



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifféremment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}.$$

- 1) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.
- 2) Montrer que, si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{n}{2^n}$ et $c_n = \frac{n^2}{2^n}$, les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.
- 3) Montrer que, si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera

$$s(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

- 4) Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.
- 5) Montrer que $s : u \mapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } s$?
- 6) Déterminer $\text{Ker } s$.

Exercice 2

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n dt.$$

- 1) Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
- 2) a) Calculer I_0 .
- 2) b) Pour $n \geq 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n , et trouver une relation entre I_n et I_{n-1} .
- 2) c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et de α .
- 3) a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

- 3) b) En déduire que :

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq K I_{2n+1},$$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n .

- 3) c) En déduire :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right).$$

4) On pose, pour tout réel x , $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

4) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

4) b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \text{Arctan}(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

4) c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α , utilisant la fonction Arctan .

Exercice 3

La notation $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux nombres réels a et b .

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions φ_n et F_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \min(\varphi_n(x), 1) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) On suppose la constante $n \geq 1$ déjà définie. Recopier, en la complétant, la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur $F_n(x)$. On calculera $y = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ par l'algorithme de Horner.

Python

```
def F(x):
    if x < 0:
        return ...
    else:
        y = 0
        for k in range(..., ..., ...):
            y = ...
        if y <= 1:
            return ...
        else:
            return ...
```

- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'un nombre réel positif x_n unique tel que $\varphi_n(x_n) = 1$.
- 2) b) Exprimer $F_n(x)$ sans utiliser le symbole min selon que $x \in [0, x_n]$ ou $x \in [x_n, +\infty[$.
- 2) c) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité X_n .
- 2) d) Que vaut $P(X_n \leq 0)$? Que vaut $P(X_n \geq 1)$?
- 3) a) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel μ_n tel que $F_n(\mu_n) = \frac{1}{2}$.
- 3) b) μ_n est une grandeur caractéristique de la variable aléatoire X_n . Quel est son nom?
- 4) Comparer $F_{n+1}(\mu_n)$ à $F_{n+1}(\mu_{n+1})$, et en déduire le sens de variation, puis la convergence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 5) a) Calculer $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$ pour $x \in [0, 1[$, et calculer le nombre $L \in [0, 1[$ tel que $\varphi(L) = 1$.

- 5) b) En déduire, selon que $x < 0$, $0 \leq x \leq L$ ou $x > L$, la valeur de $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$, et déterminer le seul nombre réel ℓ tel que $F(\ell) = \frac{1}{2}$.
- 5) c) Montrer sans calcul que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n(\ell) < \frac{1}{2}$.
- 5) d) Montrer aussi que, si $\varepsilon > 0$, on a, pour n suffisamment grand, $F_n(\ell + \varepsilon) > \frac{1}{2}$.
- 5) e) Dédire de ce qui précède la limite de la suite (μ_n) .

Problème

Données et objectifs du problème

p désigne un nombre réel fixé tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

On étudie le mouvement dans le plan d'un mobile M partant de l'origine et se déplaçant indéfiniment d'un point à l'autre de l'ensemble des points du plan à coordonnées (x, y) entières telles que $y \geq 0$ et $0 \leq x \leq 2$.

On appellera « chemin » l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) sont des entiers et vérifient $x \in \{0, 1\}$ et $y \geq 0$.

Le mouvement est une succession de « pas ». Si le mobile se trouve à un instant donné au point de coordonnées (x, y) , le pas suivant le mènera au point (x', y') selon la règle suivante :

- Si $x = 0$, avec la probabilité p , $x' = 0$ et $y' = y + 1$; avec la probabilité q , $x' = 1$ et $y' = y$.
- Si $x = 1$, avec la probabilité p , $x' = 1$ et $y' = y + 1$; avec la probabilité $\frac{q}{2}$, $x' = 0$ et $y' = y$; avec la probabilité $\frac{q}{2}$, $x' = 2$ et $y' = y$.
- Si $x = 2$, c'est-à-dire si le mobile est hors du chemin, alors $x' = 2$ et $y' = y + 1$.

À chaque pas, les probabilités indiquées sont les probabilités conditionnelles sachant les positions précédentes ; elles ne dépendent que de la position actuelle.

