



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2026

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ECRICOME 2026, mathématiques approfondies

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on utilise le développement limité usuel $e^u = 1 + u + o(u)$ au voisinage de 0, d'où $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ et, pour tout réel a , $e^{-at} = 1 - at + o(t)$ quand $t \rightarrow 0$.

1. (a) Objectif et méthode. La fonction $g_1 : t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$; la seule borne à étudier est 0. On montre que g_1 se prolonge par continuité en 0; une seconde méthode utilise une comparaison.

Méthode 1 — Prolongement par continuité.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $1 - e^{-t} = t + o(t)$, donc $g_1(t) = 1 + o(1)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t) = 1$.

La fonction g_1 se prolonge donc en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ en posant $g_1(0) = 1$: l'intégrale est faussement impropre en 0.

Méthode 2 — Comparaison de fonctions positives.

La fonction exponentielle est convexe, donc son graphe est au-dessus de sa tangente en 0 : pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$. Avec $u = -t$, on obtient $e^{-t} \geq 1 - t$, donc pour tout $t \in]0, 1]$:

$$0 \leq g_1(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} \leq 1.$$

La positivité vient de $e^{-t} \leq 1$ pour $t \geq 0$. Comme $\int_0^1 1 \, dt$ converge, le critère de comparaison pour des fonctions positives donne la convergence de $\int_0^1 g_1(t) \, dt$.

La première méthode est la plus directe dès qu'une limite finie apparaît; la seconde est utile lorsqu'on dispose d'un encadrement simple sans chercher la limite.

Conclusion

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \text{ converge.}$$

(b) Objectif et méthode. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$; l'intégrale est impropre en $+\infty$ seulement. On compare à une intégrale de référence.

Méthode 1 — Majoration par l'exponentielle.

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge : pour $A \geq 1$,
 $\int_1^A e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-A} \rightarrow e^{-1}$. Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Méthode 2 — Négligeabilité devant une fonction de Riemann.

Par croissances comparées, $t^2 \cdot \frac{e^{-t}}{t} = t e^{-t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Les fonctions sont positives et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$), d'où la convergence.

La première méthode demande de trouver une majoration explicite; la seconde est plus systématique et s'applique à de nombreuses fonctions de la forme « polynôme fois exponentielle ».

Conclusion

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge.}$$

2. (a) Objectif et méthode. Soit $a > 0$ et $g_a : t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}$, continue sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$; on coupe en 1 et on étudie chaque borne.

Étude en 0. Quand $t \rightarrow 0^+$, $e^{-t} - e^{-at} = (1 - t) - (1 - at) + o(t) = (a - 1)t + o(t)$, donc $g_a(t) \rightarrow a - 1$. La fonction g_a se prolonge par continuité en 0, donc $\int_0^1 g_a(t) dt$ converge.

Étude en $+\infty$. Pour $t \geq 1$, $|g_a(t)| \leq \frac{e^{-t} + e^{-at}}{t} \leq e^{-t} + e^{-at}$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ convergent car $a > 0$ (pour $A \geq 1$, $\int_1^A e^{-at} dt = \frac{e^{-a} - e^{-aA}}{a} \rightarrow \frac{e^{-a}}{a}$).

Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} |g_a(t)| dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} g_a(t) dt$ converge absolument, donc converge.

Conclusion

$$\text{pour tout } a > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt \text{ converge.}$$

(b) Objectif et méthode. Soit $a \leq 0$. On montre que l'intégrale diverge en $+\infty$ en minorant $-g_a$ par une fonction positive d'intégrale divergente.

Pour $t \geq 1$, on a $-at \geq 0$, donc $e^{-at} \geq 1$, et ainsi :

$$-g_a(t) = \frac{e^{-at} - e^{-t}}{t} \geq \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq \frac{1 - e^{-1}}{t} > 0.$$

La dernière inégalité vient de $e^{-t} \leq e^{-1}$ pour $t \geq 1$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (pour

$A \geq 1$, $\int_1^A \frac{dt}{t} = \ln A \rightarrow +\infty$). Par comparaison de fonctions positives,

$\int_1^{+\infty} -g_a(t) dt$ diverge, donc $\int_1^{+\infty} g_a(t) dt$ diverge.

Si $\int_0^{+\infty} g_a(t) dt$ convergeait, $\int_1^{+\infty} g_a(t) dt$ convergerait aussi, ce qui est faux.

Conclusion

pour tout réel $a \leq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ diverge.

3. Soit $x > 0$. On note Φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\Phi(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ si $t > 0$ et $\Phi(0) = 1$. D'après 1(a), Φ est continue sur $[0, +\infty[$.

(a) Objectif et méthode. On suit l'indication : on écrit l'intégrande à l'aide de Φ , puis on effectue un changement de variable affine sur un segment.

Pour $t \in]0, x]$, l'indication donne :

$$\frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} = \frac{1 - e^{-at}}{t} - \frac{1 - e^{-t}}{t} = a \Phi(at) - \Phi(t).$$

La fonction $t \mapsto a\Phi(at) - \Phi(t)$ est continue sur $[0, x]$ et coïncide avec g_a sur $]0, x]$.

L'intégrale $\int_0^x g_a(t) dt$ est donc l'intégrale sur un segment de cette fonction continue, et par linéarité :

$$\int_0^x g_a(t) dt = \int_0^x a \Phi(at) dt - \int_0^x \Phi(t) dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = at$. Ce changement de variable est affine, de classe $\mathcal{C}^1$, et Φ est continue sur $[0, ax]$; on a $du = a dt$, d'où

$\int_0^x a \Phi(at) dt = \int_0^{ax} \Phi(u) du$. Par la relation de Chasles (valable que ax soit supérieur ou inférieur à x) :

$$\int_0^x g_a(t) dt = \int_0^{ax} \Phi(u) du - \int_0^x \Phi(u) du = \int_x^{ax} \Phi(u) du.$$

Le segment d'extrémités x et ax est inclus dans $]0, +\infty[$, où $\Phi(u) = \frac{1}{u} - \frac{e^{-u}}{u}$, ces deux

fonctions étant continues. Par linéarité :

$$\int_x^{ax} \Phi(u) \, du = [\ln u]_x^{ax} - \int_x^{ax} \frac{e^{-u}}{u} \, du = \ln(ax) - \ln(x) - \int_x^{ax} \frac{e^{-u}}{u} \, du.$$

Comme $\ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$, on conclut :

Conclusion

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \, dt = \ln(a) - \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

(b) Objectif et méthode. On fait tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité de 3(a) : le membre de gauche tend vers $G(a)$ par définition d'une intégrale convergente (question 2(a)) ; il reste à montrer que l'intégrale du membre de droite tend vers 0.

Notons $m = \min(x, ax)$ et $M = \max(x, ax)$. Pour $x \geq \frac{1}{\min(1, a)}$, on a $m \geq 1$. Pour

$t \in [m, M]$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, donc :

$$\left| \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \right| = \int_m^M \frac{e^{-t}}{t} \, dt \leq \int_m^M e^{-t} \, dt = e^{-m} - e^{-M} \leq e^{-m}.$$

Comme $m = x \min(1, a) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \rightarrow 0$.

Par passage à la limite dans 3(a), quand $x \rightarrow +\infty$: $G(a) = \ln(a) - 0$.

Conclusion

pour tout $a > 0$, $G(a) = \ln(a)$. En particulier $G(1) = 0$, ce qui est cohérent avec $g_1 = 0$.

4. Objectif et méthode. La fonction $g : u \mapsto \frac{u-1}{\ln(u)}$ est continue sur $]0, 1[$ (le logarithme ne s'y annule pas) ; l'intégrale est impropre en 0 et en 1. On effectue le changement de variable $u = e^{-t}$ sur des segments, puis on passe à la limite.

Justification du changement de variable. L'application $\psi : t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$; on a $\psi'(t) = -e^{-t}$. Pour $t > 0$:

$$g(e^{-t}) = \frac{e^{-t} - 1}{-t} = \frac{1 - e^{-t}}{t}, \text{ donc}$$

$$g(\psi(t)) \psi'(t) = -\frac{(1 - e^{-t})e^{-t}}{t} = -\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = -g_2(t),$$

où $g_2(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est la fonction de la question 2 pour $a = 2$.

