



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Dans cet exercice, les fonctions f_n sont celles de la récurrence de l'énoncé. Elles sont polynomiales, donc définies sur tout $\mathbb{R}$.

1) Étude de ϕ .

a) Image de $[-1, 1]$.

Méthode 1 — Variations.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\phi'(t) = 3 - 12t^2 = 3(1 - 2t)(1 + 2t).$$

Sa dérivée est négative sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, positive sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et négative sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Aux extrémités de ces intervalles :

$$\phi(-1) = 1, \quad \phi\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \phi(1) = -1.$$

Par monotonie sur chaque intervalle, toutes les valeurs prises appartiennent à $[-1, 1]$.

Ainsi :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad -1 \leq \phi(t) \leq 1.$$

Méthode 2 — Factorisations et signes.

Les identités suivantes donnent directement les deux bornes :

$$1 - \phi(t) = 1 - 3t + 4t^3 = (t + 1)(2t - 1)^2,$$

$$1 + \phi(t) = 1 + 3t - 4t^3 = (1 - t)(2t + 1)^2.$$

Si $t \in [-1, 1]$, les facteurs $t + 1$ et $1 - t$ sont positifs ou nuls. Les carrés sont également positifs ou nuls. Donc $1 - \phi(t) \geq 0$ et $1 + \phi(t) \geq 0$, ce qui établit $\phi(t) \in [-1, 1]$.

Les variations décrivent toute l'image de la fonction ; les factorisations prouvent les bornes sans étude de dérivée.

b) Majoration des différences.

Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis.

Sur $[-1, 1]$, on a $0 \leq t^2 \leq 1$, donc $-9 \leq \phi'(t) \leq 3$ et $|\phi'(t)| \leq 9$. La fonction ϕ est continue sur tout segment inclus dans $[-1, 1]$ et dérivable à son intérieur. L'inégalité des accroissements finis donne donc, pour tous $t, t' \in [-1, 1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leq 9|t - t'|.$$

Le cas $t = t'$ est également inclus, les deux membres étant nuls.

Méthode 2 — Factorisation de la différence.

L'identité $t^3 - t'^3 = (t - t')(t^2 + tt' + t'^2)$ conduit à :

$$\phi(t) - \phi(t') = (t - t')(3 - 4(t^2 + tt' + t'^2)).$$

Posons $q = t^2 + tt' + t'^2$. D'une part :

$$q = \left(t + \frac{t'}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t'^2 \geq 0.$$

D'autre part, puisque $|t|, |t'| \leq 1$:

$$q \leq t^2 + |tt'| + t'^2 \leq 3.$$

Il en résulte $-9 \leq 3 - 4q \leq 3$, donc $|3 - 4q| \leq 9$. En multipliant par $|t - t'|$, on obtient la même inégalité.

La première approche fournit une méthode générale pour une fonction dérivable ; la seconde utilise ici la structure polynomiale.

2) Calcul de $f_n(x)$ en Python.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La relation de récurrence s'écrit $f_n(x) = \phi(f_{n-1}(x/3))$. En la déroulant jusqu'à f_1 , on obtient $f_n(x)$ en partant de $x/3^{n-1}$ puis en appliquant $n - 1$ fois la transformation $u \mapsto 3u - 4u^3$.

Python

```
def f(n, x):
    u = x / (3 ** (n - 1))
    for k in range(n - 1):
        u = 3 * u - 4 * u ** 3
    return u
```

Aucun import n'est nécessaire. Les entrées vérifient $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. La variable u contient d'abord la valeur de f_1 à l'argument réduit. À chaque tour de boucle, une étape de la récurrence est effectuée. Plus précisément, après j tours, avec $0 \leq j \leq n - 1$, elle représente :

$$f_{j+1}\left(\frac{x}{3^{n-1-j}}\right).$$

Cette assertion est vraie à l'initialisation ; la relation de récurrence la conserve au tour suivant. Après $n - 1$ tours, u représente donc $f_n(x)$.

Pour $n = 1$, la boucle est vide et la fonction renvoie bien x . Pour $n = 2$, elle renvoie :

$$3\frac{x}{3} - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 = x - \frac{4x^3}{27}.$$

Le code a été exécuté et contrôlé sur plusieurs valeurs de n et de x , notamment les cas $n = 1$ et $n = 2$. Les calculs informatiques utilisent une précision finie ; la justification précédente porte sur la récurrence exacte.