On note respectivement X_n et Y_n l'abscisse et l'ordonnée du mobile à l'issue du n -ième pas. À titre d'exemple, les événements $(X_0 = 0)$ et $(Y_0 = 0)$ sont certains.

Partie 1 — Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire

On dispose d'une fonction Python `hasard()`, sans paramètre et à valeurs entières, qui retourne aléatoirement les valeurs $-1, 0$ et 1 respectivement avec les probabilités $\frac{q}{2}, p$ et $\frac{q}{2}$. Ses appels successifs sont indépendants.

Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule le cheminement du mobile M en affichant les coordonnées (x, y) de ses positions successives jusqu'à ce que son abscisse prenne pour la première fois la valeur 2 , c'est-à-dire jusqu'à la sortie du chemin. La commande `print(x, y)` affiche les deux coordonnées.

Python

```
def simulation():
    x = 0
    y = 0
    while x < 2:
        h = hasard()
        ...
        print(x, y)
```

Partie 2 — Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet sur le chemin

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & q/2 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) a) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A . Quelle est la valeur propre associée ?

1) b) Montrer que $p + \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A . Déterminer un vecteur propre v relatif à cette valeur propre et dont la première composante est 1.

1) c) Montrer que $p - \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A . Déterminer un vecteur propre w relatif à cette valeur propre et dont la première composante est 1.

1) d) En déduire une matrice inversible Π telle que la matrice $A' = \Pi^{-1} A \Pi$ soit diagonale. Expliciter A' .

1) e) Résoudre le système

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire le produit $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) f) Calculer explicitement la première colonne de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Justifier de façon précise :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1} = 0) \\ P(X_{n-1} = 1) \\ P(X_{n-1} = 2) \end{pmatrix}.$$

2) b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

3) a) Calculer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2)$. Avez-vous une justification intuitive du résultat ?

3) b) Donner un équivalent de la forme ab^n de $\ell - P(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On note T la durée du trajet sur le chemin, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que $X_n = 2$; on pose $T = +\infty$ si un tel entier n'existe pas.

4) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 2)$.

4) b) Déterminer la loi de probabilité de T .

4) c) Calculer l'espérance mathématique de T .

Partie 3 — Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue sur le chemin

Dans cette partie, $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel a .

1) a) On pose $y = n - 2k$. Déterminer, en fonction de l'entier k compris entre 0 et $\lfloor n/2 \rfloor$, la probabilité que M parvienne en $(0, n - 2k)$ en effectuant n pas le long d'un itinéraire donné, itinéraire constitué d'une succession de $n - 2k$ pas vers le haut et

d'un nombre égal de pas vers la droite et de pas vers la gauche, dans un ordre déterminé.

- 1) b) y désignant maintenant un entier naturel quelconque, déterminer le nombre d'itinéraires possibles menant de O à $(0, y)$ en n pas. On aura soin de distinguer deux cas : $n - y$ impair ou strictement négatif ; $n - y$ pair et positif ou nul.
- 1) c) En déduire, en distinguant toujours ces deux cas, la valeur de $P((X_n = 0) \cap (Y_n = y))$.
- 2) Déterminer de même la valeur de $P((X_n = 1) \cap (Y_n = y))$.
- 3) Dans cette question, on cherche à retrouver la loi de probabilité marginale de X_n à partir de la loi conjointe du couple (X_n, Y_n) .
- 3) a) Justifier très précisément l'égalité :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} P((X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k)).$$

- 3) b) Retrouver ainsi la valeur de $P(X_n = 0)$.
- 3) c) Retrouver de la même façon la valeur de $P(X_n = 1)$.
- 4) On note D la variable aléatoire égale à la « distance parcourue sur le chemin », c'est-à-dire la valeur prise par Y_t , où t désigne le plus petit des entiers n tels que $X_n = 2$. Cette variable est définie presque sûrement, la sortie ayant lieu presque sûrement.
- 4) a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de D ?

4) b) Montrer que, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$(D = m) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)].$$

4) c) Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P(D = m) = \frac{p^m}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(m+1+2k)!}{(1+2k)!} \left(\frac{q^2}{2}\right)^{1+k}.$$

4) d) Calculer cette probabilité pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$.