Pour $0 < \alpha < \beta$, la formule de changement de variable sur le segment $[\alpha, \beta]$ (où ψ est $\mathcal{C}^1$ et g continue sur $\psi([\alpha, \beta])$) donne :

$$\int_{e^{-\beta}}^{e^{-\alpha}} g(u) \, du = - \int_{e^{-\alpha}}^{e^{-\beta}} g(u) \, du = - \int_{\alpha}^{\beta} g(\psi(t)) \psi'(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} g_2(t) \, dt.$$

Borne 0. Pour $y \in]0, \frac{1}{2}[$, avec $\alpha = \ln 2$ et $\beta = -\ln y$: $\int_y^{1/2} g(u) \, du = \int_{\ln 2}^{-\ln y} g_2(t) \, dt.$

Quand $y \rightarrow 0^+$, $-\ln y \rightarrow +\infty$; comme $\int_{\ln 2}^{+\infty} g_2(t) \, dt$ converge (question 2(a)),
 $\int_y^{1/2} g(u) \, du \rightarrow \int_{\ln 2}^{+\infty} g_2(t) \, dt.$

Borne 1. Pour $z \in]\frac{1}{2}, 1[$, avec $\alpha = -\ln z$ et $\beta = \ln 2$: $\int_{1/2}^z g(u) \, du = \int_{-\ln z}^{\ln 2} g_2(t) \, dt.$

Quand $z \rightarrow 1^-$, $-\ln z \rightarrow 0^+$ et, comme $\int_0^{\ln 2} g_2(t) \, dt$ converge,

$$\int_{1/2}^z g(u) \, du \rightarrow \int_0^{\ln 2} g_2(t) \, dt.$$

Les deux intégrales $\int_0^{1/2} g$ et $\int_{1/2}^1 g$ convergent donc, ce qui prouve l'existence de

$\int_0^1 g(u) \, du$, et par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} \, du = \int_0^{\ln 2} g_2(t) \, dt + \int_{\ln 2}^{+\infty} g_2(t) \, dt = G(2) = \ln 2.$$

Conclusion

l'intégrale $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} \, du$ converge et vaut $\ln 2$.

Remarque. L'existence pouvait aussi s'obtenir directement : $g(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0^+$ (numérateur tendant vers -1 , dénominateur vers $-\infty$) et $g(u) \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 1^-$ (car $\ln(u) \sim u-1$), donc g se prolonge par continuité sur $[0, 1]$; c'est le prolongement f de la question 5. Le changement de variable reste indispensable pour obtenir la valeur.

5. (a) Objectif et méthode. On reconnaît une somme de Riemann à gauche, et on applique le théorème du cours sur les sommes de Riemann pour une fonction continue sur un segment.

La fonction φ étant continue sur $[0, 1]$, le théorème des sommes de Riemann donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(t) \, dt.$$

Conclusion

la limite vaut $\int_0^1 \varphi(t) \, dt$.

- (b) Objectif et méthode. On programme la fonction f en distinguant les deux cas de sa définition, puis on calcule la somme par une boucle.

Python

```
import numpy as np

def f(u):
    if u == 0 or u == 1:
        return u
    else:
        return (u - 1) / np.log(u)

def Rect(n):
    s = 0
    for k in range(n):          # k prend les valeurs 0, 1, ..., n-1
        s = s + f(k / n)
    return s / n
```

La variable s accumule

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right);$$

`range(n)` parcourt bien les entiers de 0 à $n - 1$, borne exclue, et la fonction renvoie la somme divisée par n .

Lien avec la théorie. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et coïncide avec g sur $]0, 1[$. Pour

$0 < y < z < 1$, $\int_y^z f = \int_y^z g$; en faisant tendre y vers 0 et z vers 1 (continuité de

$x \mapsto \int_0^x f$ et convergence de $\int_0^1 g$), on obtient $\int_0^1 f(u) \, du = \int_0^1 g(u) \, du = \ln 2$.

D'après 5(a), `Rect(n)` tend vers $\ln 2$.

Code exécuté : `Rect(10)  $\approx$  0.6315`, `Rect(100)  $\approx$  0.6874`, `Rect(1000)  $\approx$  0.6926`, à comparer à $\ln 2 \approx 0.6931$.

Conclusion

Rect (n) renvoie

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

qui est une valeur approchée de $\ln 2$.

- (c) Objectif et méthode. On décrit les variables du programme, puis on identifie la quantité renvoyée comme une moyenne empirique, à laquelle on applique la loi faible des grands nombres.

Description du code.

L'instruction `U=rd.random(n)` crée un tableau de n réels $U_0, \dots, U_{n-1}$, réalisations de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Dans la boucle, le test reproduit la définition de f : la variable s reçoit $f(U_k)$ à chaque tour. Le cas $U_k = 1$ ne se produit pas, puisque `rd.random` renvoie des valeurs dans $[0, 1[$; le cas $U_k = 0$ est de probabilité nulle mais est prévu pour éviter le calcul de $\ln(0)$.

En sortie de boucle,

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} f(U_k)$$

et la fonction renvoie

$$\text{res} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(U_k).$$

Interprétation. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée ; la variable $f(U)$ est donc bornée et admet une espérance et une variance. Par le théorème de transfert pour une variable à densité :

$$E(f(U)) = \int_0^1 f(u) \cdot 1 \, du = \ln 2.$$

Les variables $f(U_0), \dots, f(U_{n-1})$ sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes) et de même loi que $f(U)$. Par la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(U_k)$$

converge en probabilité vers $\ln 2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Code exécuté : deux appels ont donné $\text{prog}(1000) \approx 0.680$ et $\text{prog}(100000) \approx 0.6936$; ces valeurs changent d'un appel à l'autre.

Conclusion

`prog(n)` renvoie une valeur aléatoire, la moyenne empirique de $f(U_0), \dots, f(U_{n-1})$ pour n variables uniformes indépendantes; c'est une approximation de $\int_0^1 f(u) \, du = \ln 2$ par la méthode de Monte-Carlo.

(d) Objectif et méthode. On lit la figure, puis on justifie l'observation en estimant l'erreur de la méthode des rectangles.

Lecture de la figure. La courbe en pointillés (méthode des rectangles) croît régulièrement et reste entre 0.690 et 0.693 dès que $n \geq 200$, très près de $\ln 2 \approx 0.6931$. La courbe en trait plein (Monte-Carlo) oscille : elle descend jusqu'à environ 0.671 et monte jusqu'à environ 0.710 pour n entre 50 et 500, et s'écarte encore de $\ln 2$ d'environ 0.005 pour n voisin de 850.

Justification de l'erreur de la méthode des rectangles. La fonction f est croissante sur $[0, 1]$. En effet, sur $]0, 1[$, f est dérivable et :

$$f'(u) = \frac{\ln(u) - \frac{u-1}{u}}{\ln(u)^2} = \frac{\psi(u)}{\ln(u)^2},$$

avec $\psi(u) = \ln(u) - 1 + \frac{1}{u}$.

On a $\psi'(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} = \frac{u-1}{u^2} < 0$ sur $]0, 1[$, donc ψ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ avec $\psi(1) = 0$, d'où $\psi(u) > 0$ pour $u \in]0, 1[$. Ainsi $f' > 0$ sur $]0, 1[$, et f , continue sur $[0, 1]$, est croissante sur $[0, 1]$.

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $u \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(u) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. En intégrant sur ce segment de longueur $\frac{1}{n}$, puis en sommant pour k de 0 à $n-1$:

$$\text{Rect}(n) \leq \int_0^1 f(u) \, du \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \text{Rect}(n) + \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

Comme $f(1) - f(0) = 1$, on obtient $0 \leq \ln 2 - \text{Rect}(n) \leq \frac{1}{n}$: l'erreur est certaine et majorée par $\frac{1}{n}$. Cela explique que la courbe en pointillés soit sous $\ln 2$ et s'en approche régulièrement.

Pour la méthode de Monte-Carlo, l'erreur est aléatoire. L'inégalité de

Bienaymé-Tchebychev donne seulement, pour $\varepsilon > 0$, $P(|\text{res} - \ln 2| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(f(U))}{n\varepsilon^2}$, ce qui correspond à des fluctuations de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, beaucoup plus lentes à disparaître que $\frac{1}{n}$.