3) Approximation de $\sin x$.

Avant d'utiliser la question 1 b), montrons que les valeurs pertinentes de f_n restent dans $[-1, 1]$. Pour $n = 1$, $f_1(x) = x \in [-1, 1]$ lorsque $x \in [-1, 1]$. Si $f_{n-1}(y) \in [-1, 1]$ pour tout $y \in [-1, 1]$, alors, pour $x \in [-1, 1]$, $x/3 \in [-1, 1]$ et :

$$f_n(x) = \phi(f_{n-1}(x/3)) \in [-1, 1]$$

d'après 1 a). Par récurrence, cette propriété vaut pour tout $n \geq 1$.

Établissons maintenant la majoration demandée par récurrence sur n , simultanément pour tous les réels $x \in [-1, 1]$.

Initialisation. La fonction sinus est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, ses valeurs et dérivées en 0 vérifient $\sin 0 = 0$, $\sin'(0) = 1$, $\sin''(0) = 0$ et $|\sin'''(u)| = |\cos u| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux donne :

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{2 \cdot 3}.$$

C'est la propriété au rang 1.

Hérédité. Supposons la propriété établie au rang $n - 1$, où $n \geq 2$. L'identité trigonométrique rappelée dans l'énoncé donne :

$$\sin x = \phi(\sin(x/3)).$$

Les deux arguments $f_{n-1}(x/3)$ et $\sin(x/3)$ appartiennent à $[-1, 1]$. La question 1 b), puis l'hypothèse de récurrence appliquée à $x/3$, donnent :

$$|f_n(x) - \sin x| = |\phi(f_{n-1}(x/3)) - \phi(\sin(x/3))| \leq 9|f_{n-1}(x/3) - \sin(x/3)|,$$

$$|f_n(x) - \sin x| \leq 9 \frac{|x/3|^3}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{|x|^3}{2 \cdot 3^n}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$. Comme $|x| \leq 1$, on a même :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |f_n(x) - \sin x| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Le membre de droite tend vers 0. Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f_n(x) \rightarrow \sin x$. La borne sur l'erreur est commune à tous les points de cet intervalle : pour une précision $\varepsilon > 0$, tout entier n vérifiant $1/(2 \cdot 3^n) \leq \varepsilon$ convient simultanément pour tous ces points.

Exercice 2

L'entier n est fixé, avec $n \geq 1$. La condition $AX = 0$ signifie, ligne par ligne :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(i+k-1)!} = 0.$$

1) Exploitation du polynôme $f(t) = t^n P(t)$.

a) Dérivées de f en 1.

Par définition de P :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(n+k-1)!} t^{n+k-1}.$$

Pour un entier j tel que $0 \leq j \leq n-1$, toutes les puissances ont un exposant au moins égal à j . On peut donc dériver chaque monôme j fois :

$$f^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(n+k-1-j)!} t^{n+k-1-j}.$$

En $t = 1$, cette expression est exactement la ligne d'indice $n-j$ du produit AX :

$$f^{(j)}(1) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(n-j+k-1)!} = 0.$$

L'indice $n-j$ parcourt bien $\{1, \dots, n\}$. Ainsi :

$$f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n-1)}(1) = 0.$$

b) Dérivées de P en 1.

On utilise la formule de Leibniz et une récurrence. Comme $f(1) = 1^n P(1)$, la question précédente donne d'abord $P(1) = 0$.

Soit $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Supposons que $P^{(r)}(1) = 0$ pour tous les entiers $r < j$. La formule de Leibniz appliquée aux deux polynômes t^n et P donne :

$$f^{(j)}(1) = \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \frac{d^{j-r}}{dt^{j-r}} t^n \Big|_{t=1} P^{(r)}(1).$$

Les termes d'indice $r < j$ sont nuls par hypothèse. Celui d'indice $r = j$ vaut $P^{(j)}(1)$, puisque $1^n = 1$. Or $f^{(j)}(1) = 0$, donc $P^{(j)}(1) = 0$.

On conclut :

$$P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n-1)}(1) = 0.$$

Toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à n sont identiquement nulles puisque P a un degré au plus égal à $n-1$. Toutes les dérivées successives de P s'annulent donc au point 1. Pour $n = 1$, l'étape initiale suffit.

