



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) On utilise les trois premières valeurs d'une suite pour la déterminer par la relation de récurrence.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel : il contient la suite nulle, et la relation qui le définit est préservée par toute combinaison linéaire.

L'application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3, u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$, est linéaire. Si $\varphi(u) = 0$, les trois premiers termes sont nuls ; la relation de récurrence entraîne successivement que tous les autres termes le sont. Son noyau est donc réduit à la suite nulle : φ est injective.

Réciproquement, pour chaque triplet $(r_0, r_1, r_2) \in \mathbb{R}^3$, on définit une suite en prenant $u_0 = r_0, u_1 = r_1, u_2 = r_2$, puis en utilisant la relation de récurrence pour définir successivement $u_3, u_4, \dots$. Cette suite appartient à $\mathcal{E}$ et a pour image le triplet prescrit. Ainsi φ est surjective.

L'application φ est un isomorphisme, d'où $\dim \mathcal{E} = 3$.

- 2) Méthode 1 — Vérification de la récurrence et indépendance des valeurs initiales.

Pour une suite de la forme $u_n = P(n)/2^n$, la relation de récurrence équivaut, après multiplication par 2^{n+3} , à :

$$P(n+3) - 3P(n+2) + 3P(n+1) - P(n) = 0.$$

Pour $P(n) = 1$, le membre de gauche vaut $1 - 3 + 3 - 1 = 0$. Pour $P(n) = n$, il vaut $(n+3) - 3(n+2) + 3(n+1) - n = 0$. Pour $P(n) = n^2$, le développement donne :

$$(n^2 + 6n + 9) - 3(n^2 + 4n + 4) + 3(n^2 + 2n + 1) - n^2 = 0.$$

Ainsi $a, b, c \in \mathcal{E}$.

Supposons $Aa + Bb + Cc = 0$. Aux indices 0, 1 et 2, on obtient respectivement $A = 0$, $(A + B + C)/2 = 0$ et $(A + 2B + 4C)/4 = 0$. Donc $B + C = 0$ et $2B + 4C = 0$, puis $C = 0$ et $B = 0$.

La famille (a, b, c) est libre et comporte trois éléments dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 : c'est une base.

Méthode 2 — Réduction à une suite dont les différences secondes sont constantes.

Pour $u \in \mathcal{E}$, posons $v_n = 2^n u_n$, $d_n = v_{n+1} - v_n$ et $e_n = d_{n+1} - d_n$. La récurrence devient $v_{n+3} - 3v_{n+2} + 3v_{n+1} - v_n = 0$, donc $e_{n+1} = e_n$.

On en déduit $e_n = e_0$, puis $d_n = d_0 + ne_0$. En sommant les différences, pour tout $n \geq 0$:

$$v_n = v_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (d_0 + je_0) = v_0 + nd_0 + \frac{n(n-1)}{2}e_0.$$

La formule

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = n(n-1)/2$$

est celle d'une somme arithmétique, et pour $n = 0$ la somme est vide. Ainsi v_n est un polynôme de degré au plus deux en n , ce qui montre directement que toute suite de $\mathcal{E}$ est combinaison de a, b, c . Leur indépendance se vérifie comme dans la première méthode, ou en remarquant qu'un polynôme de degré au plus deux nul en tout entier naturel est le polynôme nul.

La première méthode utilise la dimension déjà établie ; la seconde explique pourquoi les trois formes 2^{-n} , $n2^{-n}$ et n^22^{-n} apparaissent.

3) Écrivons $u = Aa + Bb + Cc$, ce qui est possible grâce à la base précédente. Pour tout $n \geq 0$:

$$|u_n| \leq \frac{|A| + |B|n + |C|n^2}{2^n}.$$

Par croissance comparée des puissances et des exponentielles, $n^2/(\sqrt{2})^n \rightarrow 0$. Il existe donc un entier N tel que, pour $n \geq N$, $n^2 \leq (\sqrt{2})^n$. Par comparaison avec la série

géométrique de raison $1/\sqrt{2} < 1$, la série

$$\sum n^2/2^n$$

converge; les séries

$$\sum n/2^n$$

et

$$\sum 1/2^n$$

convergent également, par domination pour $n \geq 1$.

La majoration précédente prouve la convergence absolue de

$$\sum u_n,$$

donc sa convergence. Le nombre $s(u)$ est bien défini pour tout $u \in \mathcal{E}$.

4) Méthode 1 — Séries géométriques usuelles.

Pour $|x| < 1$, les formules du programme donnent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

En multipliant les deux dernières identités respectivement par x et x^2 , et en utilisant

$n^2 = n(n-1) + n$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

À $x = 1/2$, cela donne $s(a) = 2$, $s(b) = 2$ et $s(c) = 6$.

Méthode 2 — Décalages des sommes convergentes.

Notons

$$S_0 = \sum_{n \geq 0} 2^{-n},$$

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} n 2^{-n}$$

et

$$S_2 = \sum_{n \geq 0} n^2 2^{-n}.$$

Leur convergence a été établie, ce qui autorise les décalages d'indice et les soustractions suivants.

La série géométrique donne $S_0 = 2$. Ensuite :

$$\frac{S_1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n},$$

donc

$$S_1 - S_1/2 = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1,$$

et $S_1 = 2$.

De même,

$$S_2/2 = \sum_{n \geq 1} (n-1)^2 2^{-n},$$

d'où :

$$\frac{S_2}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2S_1 - 1 = 3.$$

On retrouve $S_2 = 6$. Les décalages fournissent ici un calcul sans utiliser directement les deux formules dérivées de la série géométrique.