Conclusion

la suite obtenue par la méthode des rectangles (question 5b, pointillés) donne une meilleure approximation de $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} \, du$.

Exercice 2

- (a) Objectif et méthode. La matrice A est triangulaire supérieure ; ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Conclusion

$$\text{Sp}(A) = \{0, 5, 12\}.$$

(b) Objectif et méthode. On utilise le critère suffisant de diagonalisation.

La matrice A est d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres deux à deux distinctes.

Conclusion

A est diagonalisable.

(c) Objectif et méthode. On cherche une base de chaque sous-espace propre en

$$\text{résolvant } AX = \lambda X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 0$: $AX = 0$ équivaut à $-2z = 0$, $5y = 0$, $12z = 0$, soit $y = z = 0$. On peut

$$\text{prendre } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 5$: $AX = 5X$ équivaut à $-2z = 5x$, $5y = 5y$, $12z = 5z$, soit $z = 0$ puis $x = 0$. On

$$\text{peut prendre } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 12$: $AX = 12X$ équivaut à $-2z = 12x$, $5y = 12y$, $12z = 12z$, soit $y = 0$ et

$$z = -6x. \text{ On peut prendre } X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vérification : } AX_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 72 \end{pmatrix} = 12X_3.$$

$$\text{On pose } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

La matrice V est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux 1, 1, 6 non nuls, donc inversible. Ses colonnes vérifient $AX_j = \lambda_j X_j$, ce qui s'écrit $AV = VD$, d'où $A = VDV^{-1}$.

Conclusion

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, 5, 12) \text{ conviennent.}$$

2. (a) Objectif et méthode. On dérive les monômes et on applique la définition de φ .

$$P_0 = 1 : P'_0 = P''_0 = 0, \text{ donc } \varphi(P_0) = 0.$$

$$P_1 = x : P'_1 = 1, P''_1 = 0, \text{ donc } \varphi(P_1) = 5x = 5P_1.$$

Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket : P'_k = kx^{k-1}$ et $P''_k = k(k-1)x^{k-2}$, donc :

$$\varphi(P_k) = (x^2 - 1)k(k-1)x^{k-2} + 5x \cdot kx^{k-1} = (k(k-1) + 5k)x^k - k(k-1)x^{k-2}.$$

Comme $k(k-1) + 5k = k^2 + 4k = k(k+4)$:

Conclusion

$$\varphi(P_0) = 0, \varphi(P_1) = 5P_1 \text{ et, pour } k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varphi(P_k) = k(k+4)P_k - k(k-1)P_{k-2}.$$

Remarque. La formule $\varphi(P_k) = k(k+4)P_k - k(k-1)P_{k-2}$ reste vraie pour $k \in \{0, 1\}$ en convenant que le second terme est nul, puisque $k(k-1) = 0$.

(b) Objectif et méthode. On décompose P dans la base canonique et on utilise la linéarité de φ (qui découle de la linéarité de la dérivation) et la formule de 2(a).

Soit P unitaire de degré $d \leq n$:

$$P = P_d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j P_j.$$

Par linéarité :

$$\varphi(P) = d(d+4)P_d - d(d-1)P_{d-2} + \sum_{j=0}^{d-1} a_j (j(j+4)P_j - j(j-1)P_{j-2}).$$

Tous les termes autres que $d(d+4)P_d$ sont de degré au plus $d-1$. Le coefficient de x^d dans $\varphi(P)$ est donc $d(d+4)$, et $\varphi(P)$ est de degré au plus d .

Si $d \geq 1$, $d(d+4) \neq 0$, donc $\varphi(P)$ est de degré exactement d et de coefficient dominant $d(d+4)$.

Si $d = 0$, $P = 1$ et $\varphi(P) = 0$ est le polynôme nul.

Conclusion

pour $d \geq 1$, $\varphi(P)$ est de degré d et de coefficient dominant $d(d+4)$; pour $d = 0$, $\varphi(P) = 0$. Dans tous les cas, le coefficient de x^d dans $\varphi(P)$ vaut $d(d+4)$.

3. (a) Objectif et méthode. On vérifie la linéarité, puis que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$.

Linéarité : pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$ et

$(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q''$, donc :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (x^2 - 1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 5x(\lambda P' + \mu Q') = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q).$$

Stabilité : si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $\deg((x^2 - 1)P'') \leq 2 + (\deg P - 2)$ lorsque $\deg P \geq 2$ (et ce terme est nul sinon), et $\deg(5xP') \leq 1 + (\deg P - 1)$ lorsque $\deg P \geq 1$ (et ce terme est nul sinon). Donc $\deg \varphi(P) \leq \deg P \leq n$.

Conclusion

φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Objectif et méthode. La colonne d'indice j (en numérotant de 0 à n) de la matrice contient les coordonnées de $\varphi(P_j)$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$, données par 2(a).

La matrice $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ de φ dans la base canonique est donc définie par :

$m_{j,j} = j(j+4)$ pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$; $m_{j-2,j} = -j(j-1)$ pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$; tous les autres coefficients sont nuls.

La matrice M est triangulaire supérieure : sa diagonale est $(0, 5, 12, 21, \dots, n(n+4))$ et sa deuxième sur-diagonale est $(-2, -6, -12, \dots, -n(n-1))$.

Par exemple, pour $n = 4$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

M est la matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $j(j+4)$, de coefficients $-j(j-1)$ en position $(j-2, j)$, et nulle ailleurs.

(c) Objectif et méthode. On utilise l'inégalité de degré établie en 3(a).

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P \in \mathbb{R}_k[x]$. D'après 3(a), $\deg \varphi(P) \leq \deg P \leq k$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_k[x]$.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{R}_k[x]$ est stable par φ .

(d) Objectif et méthode. On calcule les images des vecteurs de la base canonique (P_0, P_1, P_2) .

Comme $n \geq 2$, Ψ est la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[x]$, stable d'après 3(c). Par 2(a) : $\Psi(P_0) = 0$, $\Psi(P_1) = 5P_1$, $\Psi(P_2) = 12P_2 - 2P_0$.

Conclusion

la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = A.$$

4. (a) Objectif et méthode. Les valeurs propres de φ sont celles de sa matrice M , qui est triangulaire.

La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $j(j+4)$, $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Conclusion

$$\text{Sp}(\varphi) = \{k(k+4), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

(b) Objectif et méthode. On suit l'indication : on montre que $u : x \mapsto x(x+4)$ est injective sur $[0, +\infty[$.

La fonction u est dérivable et $u'(x) = 2x + 4 > 0$ sur $[0, +\infty[$, donc u est strictement croissante, et en particulier injective, sur $[0, +\infty[$. Les nombres $u(0), u(1), \dots, u(n)$ sont donc deux à deux distincts.

Conclusion

φ admet les $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $0 < 5 < 12 < \dots < n(n+4)$.

(c) Objectif et méthode. On applique le critère de diagonalisation par le nombre de valeurs propres distinctes.

L'espace $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$ et φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc φ est diagonalisable.

De plus, la somme des sous-espaces propres est directe, donc la somme de leurs dimensions est au plus $n+1$. Chacun des $n+1$ sous-espaces propres est de dimension au moins 1, donc chacun est de dimension exactement 1.

Conclusion

φ est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

(d) Objectif et méthode. On utilise que le sous-espace propre est une droite, puis on normalise un vecteur directeur par son coefficient dominant.

Existence. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après 4(c), $E_{k(k+4)}(\varphi)$ est de dimension 1 : il existe un polynôme non nul Q tel que $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(Q)$. Notons $c \neq 0$ le coefficient dominant de Q . Le polynôme $G_k = \frac{1}{c}Q$ est unitaire et $\text{Vect}(G_k) = \text{Vect}(Q) = E_{k(k+4)}(\varphi)$.

Unicité. Si H est unitaire et $\text{Vect}(H) = E_{k(k+4)}(\varphi)$, alors $H \in \text{Vect}(G_k)$ et $H \neq 0$, donc $H = \lambda G_k$ avec $\lambda \neq 0$. Le coefficient dominant de H est λ , d'où $\lambda = 1$ et $H = G_k$.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme unitaire G_k tel que $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(G_k)$.