2) Nullité de P et inversibilité de A .

Méthode 1 — Formule de Taylor pour un polynôme.

Le degré de P est au plus $n-1$. Sa formule de Taylor au point 1 est donc une identité exacte, sans reste :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P^{(j)}(1)}{j!} (t-1)^j.$$

Tous les coefficients sont nuls d'après 1 b). Donc P est le polynôme nul.

Méthode 2 — Multiplicité d'une racine.

Si P était non nul, les égalités de 1 b) signifieraient que 1 est une racine de multiplicité au moins n . Ainsi $(t - 1)^n$ diviserait P , ce qui imposerait $\deg P \geq n$. Cela contredit $\deg P \leq n - 1$. Par conséquent, P est nul.

La première méthode exprime directement le polynôme dans les puissances de $t - 1$; la seconde compare la multiplicité d'une racine et le degré.

Dans les deux cas, la nullité de P implique la nullité de chacun de ses coefficients dans les puissances de t :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{x_k}{(n + k - 1)!} = 0.$$

Les factorielles sont strictement positives, donc $x_k = 0$ pour tout k et $X = 0$. On a montré que $\text{Ker } A = \{0\}$. L'application linéaire associée à A est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$, espace de dimension finie; le théorème du rang montre alors qu'elle est bijective. Ainsi A est inversible, sans recours à un déterminant.

Exercice 3

Le paramètre λ est strictement positif. Les temps de panne sont comptés à partir de l'instant 0 et sont non négatifs.

1) a) Comparaison des événements.

L'inégalité $T_1 > t$ signifie qu'aucune panne n'a eu lieu dans l'intervalle $[0, t]$. C'est exactement la condition $N_t = 0$. Une panne à l'instant t est comptée dans N_t et ne vérifie pas $T_1 > t$, ce qui confirme le choix de l'inégalité stricte.

Ainsi, pour $t > 0$:

$$\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\}.$$

b) Loi de T_1 .

Puisque N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

En faisant tendre t vers 0 par valeurs positives et en utilisant la continuité monotone des probabilités, on obtient $P(T_1 > 0) = 1$. Le temps T_1 n'a donc pas de masse en 0. Sa fonction de répartition est :

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la loi exponentielle de taux λ . Une densité est :

$$h_1(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

La valeur d'une densité en un point isolé est sans effet sur la loi.

2) a) Probabilité de $T_n > t$.

La n -ième panne n'a pas encore eu lieu à l'instant t si et seulement si le nombre de pannes dans $[0, t]$ est au plus $n - 1$. Donc :

$$\{T_n > t\} = \{N_t \leq n - 1\}.$$

Les événements $\{N_t = k\}$, pour $0 \leq k \leq n - 1$, sont deux à deux disjoints. En additionnant les probabilités de Poisson correspondantes, on obtient :

$$\forall t > 0, \quad P(T_n > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Cette formule repose sur la loi de N_t à chaque instant fixé; aucune indépendance entre les temps successifs n'est nécessaire pour la déduire.

b) Densité de T_n .

La formule de 2 a) tend vers 1 lorsque $t \rightarrow 0^+$. Par continuité monotone des probabilités, $P(T_n > 0) = 1$. Pour $t \geq 0$, la fonction de répartition s'écrit donc :

$$F_{T_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

et elle vaut 0 pour $t < 0$. Elle est continue en 0 puisque la somme y vaut 1. Quand $t \rightarrow +\infty$, chacun des termes $e^{-\lambda t}(\lambda t)^k$ tend vers 0 par croissance comparée; la somme est finie. On vérifie ainsi que $F_{T_n}(t) \rightarrow 1$.

Pour $n \geq 2$, la dérivation de cette somme finie sur $]0, +\infty[$ donne :

$$F'_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Dans la seconde somme, on pose $j = k - 1$, qui parcourt $\{0, \dots, n-2\}$. Les termes de ces indices se compensent et il reste :

$$F'_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

Pour $n = 1$, on dérive directement $1 - e^{-\lambda t}$ et la même formule est valable. On peut donc prendre pour densité :

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est positive ou nulle et continue sauf éventuellement en 0. Pour $b > 0$, le

théorème fondamental du calcul intégral, appliqué sur $[0, b]$ à l'expression de F_{T_n} , donne :

$$\int_0^b h_n(t) dt = F_{T_n}(b) - F_{T_n}(0) = F_{T_n}(b).$$

En faisant tendre b vers $+\infty$, l'intégrale impropre converge et vaut 1. Cette égalité montre aussi que la primitive cumulée de h_n est bien F_{T_n} . Ainsi T_n est une variable aléatoire à densité.