5) Soient $u, v \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Toutes les séries considérées convergent, et la linéarité des sommes de séries convergentes donne :

$$s(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda s(u) + \mu s(v).$$

L'application s est donc linéaire. Puisque $s(a) = 2 \neq 0$, son image est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$, donc son rang vaut 1. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } s = 3 - 1 = 2$.

6) Pour $u = Aa + Bb + Cc$, la question 4 donne $s(u) = 2A + 2B + 6C$. Ainsi :

$$u \in \text{Ker } s \iff A + B + 3C = 0 \iff u = B(b - a) + C(c - 3a).$$

Les suites $b - a$ et $c - 3a$ sont indépendantes : si $B(b - a) + C(c - 3a) = 0$, l'indépendance de a, b, c impose $B = C = 0$.

On conclut :

$$\text{Ker } s = \text{Vect}(b - a, c - 3a) = \left\{ \left(\frac{B(n-1) + C(n^2-3)}{2^n} \right)_{n \geq 0} \mid B, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2

- 1) On contrôle séparément les deux extrémités de l'intégrale. Au voisinage de 0, $\sin t/t \rightarrow 1$; l'intégrande admet donc un prolongement continu en 0. Son intégrale absolue sur un voisinage de 0 converge.

Pour $t \geq 1$, $|\sin t| \leq 1$ et $1/t \leq 1$, donc :

$$\left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-\alpha t}.$$

Comme $\alpha \geq 1 > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge. Le critère de comparaison prouve que I est absolument convergente.

- 2) a) Sur $[0, R]$, une primitive de $e^{-\alpha t}$ est $-e^{-\alpha t}/\alpha$. Ainsi :

$$\int_0^R e^{-\alpha t} dt = \frac{1 - e^{-\alpha R}}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent $I_0 = 1/\alpha$.

- 2) b) Soit $n \geq 1$. On effectue l'intégration par parties sur le segment $[0, R]$, avec

$$u(t) = t^n \text{ et } v'(t) = e^{-\alpha t} :$$

$$\int_0^R e^{-\alpha t} t^n dt = \left[-\frac{t^n e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^R + \frac{n}{\alpha} \int_0^R e^{-\alpha t} t^{n-1} dt.$$

Le terme en 0 est nul puisque $n \geq 1$. Par croissance comparée, $R^n e^{-\alpha R} \rightarrow 0$. Si I_{n-1} converge, le membre de droite a donc une limite finie. Cela prouve la convergence de I_n et la relation :

$$I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}.$$

- 2) c) La convergence de I_0 et l'implication précédente prouvent par récurrence celle de tous les I_n . En appliquant successivement la relation :

$$I_n = \frac{n}{\alpha} \frac{n-1}{\alpha} \cdots \frac{1}{\alpha} I_0 = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Cette formule vaut aussi pour $n = 0$, avec $0! = 1$.

- 3) a) La fonction sinus est de classe C^{2n+2} sur $[0, x]$. Toutes ses dérivées ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1. Son polynôme de Taylor en 0 à l'ordre $2n + 1$ est

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange, avec la majoration 1 de la dérivée d'ordre $2n + 2$, fournit donc :

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Pour $x = 0$, les deux membres sont nuls. L'inégalité est donc vraie pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 0$.

- 3) b) Pour $t > 0$, on multiplie l'inégalité précédente par $e^{-\alpha t}/t$, qui est positif. On obtient :

$$\left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha t} t^{2k} \right| \leq \frac{e^{-\alpha t} t^{2n+1}}{(2n+2)!}.$$

Toutes les intégrales sont absolument convergentes : c'est établi pour I et, par positivité et la question 2, pour les I_j . On peut intégrer cette inégalité, utiliser la linéarité pour la

somme finie, puis passer à la limite aux bornes :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k I_{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{I_{2n+1}}{(2n+2)!}.$$

La constante demandée est donc $K = 1/(2n+2)!$. Aucun échange avec une somme infinie n'a été effectué.

3) c) La formule des I_j donne :

$$\frac{I_{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}, \quad \frac{I_{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)\alpha^{2n+2}}.$$

Comme $\alpha \geq 1$, la dernière quantité est comprise entre 0 et $1/(2n+2)$, qui tend vers 0. L'inégalité de la question précédente entraîne :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}.$$

La justification inclut le cas $\alpha = 1$.

4) On utilise la définition $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ donnée dans le sujet.

4) a) Pour $t \in [0, 1]$, la formule de la somme géométrique finie, de raison $-t^2$, donne :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif. En retranchant $1/(1+t^2)$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{-(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

- 4) b) On intègre l'identité précédente sur $[0, x]$, pour $0 \leq x \leq 1$. La somme est finie et les fonctions sont continues, donc :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \text{Arctan}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

La positivité de l'intégrande et $1+t^2 \geq 1$ donnent :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \text{Arctan}(x) \right| \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

- 4) c) Puisque $\alpha \geq 1$, le nombre $x = 1/\alpha$ appartient à $[0, 1]$. À ce point, les sommes finies de la question 4 b) sont exactement celles de la question 3 c). Le reste de la question 4 b) tend vers 0, donc les deux limites sont identiques :

$$I = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette conclusion provient de deux estimations de restes explicites ; elle ne nécessite ni intégration terme à terme d'une série infinie, ni dérivation sous une intégrale.

Exercice 3

- 1) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

On évalue le polynôme en introduisant les coefficients du plus haut degré au plus bas.
La fonction complète est :

Python

```
n = 3

def F(x):
    if x < 0:
        return 0
    else:
        y = 0
        for k in range(n, 0, -1):
            y = x * (y + k)
        if y <= 1:
            return y
        else:
            return 1
```

La première ligne fixe un exemple de constante entière positive ; elle peut être remplacée par toute valeur $n \geq 1$. Aucun import n'est nécessaire. La boucle parcourt les entiers $n, n-1, \dots, 1$: la borne 0 de range est exclue.

