcul de b_n utilise la nouvelle valeur a_n . La boucle effectue exactement n itérations, y compris aucune pour $n = 0$; les résultats mathématiques sont inchangés.

- Problème, partie I, 1) a. et 1) b. : la matrice est définie par les probabilités de transition fixées par les règles du déplacement. Son identification à des probabilités conditionnelles est réservée aux événements conditionnants de probabilité non nulle. Les règles sont précisées conditionnellement à tout historique, ce qui justifie les probabilités composées employées en partie II.
- Problème, partie II, 1) a. à 1) d. et 2) a. à 2) d. : les temps de première arrivée sont définis par la convention $Y = 0$ ou $Z = 0$ sur les trajectoires qui n'atteignent jamais le point visé. Ces événements sont démontrés négligeables ; les lois et les espérances de première arrivée sont donc inchangées. Pour 2) b., l'expression de l'événement est donnée pour $j \geq 1$, et le cas $j = 0$ est traité séparément.