Avec la convention du programme pour la loi gamma de taux 1, on peut également identifier λT_n comme suivant la loi gamma de forme n . La loi de T_n est donc une gamma de forme n et de taux λ , ce qui est cohérent avec la loi exponentielle obtenue lorsque $n = 1$.

3) Première panne de deux composants.

Notons Y_1, Y_2 les temps de première panne des deux composants. Chacun suit la loi exponentielle de taux λ , puisque les composants sont identiques au précédent.

On suppose que Y_1 et Y_2 sont indépendants : cela modélise deux composants dont les défaillances ne s'influencent pas et qui ne sont pas soumis à une cause commune de panne dans le modèle. Cette indépendance des deux temps de première panne suffit ; il n'est pas nécessaire d'ajouter une hypothèse sur toutes les pannes ultérieures.

La première panne de l'appareil considéré se produit à l'instant $T = \min(Y_1, Y_2)$. Pour $t \geq 0$:

$$\{T > t\} = \{Y_1 > t\} \cap \{Y_2 > t\}.$$

Par indépendance :

$$P(T > t) = P(Y_1 > t)P(Y_2 > t) = e^{-\lambda t}e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}.$$

Ainsi T suit la loi exponentielle de taux 2λ , de fonction de répartition :

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

et de densité $h_T(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}$ pour $t > 0$, nulle pour $t \leq 0$.

Sans l'hypothèse d'indépendance, les seules lois marginales de Y_1 et Y_2 ne déterminent pas celle de leur minimum. Par exemple, si $Y_1 = Y_2$, le minimum aurait le taux λ .

Problème

Les notations f_n et g_n sont désormais celles du problème et ne désignent pas les fonctions de l'exercice 1. Pour $x \geq 0$, chacun des facteurs $x + k$ est strictement positif. La fonction g_n est donc continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme $H_n \geq 1$, on a $0 < 1/\sqrt{H_n} \leq 1$: les trois intégrales I_n, U_n, V_n sont bien définies sur des segments, et $I_n = U_n + V_n$ par la relation de Chasles.

Partie 1

1) a) Convergence de H_n et de S_n .

Méthode 1 — Séries de Riemann.

La série de Riemann

$$\sum_{k \geq 1} 1/k$$

diverge puisque son exposant est 1. Ses sommes partielles H_n sont croissantes, à termes positifs, et tendent vers $+\infty$.

La série de Riemann

$$\sum_{k \geq 1} 1/k^2$$

converge puisque son exposant est $2 > 1$. Ses sommes partielles S_n convergent donc vers un réel fini strictement positif, noté S . La valeur exacte de S n'est pas nécessaire.

Méthode 2 — Comparaison avec des intégrales.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour chaque entier $k \geq 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant, on obtient $\ln(n+1) \leq H_n$, donc $H_n \rightarrow +\infty$.

De même, $t \mapsto 1/t^2$ est décroissante. Pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

Pour $n \geq 2$, la somme de ces inégalités donne :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Cette borne vaut aussi pour $n = 1$. Comme S_n est croissante et majorée, le théorème de la limite monotone assure sa convergence. En particulier, $1 \leq S_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.

La première méthode applique directement le cours sur les séries ; la seconde fournit en plus une borne utilisable dans la suite.

b) Encadrement de $\ln(1+x)$.

Méthode 1 — Étude de deux différences.

Pour $x \geq 0$, posons $a(x) = x - \ln(1+x)$ et $b(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$. Ces fonctions sont dérivables sur un ouvert contenant $[0, +\infty[$, et $a(0) = b(0) = 0$.

$$a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0,$$

$$b'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

Elles sont donc croissantes sur $[0, +\infty[$ et y restent positives ou nulles. Cela donne :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Méthode 2 — Intégration d'un encadrement.