Après l'itération d'indice k , la variable y vaut $kx + (k+1)x^2 + \dots + nx^{n-k+1}$. Cela se démontre par récurrence descendante : à $k = n$, y vaut nx ; si la propriété est vraie après l'indice $k+1$, l'instruction $y = x * (y + k)$ donne bien l'expression annoncée à l'indice k .

À la fin de la boucle, y vaut donc $x + 2x^2 + \dots + nx^n$. Pour $x \geq 0$, les deux retours réalisent le minimum de cette quantité et de 1 ; pour $x < 0$, le retour vaut 0. Le programme calcule exactement F_n en arithmétique réelle, à l'arrondi près en arithmétique flottante.

Le code a été exécuté et comparé à l'évaluation directe du polynôme pour plusieurs valeurs de n et de x , avec concordance à la précision numérique. Cette vérification complète l'argument sur la boucle, sans remplacer sa preuve.

2) a) Pour $x \geq 0$,

$$\varphi'_n(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} \geq 1.$$

Ainsi φ_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi_n(0) = 0$ et

$$\varphi_n(1) = \sum_{k=1}^n k \geq 1.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in]0, 1]$ tel que $\varphi_n(x_n) = 1$. La stricte croissance assure l'unicité parmi les réels positifs. Pour $n = 1$, $x_1 = 1$; pour $n \geq 2$, $\varphi_n(1) > 1$, donc $x_n < 1$.

2) b) Sur $[0, x_n]$, la croissance donne $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$; sur $[x_n, +\infty[$, elle donne $\varphi_n(x) \geq 1$.

Par conséquent :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \varphi_n(x) & \text{si } 0 \leq x \leq x_n, \\ 1 & \text{si } x \geq x_n. \end{cases}$$

Les deux expressions à $x = x_n$ sont identiques et valent 1.

2) c) La fonction F_n est croissante, continue sur $\mathbb{R}$, et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ valent respectivement 0 et 1. Les raccordements sont continus puisque $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n(x_n) = 1$.

Pour établir aussi l'existence d'une densité, définissons :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} & \text{si } 0 < x < x_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est positive, continue sauf éventuellement aux deux extrémités, et son intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{x_n} \varphi'_n(x) dx = \varphi_n(x_n) - \varphi_n(0) = 1.$$

Elle est donc une densité. Son intégrale de $-\infty$ à x vaut 0 pour $x < 0$, $\varphi_n(x)$ pour $0 \leq x \leq x_n$ et 1 pour $x \geq x_n$: elle a bien F_n pour fonction de répartition.

2) d) Puisque $F_n(0) = 0$, $P(X_n \leq 0) = 0$.

Par ailleurs, $x_n \leq 1$, donc $F_n(1) = 1$ et $P(X_n > 1) = 0$. Une variable à densité n'a pas de masse ponctuelle, donc $P(X_n = 1) = 0$. Ainsi $P(X_n \geq 1) = 0$, y compris pour $n = 1$, où $x_1 = 1$.

3) a) Sur $[0, x_n]$, $F_n = \varphi_n$ est continue, strictement croissante, et prend les valeurs 0 et 1 aux extrémités. Le théorème de la bijection donne un unique $\mu_n \in]0, x_n[$ tel que $F_n(\mu_n) = 1/2$.

Hors de cet intervalle, F_n vaut soit 0, soit 1, et ne peut donc prendre la valeur 1/2. L'unicité est vraie sur tout $\mathbb{R}$.

3) b) Le nombre μ_n est la médiane de X_n . En effet, l'absence de masse ponctuelle donne :

$$P(X_n \leq \mu_n) = \frac{1}{2}, \quad P(X_n \geq \mu_n) = 1 - P(X_n < \mu_n) = \frac{1}{2}.$$

4) On a $\mu_n > 0$ et $\varphi_n(\mu_n) = 1/2$. Or :

$$\varphi_{n+1}(\mu_n) = \varphi_n(\mu_n) + (n+1)\mu_n^{n+1} > \frac{1}{2}.$$

Donc $F_{n+1}(\mu_n) > 1/2 = F_{n+1}(\mu_{n+1})$: prendre le minimum avec 1 préserve ici l'inégalité stricte à 1/2.

La fonction F_{n+1} étant croissante, cette inégalité impose $\mu_n > \mu_{n+1}$. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 ; elle converge donc vers un réel positif ou nul. De plus $\mu_1 = 1/2$, donc sa limite appartient à $[0, 1/2]$.

5) a) Pour $x \in [0, 1[$, la série géométrique dérivée fournit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Réolvons $\varphi(L) = 1$ avec $0 \leq L < 1$. Le dénominateur est strictement positif et l'équation équivaut à $L = (1-L)^2$, donc à $L^2 - 3L + 1 = 0$. Ses deux racines réelles sont $(3 - \sqrt{5})/2$ et $(3 + \sqrt{5})/2$. Seule la première appartient à $[0, 1[$:

$$L = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

5) b) Si $x < 0$, tous les $F_n(x)$ sont nuls. Si $0 \leq x \leq L$, les sommes partielles positives vérifient $\varphi_n(x) \leq \varphi(x) \leq 1$, donc $F_n(x) = \varphi_n(x)$ et leur limite vaut $x/(1-x)^2$.