(e) Objectif et méthode. On cherche des polynômes unitaires vecteurs propres pour les valeurs propres 0 et 5, à l'aide de 2(a).

On a $\varphi(P_0) = 0 = 0 \cdot P_0$ avec $P_0 \neq 0$ unitaire, donc $P_0 \in E_0(\varphi)$ et, par unicité, $G_0 = P_0$.

On a $\varphi(P_1) = 5P_1$ avec $P_1 \neq 0$ unitaire, donc $G_1 = P_1$.

Conclusion

$G_0 = 1$ et $G_1 = x$.

(f) Objectif et méthode. On vérifie que $x^2 - \frac{1}{6}$ est un polynôme unitaire non nul de $E_{12}(\varphi)$.

Par linéarité et 2(a) : $\varphi\left(P_2 - \frac{1}{6}P_0\right) = 12P_2 - 2P_0 - 0 = 12\left(P_2 - \frac{1}{6}P_0\right)$.

Le polynôme $x^2 - \frac{1}{6}$ est unitaire, non nul, et appartient à $E_{12}(\varphi) = E_{2(2+4)}(\varphi)$. Par unicité en 4(d), c'est G_2 .

Conclusion

$G_2(x) = x^2 - \frac{1}{6}$. On retrouve le vecteur propre

$$\frac{1}{6}X_3 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de la question 1(c), puisque A est la matrice de Ψ .

(g) Objectif et méthode. On compare les coefficients de plus haut degré dans l'égalité

$\varphi(G_k) = k(k+4)G_k$. Une seconde méthode utilise la stabilité des $\mathbb{R}_j[x]$.

Méthode 1 — Comparaison des coefficients dominants.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $d = \deg G_k$. Le polynôme G_k est unitaire de degré $d \leq n$; d'après 2(b), le coefficient de x^d dans $\varphi(G_k)$ vaut $d(d+4)$. Dans $k(k+4)G_k$, ce coefficient vaut $k(k+4)$. L'égalité $\varphi(G_k) = k(k+4)G_k$ donne $d(d+4) = k(k+4)$, d'où $d = k$ par injectivité de u sur $[0, +\infty[$ (question 4(b)).

Méthode 2 — Restriction aux sous-espaces stables.

Le sous-espace $\mathbb{R}_k[x]$ est stable par φ (question 3(c)). La matrice de la restriction φ_k de φ à $\mathbb{R}_k[x]$ dans la base $(P_0, \dots, P_k)$ est la sous-matrice de M formée des $k+1$ premières lignes et colonnes; elle est triangulaire de diagonale $j(j+4)$, $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Donc $k(k+4)$ est valeur propre de φ_k : il existe $P \in \mathbb{R}_k[x]$ non nul tel que $\varphi(P) = k(k+4)P$. Alors $P \in E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(G_k)$, donc G_k est colinéaire à P et $\deg G_k \leq k$.

Si $k \geq 1$ et $\deg G_k \leq k-1$, alors $G_k \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ serait vecteur propre de φ_{k-1} pour la valeur propre $k(k+4)$. Or les valeurs propres de φ_{k-1} sont les $j(j+4)$, $j \leq k-1$, toutes différentes de $k(k+4)$: contradiction. Donc $\deg G_k = k$ (le cas $k=0$ est immédiat, $G_0 = 1$).

La première méthode est un calcul direct sur les coefficients; la seconde illustre l'usage des sous-espaces stables, utile quand on ne dispose pas d'une formule explicite pour le terme dominant.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg G_k = k$.

5. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et P un vecteur propre de φ associé à $k(k+4)$: $P \neq 0$ et $\varphi(P) = k(k+4)P$.

(a) Objectif et méthode. On dérive la composée $x \mapsto P(-x)$.

Par dérivation d'une composée : $Q'(x) = -P'(-x)$, puis $Q''(x) = P''(-x)$.

Conclusion

$$Q'(x) = -P'(-x) \text{ et } Q''(x) = P''(-x).$$

(b) Objectif et méthode. On calcule $\varphi(Q)(x)$ et on fait apparaître $\varphi(P)(-x)$.

Le polynôme Q a le même degré que P , donc $Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \varphi(Q)(x) &= (x^2 - 1)P''(-x) - 5xP'(-x) = ((-x)^2 - 1)P''(-x) + 5(-x)P'(-x) \\ &= \varphi(P)(-x). \end{aligned}$$

Donc $\varphi(Q)(x) = k(k+4)P(-x) = k(k+4)Q(x)$. Enfin $Q \neq 0$: si Q était nul, on aurait $P(y) = Q(-y) = 0$ pour tout réel y , donc $P = 0$.

Conclusion

Q est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+4)$.

(c) Objectif et méthode. On applique 5(b) à $P = G_k$, puis on identifie le coefficient de proportionnalité grâce au coefficient dominant.

Le polynôme $x \mapsto G_k(-x)$ appartient à $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(G_k)$, donc il existe un réel λ tel que, pour tout réel x , $G_k(-x) = \lambda G_k(x)$.

D'après 4(g), G_k est unitaire de degré k ; le coefficient de x^k dans $G_k(-x)$ est $(-1)^k$, et dans $\lambda G_k(x)$ il vaut λ . Donc $\lambda = (-1)^k$.

Conclusion

pour tout réel x , $G_k(-x) = (-1)^k G_k(x)$: G_k est pair si k est pair, impair si k est impair.

6. Objectif et méthode. On vérifie que l'application est bien définie, puis qu'elle est symétrique, bilinéaire, positive et définie.

Bonne définition. La fonction $w : t \mapsto (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = (1 - t^2)\sqrt{1 - t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, positive, et strictement positive sur $] -1, 1[$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)w(t)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.

Symétrie : $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, donc $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.

Bilinéarité : par linéarité de l'intégrale, $\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle$; avec la symétrie, l'application est bilinéaire.

Positivité : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 w(t) dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale, l'intégrande étant positif et les bornes dans l'ordre croissant.

Caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2 w(t)$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$, donc identiquement nulle sur $[-1, 1]$. Comme $w(t) > 0$ pour $t \in] -1, 1[$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \in] -1, 1[$. Le polynôme P a alors une infinité de racines, donc $P = 0$.

Conclusion

$\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

7. (a) Objectif et méthode. On effectue le changement de variable $t = \sin(s)$ sur un segment.

La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, et

la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$ est continue sur $[-1, 1] = \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. La formule de changement de variable donne :

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(s))^{\frac{3}{2}} \cos(s) ds.$$

Pour $s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \sin^2(s) = \cos^2(s)$ et $\cos(s) \geq 0$, donc

$(\cos^2(s))^{\frac{3}{2}} = |\cos(s)|^3 = \cos^3(s)$. L'intégrande vaut donc $\cos^4(s)$.

Conclusion

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds.$$

(b) Objectif et méthode. On linéarise à l'aide de la formule de duplication, déduite des formules d'addition.

La formule d'addition $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ avec $a = b = \theta$ et la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donnent, pour tout réel θ :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1, \text{ donc } \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Avec $\theta = s$, puis $\theta = 2s$:

$$\cos^4(s) = \left(\frac{1 + \cos(2s)}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos(2s) + \cos^2(2s)}{4} = \frac{1 + 2\cos(2s) + \frac{1 + \cos(4s)}{2}}{4}.$$

$$\text{En réduisant au même dénominateur : } \cos^4(s) = \frac{3 + 4\cos(2s) + \cos(4s)}{8}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout réel } s, \quad \cos^4(s) = \frac{1}{8} (\cos(4s) + 4\cos(2s) + 3).$$

(c) Objectif et méthode. On a $G_0 = 1$, donc $\|G_0\|^2 = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$, que l'on calcule

avec 7(a) et 7(b).

On a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4s) \, ds = \left[\frac{\sin(4s)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)}{4} = 0$$

et

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2s) \, ds = \left[\frac{\sin(2s)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\pi) - \sin(-\pi)}{2} = 0.$$

Donc $\|G_0\|^2 = \frac{1}{8} (0 + 4 \cdot 0 + 3\pi) = \frac{3\pi}{8}.$

Conclusion

$$\|G_0\|^2 = \frac{3\pi}{8}.$$

8. (a) Objectif et méthode. On dérive un produit et une composée, en justifiant la dérivabilité aux bornes ± 1 .