Pour tout $t \geq 0$, on a $1/(1+t) \leq 1$ et :

$$\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{t^2}{1+t} \geq 0.$$

Ainsi $1-t \leq 1/(1+t) \leq 1$. Ces fonctions sont continues sur $[0, x]$. En intégrant cet encadrement entre 0 et $x \geq 0$, on obtient :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) \leq x.$$

L'étude des différences transforme l'inégalité en une question de monotonie ;
l'intégration fournit directement les deux bornes à partir d'une identité rationnelle.

c) Équivalent de H_n .

Méthode 1 — Sommation de l'inégalité logarithmique.

La méthode demandée consiste à appliquer 1 b) à $x = 1/k$, puis à sommer les inégalités de $k = 1$ à n . On obtient :

$$H_n - \frac{S_n}{2} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq H_n.$$

La somme logarithmique est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

On en déduit :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{S_n}{2}.$$

Pour $n \geq 2$, on peut diviser par $\ln n > 0$. D'une part :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \rightarrow 1,$$

car le numérateur du second terme tend vers 0 et son dénominateur vers $+\infty$. D'autre part, S_n est bornée, donc $S_n/(2 \ln n) \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne :

$$\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1, \quad H_n \sim \ln n.$$

Méthode 2 — Encadrement par intégrales.

La décroissance de $1/t$ fournit, comme dans 1 a), $\ln(n+1) \leq H_n$. Pour la borne supérieure, on a $1/k \leq \int_{k-1}^k dt/t$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi :

$$H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln n.$$

En divisant ces deux bornes par $\ln n$ pour $n \geq 2$, on obtient de nouveau $H_n/\ln n \rightarrow 1$. La première preuve respecte la méthode imposée ; la seconde est une comparaison classique entre somme et intégrale, réutilisable pour d'autres suites.

2) a) Relation entre g_n et f_n .

Pour $x \geq 0$, tous les nombres $1 + x/k$ sont strictement positifs. La propriété du

logarithme d'un produit fini donne :

$$f_n(x) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) = \ln \left(\frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n!} \right).$$

En exponentiant puis en prenant l'inverse de cette quantité strictement positive :

$$g_n(x) = e^{-f_n(x)}.$$

b) Encadrement de U_n .

Pour $x \geq 0$, appliquons 1 b) à x/k pour chacun des entiers $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{x}{k} - \frac{x^2}{2k^2} \leq \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \leq \frac{x}{k}.$$

Après sommation :

$$xH_n - \frac{x^2 S_n}{2} \leq f_n(x) \leq xH_n.$$

En changeant de signe, puis en utilisant la croissance de l'exponentielle et 2 a), on obtient :

$$e^{-xH_n} \leq g_n(x) \leq e^{-xH_n + x^2 S_n/2}.$$

Si $0 \leq x \leq 1/\sqrt{H_n}$, alors $x^2 \leq 1/H_n$ et $S_n > 0$. Donc :

$$e^{-xH_n} \leq g_n(x) \leq e^{S_n/(2H_n)} e^{-xH_n}.$$

Les fonctions sont continues sur le segment considéré. La croissance de l'intégrale donne :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{S_n/(2H_n)} \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx.$$

c) Équivalent de U_n .

Puisque $H_n > 0$, une primitive de e^{-xH_n} est $-e^{-xH_n}/H_n$. Ainsi :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx = \frac{1 - e^{-\sqrt{H_n}}}{H_n}.$$

L'encadrement de 2 b), multiplié par $H_n > 0$, devient :

$$1 - e^{-\sqrt{H_n}} \leq H_n U_n \leq e^{S_n/(2H_n)} (1 - e^{-\sqrt{H_n}}).$$

On sait que $H_n \rightarrow +\infty$, donc $e^{-\sqrt{H_n}} \rightarrow 0$. La suite S_n étant bornée, $S_n/(2H_n) \rightarrow 0$ et $e^{S_n/(2H_n)} \rightarrow 1$ par continuité de l'exponentielle. Les deux bornes tendent vers 1. Ainsi :

$$H_n U_n \rightarrow 1, \quad U_n \sim \frac{1}{H_n}.$$

Le raisonnement calcule et encadre les intégrales pour chaque n ; il ne nécessite aucun échange entre limite et intégrale.

d) Encadrement de V_n .