Si $L < x < 1$, alors $\varphi(x) > 1$. Cette inégalité provient de la stricte croissance de $x/(1-x)^2$ sur $[0, 1[$, dont la dérivée vaut $(1+x)/(1-x)^3 > 0$. La convergence $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ implique que $\varphi_n(x) > 1$ à partir d'un certain rang, donc $F_n(x) = 1$ à partir de ce rang.

Enfin, pour $x \geq 1$, $\varphi_n(x) \geq x \geq 1$, donc $F_n(x) = 1$. Cela couvre l'ensemble des réels $x > L$.

On a donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{(1-x)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ 1 & \text{si } x > L. \end{cases}$$

Le seul point pouvant vérifier $F(\ell) = 1/2$ appartient à $]0, L[$. Sur cet intervalle, l'équation équivaut à $2\ell = (1-\ell)^2$, donc à $\ell^2 - 4\ell + 1 = 0$. La racine $2 + \sqrt{3}$ est

supérieure à 1 ; l'autre est $2 - \sqrt{3} \in]0, 1[$ et vérifie $\varphi(\ell) = 1/2 < \varphi(L)$, donc $\ell < L$.

Ainsi $\ell = 2 - \sqrt{3}$ est l'unique solution.

5) c) Comme $\ell > 0$, la série positive

$$\sum_{k \geq 1} k\ell^k$$

a un reste strictement positif après chaque somme partielle. Ainsi :

$$\varphi_n(\ell) < \varphi(\ell) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent $F_n(\ell) = \varphi_n(\ell) < 1/2$, sans calcul explicite de $\varphi_n(\ell)$.

5) d) Soit $\varepsilon > 0$. Si $\ell + \varepsilon \leq L$, la stricte croissance de φ donne

$$F(\ell + \varepsilon) = \varphi(\ell + \varepsilon) > \varphi(\ell) = 1/2. \text{ Si } \ell + \varepsilon > L, \text{ alors } F(\ell + \varepsilon) = 1 > 1/2.$$

Dans tous les cas, la limite de $F_n(\ell + \varepsilon)$ est strictement supérieure à $1/2$. En prenant la moitié de l'écart entre cette limite et $1/2$ dans la définition de la convergence, on obtient $F_n(\ell + \varepsilon) > 1/2$ pour tout n suffisamment grand.

5) e) La question 5 c) et $F_n(\mu_n) = 1/2$ donnent $\ell < \mu_n$ pour tout n . La question 5 d) donne, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n suffisamment grand, $\mu_n < \ell + \varepsilon$.

On a donc $0 < \mu_n - \ell < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. C'est exactement la convergence de μ_n vers ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 2 - \sqrt{3}.$$

Cette preuve encadre les médianes à des points fixes et ne substitue pas une suite variable dans une convergence seulement ponctuelle.

Problème

Partie 1 — Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Un tirage nul correspond à un pas vers le haut. Un tirage non nul, lorsque $x = 0$, doit toujours conduire en $x = 1$. Lorsque $x = 1$, le signe du tirage indique un pas à gauche ou à droite.

Voici un programme complet, incluant une réalisation de la fonction hasard annoncée dans le sujet :

Python

```
import numpy as np

p = 0.6
q = 1 - p

def hasard():
    u = np.random.random()
    if u < q / 2:
        return -1
    elif u < q / 2 + p:
        return 0
    else:
        return 1

def simulation():
    x = 0
    y = 0
    while x < 2:
        h = hasard()
        if h == 0:
            y = y + 1
```

```
elif x == 0:
    x = 1
else:
    x = x + h
print(x, y)
```

La valeur $p = 0.6$ est un exemple d'exécution, remplaçable par tout réel de $]0, 1[$. Le tirage uniforme sur $[0, 1[$ est partagé en trois intervalles de longueurs $q/2, p, q/2$, ce qui réalise les probabilités demandées. Des tirages distincts sont indépendants dans le modèle de simulation.

Si $x = 0$, les deux tirages -1 et 1 , de probabilité totale q , donnent $x' = 1$. Si $x = 1$, ils donnent respectivement $x' = 0$ et $x' = 2$, chacun avec probabilité $q/2$. Un tirage 0 conserve l'abscisse et augmente l'ordonnée d'une unité, avec probabilité p .

L'affichage a lieu après chaque pas, y compris celui de sortie. La boucle s'arrête dès que $x = 2$. La partie 2 montrera que cet arrêt survient presque sûrement; aucune borne déterministe sur le nombre d'itérations n'est imposée.

Ce code a été exécuté sur des trajectoires tests. Les transitions et la dernière abscisse affichée ont été contrôlées; une simulation reste une illustration du modèle, et non une preuve des lois calculées ci-dessous.

Partie 2 — Loi de probabilité de X_n et de la durée du trajet

Pour alléger les expressions, on pose dans cette partie :

$$\beta = p + \frac{q}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = p - \frac{q}{\sqrt{2}}, \quad c_+ = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad c_- = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

1) a) La troisième colonne de A est u , donc $Au = u$. Comme $u \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

1) b) On cherche un vecteur $v = {}^t(1, v_2, v_3)$ satisfaisant $Av = \beta v$. La première ligne donne $p + (q/2)v_2 = \beta$, donc $v_2 = \sqrt{2}$, car $q > 0$.

La deuxième ligne est alors vérifiée :

$$q + p\sqrt{2} = \left(p + \frac{q}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2}.$$

La troisième ligne donne $(\beta - 1)v_3 = q\sqrt{2}/2$. Or $\beta - 1 = -q(1 - 1/\sqrt{2}) \neq 0$, donc :

$$v_3 = -\frac{\sqrt{2}/2}{1 - 1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = -(1 + \sqrt{2}).$$

Ainsi $v = {}^t(1, \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$ est un vecteur propre non nul, ce qui établit que β est une valeur propre.

