



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Préliminaire : on rappelle que, si (u_n) est une suite réelle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \varepsilon$.

En déduire que, si une suite réelle (u_n) converge vers une limite a strictement positive, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq a/2$.

Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction f définie, pour tout réel x , par $f(x) = x(1 - x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Étudier les variations de f .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .
 b) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = nu_n$. Montrer que (v_n) est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0, 1]$.
 c) Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge et que sa limite vaut $L(1 - L)$.
- 3) On suppose $L \neq 1$. Montrer, en utilisant le préliminaire, qu'il existe un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1 - L)}{2n}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- 4) Montrer à l'aide de la question 2)b) que $u_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Partie I

E désigne un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$. On note id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul. Soit s un endomorphisme involutif de E , c'est-à-dire vérifiant $s \circ s = \text{id}$.

- 1) Justifier que s est bijectif et déterminer s^{-1} .
- 2) Déterminer les seules valeurs propres possibles de s .

On suppose dans la suite de cette partie que $s \neq \text{id}$ et $s \neq -\text{id}$.

- 3) a) Montrer que $(s - \text{id}) \circ (s + \text{id}) = \theta$.
- b) En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s .
- 4) Montrer que $E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$.

On montrera dans un premier temps que, si $x = u + v$, avec $u \in \text{Ker}(s - \text{id})$ et $v \in \text{Ker}(s + \text{id})$, alors nécessairement $s(x) = u - v$.

L'endomorphisme s est appelé la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id})$.

Partie II : étude d'un exemple

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n . On note S l'ensemble de ses matrices symétriques et A celui de ses matrices antisymétriques.

Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on rappelle que M est symétrique si et seulement si $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour tous i, j , et antisymétrique si et seulement si $m_{i,j} = -m_{j,i}$ pour tous i, j .

Dans la suite, ${}^tM$ désigne la transposée de M .

- 1) Vérifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
- 3) On note T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à chaque matrice sa transposée. Montrer que T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A .

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif.

Partie I

- 1) Soient des réels $a_{k,j}$, avec $k, j \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout j , la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$$

converge. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}.$$

- 2) Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. On pose $K_+ = \{k \in \mathbb{N} : P(X = k) > 0\}$.

Pour tout $k \in K_+$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant $X = k$ par :

$$E(S \mid X = k) = \sum_{j=0}^n jP(S = j \mid X = k).$$

Montrer, en utilisant la première question, que la série suivante converge et que :

$$E(S) = \sum_{k \in K_+} E(S \mid X = k) P(X = k).$$

Partie II

Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. À chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez-de-chaussée est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

Aucun arrêt n'est dû à une personne désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée. Conditionnellement au nombre de passagers, chacun choisit son étage d'arrivée uniformément parmi les n étages et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

Pour tout entier naturel k , on appelle S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsqu'il contient k passagers au départ.

1) Montrer que, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n} P(S_k = j-1).$$

2) En déduire que $E(S_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(S_k)$.

3) Après avoir justifié que $E(S_0) = 0$, déterminer $E(S_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) Si S désigne le nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné, montrer que :

$$E(S) = n(1 - e^{-\lambda/n}).$$

Problème

Les lettres p et n désignent deux entiers naturels non nuls.

Partie I

On pose $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$ et

$$v_n = \sum_{p=1}^n u_p.$$

1) a) Prouver que, pour tout $p \geq 1$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

b) En déduire que $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante, puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ appartient à $[0, 1]$. On note désormais

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

2) a) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{p+x} dx$.

b) En déduire que, pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

c) À l'aide de cette dernière inégalité, établir que $\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$.

- 3) Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

Partie II

Dans cette partie, k est un entier supérieur ou égal à un. On pose, pour tout réel $t > 0$, $f_0(t) = \frac{1}{t}$ et $f_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+k)}$.

- 1) Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = kf_k(t)$.

- 2) En déduire que

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k(n+k)!}.$$

Partie III

On note P_k le polynôme défini par $P_1(t) = t$ et, pour tout $k \geq 2$, $P_k(t) = t(1-t)(2-t)\cdots(k-1-t)$. On pose $a_k = \int_0^1 P_k(t) dt$.

- 1) a) Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$\frac{1}{p+x} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \frac{1-x}{p+x}.$$

- b) En déduire que $u_p = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x} dx$.

- 2) a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$:

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}.$$

b) En déduire, par récurrence sur k , que :

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1) \cdots (p+k)} \\ + \frac{1}{p(p+1) \cdots (p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx.$$

c) Montrer que, pour tout $p \geq 2$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx \leq \frac{a_{k+1}}{p-1}.$$

d) En déduire, en utilisant la partie II, que, pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 1$:

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2) \cdots (n+k)} + r_{n,k},$$

avec $0 \leq r_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1) \cdots (n+k)}.$

e) Construire une suite $(v_{n,k})_{n \geq 1}$ de limite γ telle que :

$$0 \leq \gamma - v_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1) \cdots (n+k)}.$$

3) a) Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 .

b) Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

c) Écrire en Python un algorithme permettant de calculer v_{n_0} , puis $v_{n_0,3}$.

d) Donner la valeur de γ à 10^{-5} près.