La fonction $v : y \mapsto y^{\frac{5}{2}} = y^2 \sqrt{y}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $\frac{5}{2} y^{\frac{3}{2}}$; elle est aussi dérivable à droite en 0, de dérivée $0 = \frac{5}{2} \cdot 0^{\frac{3}{2}}$, car $\frac{v(y) - v(0)}{y} = y^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$.

Comme $t \mapsto 1 - t^2$ est dérivable sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, la fonction

$t \mapsto (1 - t^2)^{\frac{5}{2}}$ est dérivable sur $[-1, 1]$, de dérivée $\frac{5}{2} (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (-2t) = -5t(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$.

Par dérivation d'un produit, pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \left(P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} \right)' &= P''(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} - 5tP'(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= (1-t^2)^{\frac{3}{2}} ((1-t^2)P''(t) - 5tP'(t)). \end{aligned}$$

Conclusion

la dérivée est $t \mapsto -(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \varphi(P)(t)$. Elle est continue sur $[-1, 1]$, donc la fonction $t \mapsto P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

(b) Objectif et méthode. On utilise 8(a), puis une intégration par parties sur le segment $[-1, 1]$.

D'après 8(a), en notant $F(t) = P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(P)(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = - \int_{-1}^1 F'(t)Q(t) dt.$$

Les fonctions F et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. Par intégration par parties :

$$- \int_{-1}^1 F'(t)Q(t) dt = -[F(t)Q(t)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 F(t)Q'(t) dt.$$

Le crochet est nul car $F(1) = F(-1) = 0$, puisque $1-t^2$ s'annule en ± 1 .

Conclusion

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt.$$

(c) Objectif et méthode. On remarque que l'expression obtenue en 8(b) est symétrique en P et Q .

En échangeant les rôles de P et Q dans 8(b), $\langle \varphi(Q), P \rangle$ est égal à la même intégrale.

Donc, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle \varphi(Q), P \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$.

Conclusion

φ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[x]$. De plus, avec $Q = P$, on obtient $\langle \varphi(P), P \rangle \geq 0$, ce qui est cohérent avec des valeurs propres positives.

(d) Objectif et méthode. Les G_j sont des vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique φ pour des valeurs propres distinctes ; ils sont donc orthogonaux. On conclut par un argument de dimension.

Orthogonalité. Soit $i \neq j$ dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. Par symétrie de φ :

$$i(i+4)\langle G_i, G_j \rangle = \langle \varphi(G_i), G_j \rangle = \langle G_i, \varphi(G_j) \rangle = j(j+4)\langle G_i, G_j \rangle.$$

Comme $i(i+4) \neq j(j+4)$ (question 4(b)), on obtient $\langle G_i, G_j \rangle = 0$. C'est le résultat du cours sur l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique.

Base. La famille $(G_0, \dots, G_k)$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, donc libre. D'après 4(g), $\deg G_j = j \leq k$, donc ces $k+1$ vecteurs appartiennent à $\mathbb{R}_k[x]$, de dimension $k+1$.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(G_0, \dots, G_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$.

(e) Objectif et méthode. On écrit un élément de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ dans la base orthogonale $(G_0, \dots, G_{k-1})$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $R \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$. Si $k \geq 2$, $(G_0, \dots, G_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ d'après 8(d) ; si $k = 1$, $\mathbb{R}_0[x] = \text{Vect}(G_0)$. Dans les deux cas,

$$R = \sum_{j=0}^{k-1} c_j G_j,$$

et par linéarité

$$\langle G_k, R \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \langle G_k, G_j \rangle = 0$$

d'après 8(d).

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, G_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

9. (a) Objectif et méthode. On écrit les deux membres à l'aide de l'intégrale définissant le produit scalaire.

Précision. Le produit PQ peut être de degré supérieur à n . On convient, comme le fait

implicitement l'énoncé, que $\langle A, B \rangle$ désigne $\int_{-1}^1 A(t)B(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$ pour tous polynômes réels A et B , cette intégrale étant toujours définie. Dans la suite, on n'utilise ce résultat qu'avec $Q = x$ et des polynômes tels que tous les produits restent dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Pour tous polynômes P, Q, R :

$$\langle PQ, R \rangle = \int_{-1}^1 (P(t)Q(t)) R(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-1}^1 P(t) (Q(t)R(t)) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \langle P, QR \rangle.$$

Conclusion

$$\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle.$$

(b) Objectif et méthode. On décompose P dans la base orthogonale $(G_0, \dots, G_d)$ et on identifie les coordonnées par produit scalaire.

Soit P de degré $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après 8(d) (et, si $d = 0$, parce que $G_0 = 1$ engendre $\mathbb{R}_0[x]$), $(G_0, \dots, G_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[x]$, qui contient P . Il existe donc des réels $c_0, \dots, c_d$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^d c_i G_i.$$

Pour $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$, par linéarité et orthogonalité :

$$\langle P, G_j \rangle = \sum_{i=0}^d c_i \langle G_i, G_j \rangle = c_j \|G_j\|^2.$$

Comme $G_j \neq 0$, $\|G_j\|^2 > 0$ et $c_j = \frac{\langle P, G_j \rangle}{\|G_j\|^2}$.

Conclusion

$$P = \sum_{i=0}^d \frac{\langle P, G_i \rangle}{\|G_i\|^2} G_i.$$

(c) Objectif et méthode. On décompose xG_k dans la base $(G_0, \dots, G_{k+1})$, puis on montre que les coordonnées d'indice $i \leq k-2$ sont nulles grâce à 9(a) et 8(e).

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Le polynôme xG_k est de degré $k+1 \leq n$ d'après 4(g). D'après 9(b) :

$$xG_k = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\langle xG_k, G_i \rangle}{\|G_i\|^2} G_i.$$

Pour $i \leq k-2$ (cas vide si $k=1$), 9(a) donne $\langle xG_k, G_i \rangle = \langle G_k, xG_i \rangle$. Or xG_i est de degré $i+1 \leq k-1$, donc $xG_i \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ et $\langle G_k, xG_i \rangle = 0$ d'après 8(e).

Il reste $xG_k = \alpha_k G_{k+1} + \beta_k G_k + \gamma_k G_{k-1}$ avec $\alpha_k = \frac{\langle xG_k, G_{k+1} \rangle}{\|G_{k+1}\|^2}$, $\beta_k = \frac{\langle xG_k, G_k \rangle}{\|G_k\|^2}$, $\gamma_k = \frac{\langle xG_k, G_{k-1} \rangle}{\|G_{k-1}\|^2}$: c'est l'existence.

Unicité : la famille (G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) est libre, comme sous-famille de la famille libre $(G_0, \dots, G_n)$ (question 8(d)). Les coordonnées de xG_k sur cette famille sont donc uniques.

Conclusion

il existe un unique triplet $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ tel que $xG_k = \alpha_k G_{k+1} + \beta_k G_k + \gamma_k G_{k-1}$.

(d) Objectif et méthode. On obtient α_k en comparant les coefficients de x^{k+1} , et β_k grâce à la parité (question 5(c)) ; une seconde méthode pour β_k utilise directement l'intégrale.

Calcul de α_k . Les polynômes G_k et G_{k+1} sont unitaires de degrés k et $k+1$ (questions 4(d) et 4(g)). Le coefficient de x^{k+1} vaut 1 dans xG_k et α_k dans $\alpha_k G_{k+1} + \beta_k G_k + \gamma_k G_{k-1}$, les deux derniers termes étant de degré au plus k . Donc $\alpha_k = 1$.

Calcul de β_k .

Méthode 1 — Parité et unicité.

D'après 5(c), pour tout réel x , $G_j(-x) = (-1)^j G_j(x)$. En remplaçant x par $-x$ dans la relation de 9(c) :

$$(-x)(-1)^k G_k(x) = (-1)^{k+1} \alpha_k G_{k+1}(x) + (-1)^k \beta_k G_k(x) + (-1)^{k-1} \gamma_k G_{k-1}(x).$$

En multipliant par $(-1)^{k+1} : xG_k = \alpha_k G_{k+1} - \beta_k G_k + \gamma_k G_{k-1}$. Par unicité du triplet (question 9(c)), $\beta_k = -\beta_k$, donc $\beta_k = 0$.