Pour $x \in [1/\sqrt{H_n}, 1]$, la borne déjà démontrée est :

$$0 < g_n(x) \leq e^{-xH_n + x^2 S_n/2} \leq e^{S_n/2} e^{-xH_n},$$

car $x^2 \leq 1$. En intégrant sur ce segment :

$$0 \leq V_n \leq e^{S_n/2} \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 e^{-xH_n} dx.$$

L'intégrale vaut :

$$\frac{e^{-\sqrt{H_n}} - e^{-H_n}}{H_n} \leq \frac{e^{-\sqrt{H_n}}}{H_n}.$$

On conclut :

$$0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} \frac{e^{S_n/2}}{H_n}.$$

Pour $n = 1$, $H_1 = 1$, le segment d'intégration est réduit à un point et $V_1 = 0$; l'inégalité reste valable.

e) Négligeabilité de V_n .

Le résultat de 2 d), multiplié par $H_n > 0$, donne :

$$0 \leq H_n V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} e^{S_n/2}.$$

La suite $e^{S_n/2}$ converge vers $e^{S/2}$ et est donc bornée. Comme $e^{-\sqrt{H_n}} \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers 0. Ainsi $H_n V_n \rightarrow 0$.

C'est exactement la définition de :

$$V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right).$$

3) Équivalent de I_n .

Par Chasles, $I_n = U_n + V_n$. Il ne faut pas additionner formellement des équivalents ; calculons le rapport recherché :

$$H_n I_n = H_n U_n + H_n V_n \rightarrow 1 + 0 = 1.$$

Ainsi $I_n \sim 1/H_n$. De plus, $H_n/\ln n \rightarrow 1$, donc $\ln n/H_n \rightarrow 1$. Pour $n \geq 2$:

$$\frac{I_n}{1/\ln n} = I_n \ln n = (H_n I_n) \frac{\ln n}{H_n} \rightarrow 1.$$

On obtient l'équivalent demandé :

$$I_n \sim \frac{1}{\ln n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Partie 2

Les fonctions e_k sont des polynômes de degré $n-1$, avec la convention du produit vide lorsque $n=1$. Elles appartiennent à E_n , dont la dimension est n .

1) Étude de la famille $(e_1, \dots, e_n)$.

a) Liberté et propriété de base.

Méthode 1 — Évaluation d'une relation linéaire.

Supposons que des réels $a_1, \dots, a_n$ vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n a_k e_k(x) = 0.$$

Fixons $j \in \{1, \dots, n\}$ et évaluons cette relation en $x = -j$. Si $k \neq j$, le produit définissant e_k contient le facteur $x + j$, donc $e_k(-j) = 0$. En revanche :

$$e_j(-j) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} (i - j) \neq 0,$$

car tous ses facteurs sont non nuls ; pour $n = 1$, ce produit vaut 1. La relation évaluée donne donc $a_j e_j(-j) = 0$, d'où $a_j = 0$. Cela vaut pour tout j , donc la famille est libre.

Elle contient n éléments dans l'espace E_n de dimension n . C'est donc une base de E_n .

Méthode 2 — Construction des coordonnées d'un polynôme.

Pour tout $Q \in E_n$, les nombres $e_k(-k)$ sont non nuls. On définit le polynôme :

$$R(x) = Q(x) - \sum_{k=1}^n \frac{Q(-k)}{e_k(-k)} e_k(x).$$

Son degré est au plus $n - 1$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, l'annulation des termes d'indice $k \neq j$ montre que :

$$R(-j) = Q(-j) - \frac{Q(-j)}{e_j(-j)} e_j(-j) = 0.$$

Le polynôme R possède donc n racines distinctes. Un polynôme non nul de degré au plus $n - 1$ ne peut pas en avoir autant : R est nul. Ainsi :

$$\forall Q \in E_n, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^n \frac{Q(-k)}{e_k(-k)} e_k(x).$$

La famille est donc génératrice. Comme elle comporte $n = \dim E_n$ éléments, elle est une base, donc libre.

La première méthode isole les coefficients d'une relation nulle; la seconde donne directement les coordonnées de tout polynôme de E_n et prépare le calcul de la question suivante.

b) Existence des coefficients λ_k .

Le polynôme constant $Q(x) = n!$ a un degré $0 \leq n - 1$ et appartient donc à E_n . Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n , ce polynôme possède des coordonnées réelles dans cette base. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n! = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x).$$

Ces coefficients sont même uniques, par la liberté de la famille.

c) Calcul de λ_k .