1) c) On cherche de même $w = {}^t(1, w_2, w_3)$ tel que $Aw = \gamma w$. La première ligne donne $w_2 = -\sqrt{2}$. La deuxième ligne est vérifiée puisque $q - p\sqrt{2} = \gamma(-\sqrt{2})$.

La dernière ligne donne $(\gamma - 1)w_3 = -q\sqrt{2}/2$. Comme $\gamma - 1 = -q(1 + 1/\sqrt{2}) \neq 0$, il vient :

$$w_3 = \frac{\sqrt{2}/2}{1 + 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Le vecteur $w = {}^t(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ est donc un vecteur propre non nul associé à γ .

1) d) Les valeurs propres sont distinctes : $\beta - \gamma = \sqrt{2}q > 0$, $1 - \beta = q(1 - 1/\sqrt{2}) > 0$ et $1 - \gamma = q(1 + 1/\sqrt{2}) > 0$.

Les vecteurs propres u, v, w associés à ces trois valeurs propres distinctes sont indépendants. Ils constituent une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de leurs colonnes est donc inversible :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 - \sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Les identités $Au = u$, $Av = \beta v$, $Aw = \gamma w$ donnent $A\Pi = \Pi \operatorname{diag}(1, \beta, \gamma)$. Ainsi :

$$A' = \Pi^{-1} A \Pi = \text{diag}(1, \beta, \gamma).$$

Cette diagonalisation n'utilise aucun déterminant.

1) e) Le système demandé s'écrit :

$$y + z = 1, \quad \sqrt{2}(y - z) = 0, \quad x - (1 + \sqrt{2})y + (\sqrt{2} - 1)z = 0.$$

La deuxième égalité donne $y = z$; la première donne alors $y = z = 1/2$. La troisième donne $x = 1$. Par conséquent :

$$\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

1) f) Notons $e_0 = {}^t(1, 0, 0)$. La première colonne de A^n est $A^n e_0$. Puisque $A = \Pi A' \Pi^{-1}$, on a, pour tout $n \geq 0$, $A^n = \Pi (A')^n \Pi^{-1}$. La question précédente donne :

$$A^n e_0 = \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ \beta^n/2 \\ \gamma^n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^n + \gamma^n}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta^n - \gamma^n) \\ 1 - c_+ \beta^n - c_- \gamma^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, les puissances sont égales à 1, y compris si $\gamma = 0$: ici une puissance d'exposant zéro représente le coefficient de la matrice identité. La colonne vaut alors ${}^t(1, 0, 0)$, comme attendu.

2) a) À chaque pas, la loi de l'abscisse suivante ne dépend que de l'abscisse actuelle, car les probabilités de transition ne dépendent pas de l'ordonnée. À partir de 0, les

transitions vers 0, 1, 2 ont probabilités $p, q, 0$; à partir de 1, elles ont probabilités $q/2, p, q/2$; à partir de 2, elles ont probabilités 0, 0, 1.

Pour chaque abscisse d'arrivée, on décompose l'événement selon l'abscisse de départ. La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_n = 0) = pP(X_{n-1} = 0) + \frac{q}{2}P(X_{n-1} = 1),$$

$$P(X_n = 1) = qP(X_{n-1} = 0) + pP(X_{n-1} = 1),$$

$$P(X_n = 2) = \frac{q}{2}P(X_{n-1} = 1) + P(X_{n-1} = 2).$$

Si une abscisse de départ a une probabilité nulle, le terme correspondant vaut zéro; il n'est pas nécessaire de définir une probabilité conditionnelle sur cet événement nul. En réunissant les trois égalités, on obtient exactement la relation matricielle demandée.

2) b) Posons $U_n = {}^t(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2))$. On a $U_0 = e_0$ et $U_n = AU_{n-1}$, donc par récurrence $U_n = A^n e_0$.

La loi de X_n , à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, est ainsi :

$$P(X_n = 0) = \frac{\beta^n + \gamma^n}{2},$$

$$P(X_n = 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta^n - \gamma^n),$$

$$P(X_n = 2) = 1 - c_+ \beta^n - c_- \gamma^n.$$

Ces probabilités sont issues de la récurrence de transition, ce qui garantit leur positivité. Leur somme vaut 1 : les coefficients de β^n et de γ^n dans les deux premières expressions sont respectivement c_+ et c_- . Les valeurs pour $n = 0$ sont bien 1, 0, 0.

3) a) On a $0 < \beta < 1$. De plus, $\gamma < 1$ et $\gamma > -1$: en effet $\gamma = p - q/\sqrt{2} > -1/\sqrt{2} > -1$. Ainsi $\beta^n \rightarrow 0$ et $\gamma^n \rightarrow 0$, et :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2) = 1.$$

Intuitivement, tant que le mobile reste sur le chemin, il a régulièrement une possibilité de sortir, et ne peut ensuite revenir. On peut rendre cette intuition précise sans supposer l'indépendance d'essais arbitraires : depuis $x = 0$, deux pas vers la droite entraînent une

sortie avec probabilité $q^2/2$; depuis $x = 1$, sortir dès le pas suivant a probabilité $q/2 \geq q^2/2$.

Conditionnellement à tout passé sans sortie, la probabilité de rester encore deux pas sur le chemin est donc au plus $1 - q^2/2$. En itérant cette majoration, la probabilité de rester sur le chemin pendant $2j$ pas est au plus $(1 - q^2/2)^j$, qui tend vers 0.