Méthode 2 — Intégrale d'une fonction impaire.

D'après 9(c), $\beta_k = \frac{\langle xG_k, G_k \rangle}{\|G_k\|^2}$ avec $\langle xG_k, G_k \rangle = \int_{-1}^1 t G_k(t)^2 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$. Comme $G_k(-t)^2 = G_k(t)^2$ (question 5(c)), la fonction intégrée est impaire. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-1, 1]$ est nulle (changement de variable $t \mapsto -t$ sur $[-1, 0]$), donc $\beta_k = 0$.

La première méthode suit l'indication et n'utilise que l'unicité de la décomposition ; la seconde exploite l'expression des coordonnées dans une base orthogonale.

Conclusion

$\alpha_k = 1$ et $\beta_k = 0$. La relation devient $G_{k+1} = xG_k - \gamma_k G_{k-1}$ avec $\gamma_k = \frac{k(k+3)}{4(k+2)(k+1)}$ (résultat admis par l'énoncé).

(e) Objectif et méthode. Le polynôme G_3 n'est défini que si $3 \leq n$; on suppose donc ici $n \geq 3$. On applique la relation de récurrence de 9(d) avec $k = 2$, puis on vérifie directement le résultat.

Méthode 1 — Relation de récurrence.

Pour $k = 2 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\gamma_2 = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$, donc :

$$G_3 = xG_2 - \frac{5}{24}G_1 = x \left(x^2 - \frac{1}{6} \right) - \frac{5}{24}x = x^3 - \left(\frac{4}{24} + \frac{5}{24} \right) x = x^3 - \frac{3}{8}x.$$

Méthode 2 — Résolution directe de l'équation aux éléments propres.

D'après 4(g) et 5(c), G_3 est unitaire de degré 3 et impair : $G_3 = x^3 + bx$. Par 2(a), $\varphi(x^3 + bx) = 21x^3 - 6x + 5bx$. L'égalité $\varphi(G_3) = 21G_3$ équivaut à $-6 + 5b = 21b$, soit $b = -\frac{3}{8}$.

La seconde méthode n'utilise pas le coefficient γ_2 admis : elle permet de contrôler le résultat de la première.

Conclusion

$$G_3(x) = x^3 - \frac{3}{8}x.$$

10. (a) Objectif et méthode. Si

$$P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$$

avec $p_n = 0$ (ce qui est nécessaire pour que $xP \in \mathbb{R}_n[x]$), alors

$$xP = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^{k+1} :$$

le coefficient de x^{k+1} dans xP est p_k , et le coefficient constant est nul.

Python

```
import numpy as np

def Prod(P, n):
    Q = np.zeros(n+1)      # Q[0] reste nul
    for k in range(n):     # k = 0, ..., n-1
        Q[k+1] = P[k]      # coefficient de x^(k+1) dans xP
    return Q
```

Les indices écrits $Q[k+1]$ vont de 1 à n , ce qui respecte la taille $n+1$ du tableau.

Conclusion

il faut compléter par $\text{range}(n)$ et $Q[k+1]=P[k]$.

(b) Objectif et méthode. On utilise $G_0 = 1$, $G_1 = x$ et la relation $G_{j+1} = xG_j - \gamma_j G_{j-1}$ pour $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, valable dès que $k \leq n$ (questions 9(c) et 9(d)).

Python

```
import numpy as np

def VP(n, k):
    G0 = np.zeros(n+1)
    G0[0] = 1                # G_0 = 1
    G1 = np.zeros(n+1)
    G1[1] = 1                # G_1 = x
    if k == 0:
        return G0
    for j in range(1, k):    # calcul de G_(j+1) pour j = 1, ..., k-1
        gamma = j*(j+3) / (4*(j+2)*(j+1))
        G2 = Prod(G1, n) - gamma*G0
        G0 = G1
        G1 = G2
    return G1
```

Au début du tour d'indice j , G_0 et G_1 contiennent G_{j-1} et G_j ; à la fin du tour, ils contiennent G_j et G_{j+1} . Après la boucle, G_1 contient G_k (pour $k = 1$, la boucle n'est pas parcourue et on renvoie G_1). L'appel $\text{Prod}(G_1, n)$ est licite car $\deg G_j = j \leq k-1 \leq n-1$.

Code exécuté avec $n = 5$: $\text{VP}(5, 2)$ renvoie $[-0.1667, 0, 1, 0, 0, 0]$, soit $G_2 = x^2 - \frac{1}{6}$;
 $\text{VP}(5, 3)$ renvoie $[0, -0.375, 0, 1, 0, 0]$, soit $G_3 = x^3 - \frac{3}{8}x$; $\text{VP}(5, 4)$ renvoie $[0.0375, 0, -0.6, 0, 1, 0]$. Pour chaque $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, on a vérifié numériquement que $\varphi(G_k) = k(k+4)G_k$ à partir de la matrice M de 3(b).

Conclusion

la fonction VP ci-dessus renvoie le tableau des coefficients de G_k , pour $0 \leq k \leq n$.

Problème

Partie I

Notations. Pour $k \geq 1$, on note Z_k le résultat du k -ième lancer : les variables Z_k sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\llbracket 0, d \rrbracket$. On pose $q = P(Z_k = 0) = \frac{1}{d+1}$ et $p = 1 - q = \frac{d}{d+1}$; on a $0 < q < 1$.

1. (a) Objectif et méthode. Il s'agit d'une somme géométrique de raison $x \neq 1$.

Conclusion

pour $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^r x^k = x \frac{1 - x^r}{1 - x}.$$

- (b) Objectif et méthode. On simplifie le produit par télescopage; une seconde méthode consiste à dériver la somme géométrique.

Notons

$$S = \sum_{k=1}^r kx^{k-1}.$$

Méthode 1 — Télescopage.

$$(1-x)S = \sum_{k=1}^r kx^{k-1} - \sum_{k=1}^r kx^k = \sum_{k=1}^r kx^{k-1} - \sum_{k=2}^{r+1} (k-1)x^{k-1} = \sum_{k=1}^r x^{k-1} - rx^r,$$

ce qui donne $(1-x)S = \frac{1-x^{r+1}}{1-x} - rx^r$. En multipliant par $1-x$:

$$(1-x)^2 S = 1 - x^{r+1} - rx^r(1-x) = 1 - (r+1)x^r + rx^{r+1}.$$

Méthode 2 — Dérivation.

Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^r x^k = \frac{1-x^{r+1}}{1-x}.$$

Les deux membres sont des fonctions dérivables sur $]0, 1[$ (une somme finie et un quotient à dénominateur non nul). En dérivant :

$$S = \frac{-(r+1)x^r(1-x) + (1-x^{r+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}.$$

Le télescopage reste élémentaire et donne directement le produit demandé ; la

dérivation est plus rapide et se généralise aux sommes

$$\sum k(k-1)x^{k-2}.$$

Conclusion

$$(1-x)^2 \sum_{k=1}^r kx^{k-1} = 1 - (r+1)x^r + rx^{r+1},$$

donc

$$\sum_{k=1}^r kx^{k-1} = \frac{1 - (r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}.$$

(c) Objectif et méthode. On reconnaît le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Les événements $[Z_k \neq 0]$ sont indépendants et de probabilité $p = \frac{d}{d+1} \in]0, 1[$. La variable Y est le rang du premier succès, donc Y suit la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = q^{k-1}p = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{k-1} \frac{d}{d+1}.$$

Conclusion

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{d}{d+1}\right), \quad E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{d+1}{d} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{d+1}{d^2}.$$

(d) Objectif et méthode. L'événement $[Y > r]$ signifie que les r premiers lancers donnent 0.

Méthode 1 — Description de l'événement.

$[Y > r] = \bigcap_{k=1}^r [Z_k = 0]$; par indépendance des lancers, $P(Y > r) = q^r$.

Méthode 2 — Somme de la queue de la loi géométrique.

$$P(Y > r) = \sum_{k=r+1}^{+\infty} q^{k-1}p = pq^r \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \frac{pq^r}{1-q} = q^r,$$

la série géométrique convergeant car $0 < q < 1$.

Conclusion

$$P(Y > r) = \left(\frac{1}{d+1} \right)^r.$$

2. (a) Objectif et méthode. On détermine la valeur prise par X sur l'événement $[Y > r]$, qui est de probabilité $q^r > 0$.