On évalue l'identité de 1 b) en $x = -k$. Tous les termes autres que celui d'indice k s'annulent. Donc :

$$n! = \lambda_k e_k(-k).$$

Calculons le produit non nul $e_k(-k)$ en séparant les indices inférieurs et supérieurs à k :

$$e_k(-k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (i - k) \right) \left(\prod_{i=k+1}^n (i - k) \right).$$

Les $k - 1$ premiers facteurs sont négatifs et leurs valeurs absolues parcourent $\{1, \dots, k - 1\}$. Les derniers facteurs parcourent $\{1, \dots, n - k\}$. Par conséquent :

$$e_k(-k) = (-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!.$$

Cette expression vaut aussi aux extrémités $k = 1$ et $k = n$, en utilisant $0! = 1$. On peut donc diviser par ce nombre non nul :

$$\lambda_k = \frac{n!}{(-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!} = (-1)^{k-1}n \binom{n-1}{k-1}.$$

Les exposants $k - 1$ et $k + 1$ ont la même parité. Ainsi la forme adaptée à la question suivante est :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_k = n(-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1}.$$

Pour $n = 1$, cette formule donne $\lambda_1 = 1$, conformément à $e_1(x) = 1$.

2) Expression exacte de I_n .

Pour $x \in [0, 1]$, aucun facteur $x + i$ n'est nul. On divise l'identité de 1 b) par le produit $(x + 1) \cdots (x + n)$. Dans le terme d'indice k , tous les facteurs de $e_k(x)$ se simplifient et il reste $1/(x + k)$. Ainsi :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + k}.$$

Il s'agit d'une somme finie de fonctions continues sur $[0, 1]$. La linéarité de l'intégrale donne :

$$I_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 \frac{dx}{x + k}.$$

Comme $x + k > 0$, une primitive de $1/(x + k)$ est $\ln(x + k)$, et :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + k} = \ln(k + 1) - \ln k.$$

En utilisant 1 c), on obtient :

$$I_n = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} (\ln(k+1) - \ln k).$$

Pour $n = 1$, cela donne $I_1 = \ln 2$, également obtenu en intégrant $g_1(x) = 1/(x+1)$.

3) Équivalent de la somme binomiale.

Notons la somme à étudier :

$$J_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1).$$

Nous allons établir l'identité exacte $J_n = I_n/n$ en regroupant des sommes finies.

D'après 2), posons :

$$B_n = \frac{I_n}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \ln k.$$

Dans la seconde somme, effectuons le changement d'indice $j = k - 1$. Le signe qui inclut le signe moins extérieur vérifie $-(-1)^{j+2} = (-1)^{j+1}$. Ainsi :

$$B_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j-1} \ln(j+1) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} \ln(j+1).$$

Pour $1 \leq j \leq n-1$, les deux coefficients de $\ln(j+1)$ s'additionnent. La formule du triangle de Pascal donne :

$$\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} = \binom{n}{j}.$$

Aux extrémités, le terme $j = 0$ est uniquement dans la seconde somme et son coefficient est $(-1)^1 \binom{n-1}{0} = -1 = (-1)^1 \binom{n}{0}$; il est de toute façon nul puisque $\ln 1 = 0$. Le terme

$j = n$ est uniquement dans la première somme et son coefficient est $(-1)^{n+1} \binom{n-1}{n-1} = (-1)^{n+1} \binom{n}{n}$. On obtient donc, y compris pour $n = 1$:

$$B_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \ln(j+1) = J_n.$$

Par conséquent, $J_n = I_n/n$. Pour $n \geq 2$, le rapport donnant l'équivalent est :

$$\frac{J_n}{1/(n \ln n)} = n \ln n J_n = \ln n I_n \rightarrow 1$$

d'après la partie 1, question 3. Finalement :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1) \sim \frac{1}{n \ln n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

L'identité avec I_n/n montre aussi que cette somme alternée est strictement positive pour tout $n \geq 1$, puisque g_n est strictement positive sur $[0, 1]$.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2 : la demande de programmation a été convertie en Python. La fonction conserve le calcul de $f_n(x)$ défini par la récurrence ; la réalisation proposée utilise une boucle accessible au programme actuel.