- 3) b) Comme $p > 0$ et $q/\sqrt{2} > 0$, l'inégalité $|p - q/\sqrt{2}| < p + q/\sqrt{2}$ donne $|\gamma| < \beta$. On peut donc factoriser la différence :

$$\ell - P(X_n = 2) = c_+\beta^n + c_-\gamma^n = c_+\beta^n \left(1 + \frac{c_-}{c_+} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^n\right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers 1. On conclut :

$$\ell - P(X_n = 2) \sim \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \left(p + \frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Les constantes demandées sont $a = (1 + \sqrt{2})/2$ et $b = p + q/\sqrt{2}$.

- 4) La durée T désigne le premier instant où l'abscisse atteint 2, avec la convention $T = +\infty$ en l'absence de sortie.

- 4) a) Puisque l'abscisse 2 est absorbante, être en 1 au temps $n - 1$ exclut toute sortie antérieure. La seule transition permettant de sortir est celle de 1 à 2. Ainsi, pour $n \geq 1$:

$$(T = n) = (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 2).$$

Pour $n = 1$, cet événement est vide puisque $X_0 = 0$.

- 4) b) La sortie a lieu presque sûrement. En effet, les événements $(X_n = 2)$ sont croissants et leur réunion est l'événement $(T < +\infty)$. Par continuité monotone des probabilités et la question 3 a), sa probabilité vaut 1.

On a nécessairement $T \geq 2$. Tous les entiers $n \geq 2$ sont possibles : on peut faire $n - 2$ pas verticaux en $x = 0$, puis deux pas vers la droite, événement de probabilité $p^{n-2}q^2/2 > 0$.

Pour $n \geq 1$, la question 4 a) et la transition depuis 1 donnent :

$$P(T = n) = \frac{q}{2} P(X_{n-1} = 1) = \frac{q\sqrt{2}}{4} (\beta^{n-1} - \gamma^{n-1}).$$

Cette formule vaut 0 à $n = 1$; elle est positive pour $n \geq 2$ puisque $|\gamma| < \beta$. Aucune masse n'est portée par $+\infty$.

Pour vérifier la normalisation, on utilise les séries géométriques, puisque $|\beta|, |\gamma| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = \frac{q\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1-\gamma} \right).$$

Or $\beta - \gamma = \sqrt{2}q$ et $(1-\beta)(1-\gamma) = q^2/2$, donc cette somme vaut 1.

4) c) Méthode 1 — Calcul à partir de la loi.

L'existence de l'espérance est justifiée avant le calcul : pour $n \geq 1$,

$$0 \leq nP(T = n) \leq \frac{q\sqrt{2}}{4} n (\beta^{n-1} + |\gamma|^{n-1}).$$

Les deux séries de droite convergent par les formules géométriques dérivées. La variable T admet donc une espérance finie, et :

$$E(T) = \frac{q\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right).$$

Le numérateur de la différence des fractions est :

$$(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2 = (\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma) = \sqrt{2}q(2-2p) = 2\sqrt{2}q^2.$$

Son dénominateur est $((1-\beta)(1-\gamma))^2 = q^4/4$. Donc :

$$E(T) = \frac{q\sqrt{2}}{4} \frac{8\sqrt{2}}{q^2} = \frac{4}{q} = \frac{4}{1-p}.$$

Méthode 2 — Somme des probabilités de survie.

On établit d'abord la formule particulière nécessaire. Pour tout entier $N \geq 0$, la somme finie des probabilités donne :

$$\sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{k=1}^{N+1} kP(T = k) + (N+1)P(T > N+1).$$

Cette identité s'obtient en séparant les valeurs $T \leq N+1$ des valeurs supérieures : une valeur $k \leq N+1$ contribue à exactement k événements ($T > n$) ; une valeur supérieure contribue aux $N+1$ événements. Elle ne demande aucun échange de sommes infinies.

Comme $(T > n)$ équivaut à $(X_n \neq 2)$, on a $P(T > n) = c_+\beta^n + c_-\gamma^n$. En particulier, $P(T > n) \leq (c_+ + |c_-|)\beta^n$, et $(N+1)P(T > N+1) \rightarrow 0$ par croissance comparée.

En faisant tendre N vers l'infini dans l'identité finie, on obtient donc :

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = \frac{c_+}{1-\beta} + \frac{c_-}{1-\gamma}.$$

En remplaçant $1-\beta = q(1-1/\sqrt{2})$ et $1-\gamma = q(1+1/\sqrt{2})$, les deux termes valent respectivement $(4+3\sqrt{2})/(2q)$ et $(4-3\sqrt{2})/(2q)$. Leur somme est $4/q$.

La première méthode exploite les probabilités ponctuelles ; la seconde montre comment une espérance de durée peut être calculée à partir des probabilités de rester encore dans le système.

Partie 3 — Loi du couple (X_n, Y_n) et de la distance parcourue

- 1) a) Un itinéraire qui aboutit en abscisse 0 ne peut avoir quitté le chemin, puisque l'abscisse 2 est absorbante. Il comporte $n-2k$ pas vers le haut et $2k$ pas horizontaux, soit k pas à droite et k pas à gauche.

En partant de 0, les pas horizontaux doivent alterner : droite de 0 vers 1, puis gauche de 1 vers 0, et ainsi de suite. Chaque pas à droite a probabilité conditionnelle q , chaque pas à gauche a probabilité conditionnelle $q/2$, et chaque pas vers le haut a probabilité conditionnelle p , indépendamment de son niveau.

La formule des probabilités composées, appliquée successivement aux positions de cet itinéraire, donne donc :

$$p^{n-2k} q^k \left(\frac{q}{2}\right)^k = p^{n-2k} \left(\frac{q^2}{2}\right)^k.$$

Il n'est pas nécessaire de supposer les directions des pas indépendantes : leurs probabilités conditionnelles tiennent compte de l'abscisse actuelle.