Sur $[Y > r]$, on a $Z_1 = \dots = Z_r = 0$: on obtient r faces 0 consécutives à l'issue du r -ième lancer, et pas avant puisqu'il faut au moins r lancers. Donc $X = r$ sur $[Y > r]$, et la loi de X pour la probabilité conditionnelle $P_{[Y > r]}$ est la loi certaine égale à r .

Conclusion

$$E(X | [Y > r]) = r.$$

- (b) Objectif et méthode. Sur $[Y = i]$, l'expérience « recommence » après le i -ième lancer. On le traduit par une variable X'_i de même loi que X , indépendante de $[Y = i]$, telle que $X = i + X'_i$ sur $[Y = i]$.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$; on a $P(Y = i) = q^{i-1}p > 0$. On note X'_i le nombre de lancers effectués après le i -ième jusqu'à l'obtention, pour la première fois, de r faces 0 consécutives parmi les lancers $i+1, i+2, \dots$

Relation $X = i + X'_i$ sur $[Y = i]$. Sur $[Y = i]$, on a $Z_i \neq 0$. Une suite de r zéros consécutifs ne peut donc pas contenir le lancer i , ni se terminer avant lui puisque seuls $i - 1 \leq r - 1$ lancers le précèdent. La première série de r zéros consécutifs est donc formée de lancers d'indices au moins $i + 1$, d'où $X = i + X'_i$.

Loi de X'_i et indépendance. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X'_i = j]$ ne dépend que de $(Z_{i+1}, \dots, Z_{i+j})$, de la même façon que $[X = j]$ ne dépend que de $(Z_1, \dots, Z_j)$. Ces deux vecteurs ont la même loi (composantes indépendantes uniformes sur $\llbracket 0, d \rrbracket$), donc $P(X'_i = j) = P(X = j)$. De plus, $[Y = i] = [Z_1 = 0] \cap \dots \cap [Z_{i-1} = 0] \cap [Z_i \neq 0]$ ne dépend que de $(Z_1, \dots, Z_i)$; par le lemme des coalitions, $[Y = i]$ et $[X'_i = j]$ sont indépendants.

Calcul. Pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$P_{[Y=i]}(X = m) = \frac{P([Y = i] \cap [X'_i = m - i])}{P(Y = i)} = P(X'_i = m - i) = P(X = m - i),$$

cette probabilité étant nulle si $m - i \leq 0$. Ainsi, pour $P_{[Y=i]}$, la variable X a la loi de $i + X$. Comme X admet une espérance, la série

$$\sum_j j P(X = j)$$

converge et :

$$E(X | [Y = i]) = \sum_{j \geq 1} (i + j) P(X = j) = i \sum_{j \geq 1} P(X = j) + \sum_{j \geq 1} j P(X = j) = i + E(X).$$

Conclusion

pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E(X | [Y = i]) = i + E(X)$.

3. (a) Objectif et méthode. On applique la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $([Y = 1], \dots, [Y = r], [Y > r])$.

La variable Y est finie presque sûrement (loi géométrique), donc les événements $[Y = 1], \dots, [Y = r], [Y > r]$ sont deux à deux incompatibles et de réunion presque certaine; ils sont tous de probabilité non nulle. Comme X admet une espérance, la formule de l'espérance totale donne, avec 2(a) et 2(b) :

$$E(X) = \sum_{i=1}^r (i + E(X)) P(Y = i) + r P(Y > r) = \sum_{i=1}^r i P(Y = i) + E(X) \sum_{i=1}^r P(Y = i) + r P(Y > r).$$

Enfin,

$$\sum_{i=1}^r P(Y = i) = P(Y \leq r) = 1 - P(Y > r).$$

Conclusion

$$E(X) = \sum_{i=1}^r i P(Y = i) + E(X) (1 - P(Y > r)) + r P(Y > r).$$

(b) Objectif et méthode. On calcule la somme avec 1(b), puis on isole $E(X)$.

Avec $x = q \in]0, 1[$ dans 1(b) et $1 - q = p$:

$$\sum_{i=1}^r i P(Y = i) = p \sum_{i=1}^r i q^{i-1} = p \cdot \frac{1 - (r+1)q^r + r q^{r+1}}{p^2} = \frac{1 - (r+1)q^r + r q^{r+1}}{p}.$$

L'égalité de 3(a) devient $E(X) q^r = \frac{1 - (r+1)q^r + r q^{r+1}}{p} + r q^r$. En multipliant par p :

$$p q^r E(X) = 1 - (r+1)q^r + r q^{r+1} + r p q^r = 1 - (r+1)q^r + r q^r (q + p) = 1 - q^r.$$

Donc
$$E(X) = \frac{1 - q^r}{p q^r} = \frac{q^{-r} - 1}{p} = \frac{((d+1)^r - 1)(d+1)}{d}.$$

Conclusion

$$E(X) = \frac{1}{d} ((d+1)^{r+1} - d - 1).$$

Partie II

4. Objectif et méthode. Le dé est équilibré : on reconnaît une loi uniforme discrète.

La variable U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, d \rrbracket$: pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $P(U_n = k) = \frac{1}{d+1}$.
Son espérance existe (variable finie) et vaut :

$$E(U_n) = \sum_{k=0}^d \frac{k}{d+1} = \frac{1}{d+1} \cdot \frac{d(d+1)}{2} = \frac{d}{2}.$$

Conclusion

$$U_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, d \rrbracket) \text{ et } E(U_n) = \frac{d}{2}.$$

5. (a) Objectif et méthode. On détermine les valeurs atteintes par la somme de deux entiers de $\llbracket 0, d \rrbracket$.

On a $0 \leq U_1 + U_2 \leq 2d$, et toute valeur $k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket$ est atteinte (par exemple avec $U_1 = \min(k, d)$ et $U_2 = k - \min(k, d)$, toutes deux dans $\llbracket 0, d \rrbracket$).

Conclusion

$$S_2(\Omega) = \llbracket 0, 2d \rrbracket.$$

(b) Objectif et méthode. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $([U_1 = i])_{0 \leq i \leq d}$, puis l'indépendance des lancers.

Soit $k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket$. Pour tout i , $[S_2 = k] \cap [U_1 = i] = [U_1 = i] \cap [U_2 = k - i]$. Par la formule

des probabilités totales, puis par indépendance de U_1 et U_2 :

$$P(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d P([U_1 = i] \cap [U_2 = k - i]) = \sum_{i=0}^d P(U_1 = i) P(U_2 = k - i).$$

Conclusion

$$P(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d P(U_1 = i) P(U_2 = k - i),$$

avec $P(U_2 = k - i) = 0$ si $k - i \notin \llbracket 0, d \rrbracket$.

(c) Objectif et méthode. Chaque terme non nul de la somme de 5(b) vaut $\frac{1}{(d+1)^2}$; on compte les indices i pour lesquels il est non nul.

Le terme d'indice i est non nul si et seulement si $0 \leq i \leq d$ et $0 \leq k - i \leq d$, c'est-à-dire $\max(0, k - d) \leq i \leq \min(d, k)$.

Si $0 \leq k < d$: i décrit $\llbracket 0, k \rrbracket$, soit $k + 1$ valeurs.

Si $d \leq k \leq 2d$: i décrit $\llbracket k - d, d \rrbracket$, soit $2d - k + 1$ valeurs.

Conclusion

$$P(S_2 = k) = \frac{k + 1}{(d + 1)^2} \text{ si } 0 \leq k < d, \text{ et } P(S_2 = k) = \frac{2d + 1 - k}{(d + 1)^2} \text{ si } d \leq k \leq 2d.$$

(d) Objectif et méthode. On somme les probabilités de 5(c), soit directement, soit en passant à l'événement contraire.

Méthode 1 — Calcul direct.