- 1) b) Question adaptée au programme actuel : la distinction de cas inclut explicitement $n - y = 0$, indispensable pour l'itinéraire entièrement vertical.

Pour atteindre $(0, y)$ en n pas sans sortir, il faut exactement y pas verticaux et $n - y$ pas horizontaux. Si $n - y < 0$, cela est impossible. Si $n - y$ est impair, l'alternance des pas horizontaux conduit en abscisse 1, et non en 0 : c'est aussi impossible.

Si $n - y = 2k \geq 0$, choisir les $2k$ emplacements des pas horizontaux parmi les n emplacements détermine entièrement l'itinéraire, puisque leurs directions alternent en commençant par la droite ; tous les autres pas sont verticaux. Chaque choix donne un itinéraire valide, restant entre les abscisses 0 et 1.

Le nombre d'itinéraires est donc :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n - y < 0 \text{ ou } n - y \text{ est impair,} \\ \binom{n}{2k} = \binom{n}{y} & \text{si } n - y = 2k \geq 0. \end{cases}$$

Lorsque $n - y = 0$, le nombre vaut $\binom{n}{0} = 1$; cela couvre aussi $n = y = 0$.

- 1) c) Les différents itinéraires sont des événements disjoints. Pour $n - y = 2k \geq 0$, ils ont tous la même probabilité, calculée en 1 a). En sommant ces probabilités :

$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = y)) = \begin{cases} \binom{n}{2k} p^{n-2k} \left(\frac{q^2}{2}\right)^k & \text{si } n - y = 2k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette expression est donnée pour $y \in \mathbb{N}$; pour une valeur qui n'est pas un entier naturel, la probabilité est nulle.

- 2) Pour terminer en abscisse 1, le nombre de pas horizontaux est nécessairement impair. Posons $n - y = 2k + 1 \geq 1$. Les directions horizontales alternent, avec $k + 1$ pas à droite de 0 vers 1 et k pas à gauche de 1 vers 0.

Pour un itinéraire fixé, la probabilité est :

$$p^y q^{k+1} \left(\frac{q}{2}\right)^k = qp^y \left(\frac{q^2}{2}\right)^k.$$

Il y a $\binom{n}{2k+1} = \binom{n}{y}$ choix des emplacements horizontaux, et chacun détermine un itinéraire valide. Ainsi :

$$P((X_n = 1) \cap (Y_n = y)) = \begin{cases} \binom{n}{2k+1} qp^{n-2k-1} \left(\frac{q^2}{2}\right)^k & \text{si } n - y = 2k + 1 \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, lorsque $n = 0$, toutes ces probabilités sont nulles, conformément à $X_0 = 0$.

- 3) On retrouve les probabilités marginales en sommant les probabilités conjointes sur toutes les ordonnées compatibles.
- 3) a) L'événement $(X_n = 0)$ impose que le mobile n'ait pas quitté le chemin. Chaque pas a alors été soit horizontal, soit vertical. Le nombre de pas horizontaux est pair, égal à $2k$, avec $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, et l'ordonnée vaut nécessairement $n - 2k$.

Réciproquement, les événements $(X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k)$ sont tous contenus dans $(X_n = 0)$. Ils sont deux à deux disjoints puisque les ordonnées $n - 2k$ sont distinctes.

Leur union est exactement $(X_n = 0)$.

L'additivité sur cette union finie donne donc :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} P((X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k)).$$

3) b) Posons $h = q/\sqrt{2}$. La formule de 1 c) et la question précédente donnent :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} p^{n-2k} h^{2k}.$$

Le binôme de Newton donne

$$(p + h)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{n-j} h^j$$

et

$$(p - h)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} p^{n-j} h^j.$$

En additionnant, les termes d'indice impair disparaissent, tandis que ceux d'indice pair sont doublés. Ainsi :

$$P(X_n = 0) = \frac{(p + h)^n + (p - h)^n}{2} = \frac{\beta^n + \gamma^n}{2}.$$

On retrouve le résultat de la partie 2, y compris pour $n = 0$.

3) c) Pour $n \geq 1$, on partitionne $(X_n = 1)$ selon ses ordonnées possibles $n - 2k - 1$, avec $0 \leq k \leq \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. Les événements sont disjoints et exhaustifs pour la même raison qu'en 3 a).

On utilise aussi $q(q^2/2)^k = \sqrt{2}h^{2k+1}$. La question 2 donne alors :

$$P(X_n = 1) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} p^{n-2k-1} h^{2k+1}.$$

La soustraction des deux développements du binôme en 3 b) annule les termes pairs et double les termes impairs. Par conséquent :

$$P(X_n = 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} ((p+h)^n - (p-h)^n) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\beta^n - \gamma^n).$$

Pour $n = 0$, la probabilité est nulle, ce que donne aussi la dernière formule.

4) La variable D est l'ordonnée au premier instant de sortie : $D = Y_T$, définie presque sûrement puisque T est fini presque sûrement.

4) a) Au moment de la sortie, l'ordonnée n'augmente pas : la sortie est un pas horizontal de 1 vers 2. Donc $D = Y_T = Y_{T-1}$ et $D \in \mathbb{N}$ presque sûrement.

Réciproquement, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, l'itinéraire constitué de m pas verticaux en abscisse 0, puis de deux pas à droite, réalise $D = m$ avec probabilité $p^m q^2/2 > 0$.

L'ensemble des valeurs possibles est donc $\mathbb{N}$.

4) b) On raisonne sur l'événement de probabilité 1 où T est fini. Si $D = m$ et $T = k+1$, alors la position juste avant la sortie a pour abscisse 1 et ordonnée m , et l'abscisse au pas suivant vaut 2. Ainsi l'issue appartient à $(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)$.

Réciproquement, si ces trois événements sont réalisés, le mobile sort au pas $k+1$: il ne pouvait avoir atteint 2 auparavant, puisque cette abscisse est absorbante et que $X_k = 1$. L'ordonnée ne change pas pendant ce pas de sortie, donc $D = Y_{k+1} = Y_k = m$.

On a donc, presque sûrement :

$$(D = m) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)].$$

Les événements de l'union sont deux à deux disjoints, puisqu'ils correspondent à des instants de première sortie différents. Les égalités concernant D , défini presque sûrement, sont entendues sur l'événement $(T < +\infty)$; une extension arbitraire sur son complément nul ne modifie aucune probabilité.

- 4) c) Pour éviter de confondre l'instant avec l'indice final de la série, notons j l'instant précédant la sortie. Par la question 4 b), l'additivité sur une union disjointe dénombrable et la probabilité conditionnelle de sortie depuis 1 :

$$P(D = m) = \frac{q}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} P((X_j = 1) \cap (Y_j = m)).$$

En effet, pour tout passé aboutissant en $(1, m)$, la probabilité de sortir au pas suivant est $q/2$; le produit précédent est donc justifié par les probabilités composées.

La probabilité conjointe est non nulle seulement si $j - m = 2k + 1$ pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire si $j = m + 1 + 2k$. La substitution d'indice énumère exactement les seuls termes non nuls, dans leur ordre. La question 2 fournit :

$$P((X_{m+1+2k} = 1) \cap (Y_{m+1+2k} = m)) = \binom{m+1+2k}{m} q p^m \left(\frac{q^2}{2}\right)^k.$$

En multipliant par $q/2$ et en écrivant le coefficient binomial sous forme factorielle, on obtient :

$$P(D = m) = \frac{p^m}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(m+1+2k)!}{(1+2k)!} \left(\frac{q^2}{2}\right)^{k+1}.$$

La convergence est déjà garantie par l'origine probabiliste de la somme de termes positifs, majorée par 1. On peut également la vérifier directement : pour m fixé, le rapport factoriel est un produit de m facteurs, chacun au plus $m + 1 + 2k$, donc il est majoré par $(m + 1 + 2k)^m$; pour $m = 0$, le produit vide vaut 1.

Avec $z = q^2/2 \in]0, 1/2[$, la croissance comparée donne $(m+1+2k)^m z^{k/2} \rightarrow 0$. À partir d'un certain rang, $(m+1+2k)^m z^{k+1} \leq z(\sqrt{z})^k$, terme d'une série géométrique convergente. Le calcul de la série est ainsi justifié indépendamment de l'interprétation probabiliste.

4) d) Posons $z = q^2/2$. On a $0 < z < 1$, de sorte que les séries géométriques et leurs deux premières séries dérivées sont utilisables.

Pour $m = 0$, le rapport factoriel vaut 1 :

$$P(D = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k+1} = \frac{z}{1-z} = \frac{q^2}{2-q^2}.$$

Pour $m = 1$, le rapport factoriel vaut $2k+2 = 2(k+1)$, donc :

$$P(D = 1) = 2pz \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)z^k = \frac{2pz}{(1-z)^2} = \frac{4pq^2}{(2-q^2)^2}.$$

Pour $m = 2$, le rapport factoriel vaut $(2k+3)(2k+2) = 4k^2 + 10k + 6$. En tenant compte de $2! = 2$:

$$P(D = 2) = p^2 z \sum_{k=0}^{+\infty} (2k^2 + 5k + 3)z^k.$$

Les formules

$$\sum z^k = 1/(1-z),$$

$$\sum kz^k = z/(1-z)^2$$

et

$$\sum k^2 z^k = z(1+z)/(1-z)^3$$

donnent :

$$P(D=2) = p^2 z \left(\frac{2z(1+z)}{(1-z)^3} + \frac{5z}{(1-z)^2} + \frac{3}{1-z} \right).$$

Après mise au même dénominateur, le numérateur entre parenthèses vaut

$2z(1+z) + 5z(1-z) + 3(1-z)^2 = 3+z$. Finalement :

$$P(D=2) = \frac{p^2 z(3+z)}{(1-z)^3} = \frac{2p^2 q^2(6+q^2)}{(2-q^2)^3}.$$

Les trois probabilités sont strictement positives pour $0 < p < 1$, et leurs dénominateurs sont non nuls puisque $q^2 < 1$.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, question 1 : Code adapté en Python, avec conservation des blancs à compléter dans le sujet et de l'algorithme de Horner ; aucune reproduction du langage historique.
- Problème, partie 1 : Code adapté en Python ; la commande d'affichage est précisée et une réalisation complète de `hasard()` est donnée dans le corrigé. Les appels successifs indépendants sont explicités pour la simulation.
- Problème, partie 2, question 2 a), et partie 3, questions 1 a) et 4 c) : les règles du mouvement sont précisées comme probabilités conditionnelles sachant les positions précédentes. Cette explicitation du modèle permet de justifier les probabilités composées sans supposer les directions des pas indépendantes.
- Problème, partie 2, question 4 : ajout de la convention $T = +\infty$ en l'absence de sortie ; sa probabilité est ensuite démontrée nulle. Partie 3, question 4 : définition de D précisée presque sûrement, conformément à ce résultat.

- Problème, partie 3, question 1 b) : « pair et positif » est précisé en « pair et positif ou nul », afin d'inclure explicitement le cas $n - y = 0$. Les questions 1 c) et 3 a) tiennent compte de ce cas.