Avec le changement d'indice $j = 2d + 1 - k$, qui décrit $\llbracket 1, d + 1 \rrbracket$ quand k décrit $\llbracket d, 2d \rrbracket$:

$$P(S_2 \geq d) = \sum_{k=d}^{2d} \frac{2d+1-k}{(d+1)^2} = \frac{1}{(d+1)^2} \sum_{j=1}^{d+1} j = \frac{(d+1)(d+2)}{2(d+1)^2} = \frac{d+2}{2(d+1)}.$$

Méthode 2 — Événement contraire.

$$P(S_2 < d) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{k+1}{(d+1)^2} = \frac{d(d+1)}{2(d+1)^2} = \frac{d}{2(d+1)},$$

donc
$$P(S_2 \geq d) = 1 - \frac{d}{2(d+1)} = \frac{d+2}{2(d+1)}.$$

Les deux méthodes reposent sur la même formule ; la seconde est utile quand les termes de l'événement contraire sont plus simples à sommer.

Conclusion

$$P(S_2 \geq d) = \frac{d+2}{2(d+1)}.$$

6. (a) Objectif et méthode. On simule les lancers successifs en ajoutant les résultats tant que la somme reste strictement inférieure à d , et on compte les lancers.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Atteinte(d):
    S = 0                # S contient S_n
    n = 0                # nombre de lancers effectués
```

```
while S < d:
    S = S + rd.randint(0, d+1) # lancer uniforme sur [[0, d]]
    n = n + 1
return n
```

L'appel `rd.randint(0, d+1)` simule la loi uniforme sur $\llbracket 0, d \rrbracket$, la borne $d + 1$ étant exclue. Comme $S_0 = 0 < d$, la boucle est parcourue au moins une fois. À la sortie, n est le premier indice tel que $S_n \geq d$, c'est-à-dire une réalisation de T . La boucle s'arrête avec probabilité 1 : la face d finit presque sûrement par sortir, et dès qu'elle sort la somme est au moins d .

Conclusion

`Atteinte(d)` renvoie une réalisation de T .

(b) Objectif et méthode. On calcule la moyenne de N réalisations indépendantes de T et on justifie la convergence par la loi faible des grands nombres.

Python

```
def EspT(d, N):
    E = 0
    for k in range(N):
        E = E + Atteinte(d)
    return 1/N*E
```

La ligne à compléter est `E=E+Atteinte(d)`. La fonction renvoie

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k,$$

où $T_1, \dots, T_N$ sont les réalisations obtenues par N appels successifs. Ces appels utilisent des tirages indépendants : $T_1, \dots, T_N$ sont des variables indépendantes de même loi que T .

Théorème utilisé : la loi faible des grands nombres (méthode de Monte-Carlo). Sous sa forme au programme, elle s'applique à des variables indépendantes de même loi

admettant une variance. Vérifions que T admet une variance.

Notons W le rang du premier lancer donnant la face d : W suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{d+1}$, donc W admet un moment d'ordre 2. Comme $S_W \geq U_W = d$, on a $T \leq W$, donc $0 \leq T^2 \leq W^2$. Par domination, T^2 admet une espérance, donc T admet une variance.

La loi faible des grands nombres donne alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k - E(T) \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

quand $N \rightarrow +\infty$.

Code exécuté : $\text{EspT}(2, 20000) \approx 2.261$, $\text{EspT}(3, 20000) \approx 2.375$, $\text{EspT}(10, 20000) \approx 2.592$, $\text{EspT}(50, 20000) \approx 2.692$. Ces valeurs aléatoires varient d'une exécution à l'autre.

Conclusion

la ligne manquante est $E = E + \text{Atteinte}(d)$, et la fonction repose sur la loi faible des grands nombres : pour N grand, $\text{EspT}(d, N)$ est une valeur approchée de $E(T)$.

(c) Objectif et méthode. On interprète la figure : chaque croix est une approximation de $E(T)$ pour une valeur de d , et la droite rouge a pour ordonnée e .

Le script trace, pour d de 2 à 251, la valeur $\text{EspT}(d, 10000)$, ainsi que la droite horizontale d'ordonnée $e = \exp(1) \approx 2.718$. Les valeurs approchées de $E(T)$ croissent (environ 2.26 pour $d = 2$, 2.46 pour $d = 4$, 2.58 pour $d = 10$) puis se stabilisent autour de e : à partir de $d \approx 50$, elles restent entre 2.67 et 2.74, de part et d'autre de la droite.

Conclusion

on conjecture que $E(T)$ croît avec d et tend vers e quand $d \rightarrow +\infty$. Il s'agit d'une observation expérimentale ; elle est démontrée en 8(e).

7. (a) Objectif et méthode. On décompose $[V \geq n]$ selon les valeurs de V jusqu'à N , puis on échange deux sommes finies. Une seconde méthode utilise une transformation d'Abel.

Méthode 1 — Intversion de sommes finies.

Pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $[V \geq n]$ est la réunion disjointe des événements $[V = i]$ pour $i \in \llbracket n, N \rrbracket$ et de $[V \geq N + 1]$. Donc

$$P(V \geq n) = \sum_{i=n}^N P(V = i) + P(V \geq N + 1).$$

En sommant :

$$\sum_{n=1}^N P(V \geq n) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=n}^N P(V = i) + N P(V \geq N + 1).$$

La somme double porte sur les couples (n, i) tels que $1 \leq n \leq i \leq N$; en sommant d'abord sur n :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=n}^N P(V = i) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^i P(V = i) = \sum_{i=1}^N i P(V = i).$$

Méthode 2 — Transformation d'Abel.

Pour $i \geq 1$, $P(V = i) = P(V \geq i) - P(V \geq i + 1)$, puisque V est à valeurs entières. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N i P(V = i) &= \sum_{i=1}^N i P(V \geq i) - \sum_{j=2}^{N+1} (j-1) P(V \geq j) = \sum_{i=1}^N P(V \geq i) \\ &\quad - N P(V \geq N+1), \end{aligned}$$

le terme $i = 1$ de la première somme valant $P(V \geq 1)$ et, pour $2 \leq i \leq N$, les termes se combinant en $(i - (i-1)) P(V \geq i)$.

La première méthode est une interversion de sommes, la seconde un analogue discret de l'intégration par parties ; cette dernière reste utile quand une décomposition en événements disjoints est moins visible.

Conclusion

$$\sum_{n=1}^N P(V \geq n) = \sum_{i=1}^N i P(V = i) + N P(V \geq N+1).$$

(b) Objectif et méthode. On majore les sommes partielles d'une série à termes positifs.

D'après 7(a), et puisque $N P(V \geq N+1) \geq 0$ et que les termes $P(V \geq n)$ sont positifs :

$$\sum_{i=1}^N i P(V = i) \leq \sum_{n=1}^N P(V \geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(V \geq n).$$

La série

$$\sum_i i P(V = i)$$

est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. Comme V est à valeurs dans $\mathbb{N}$, cette convergence est une convergence absolue (le terme d'indice 0 est nul).

Conclusion

V admet une espérance.

(c) Objectif et méthode. On majore $N P(V \geq N + 1)$ par le reste d'une série convergente.

Par σ -additivité,

$$P(V \geq N + 1) = \sum_{i=N+1}^{+\infty} P(V = i).$$

Pour $i \geq N + 1$, $N \leq i$, donc :

$$0 \leq N P(V \geq N + 1) = \sum_{i=N+1}^{+\infty} N P(V = i) \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} i P(V = i).$$

Le majorant est le reste d'ordre N de la série convergente

$$\sum i P(V = i)$$

(question 7(b)), qui tend vers 0. Par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N P(V \geq N + 1) = 0.$$

(d) Objectif et méthode. On passe à la limite dans 7(a).

Quand $N \rightarrow +\infty$, le membre de gauche de 7(a) tend vers

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(V \geq n)$$

(série convergente par hypothèse),

$$\sum_{i=1}^N i P(V = i) \rightarrow E(V)$$

(question 7(b)) et $N P(V \geq N + 1) \rightarrow 0$ (question 7(c)).

Conclusion

$$E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(V \geq n).$$

8. (a) Objectif et méthode. On établit par récurrence une formule pour $h^{(k)}$.

La fonction $t \mapsto 1 - t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (elle y est minorée par $\frac{1}{2}$), donc h , inverse d'une fonction polynomiale ne s'annulant pas, multiplié par une constante, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $h^{(k)}(t) = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}}$.

Initialisation : pour $k = 0$, c'est la définition de h .

Hérédité : si la formule est vraie au rang k , alors, par dérivation de $t \mapsto (1-t)^{-(r+k+1)}$:

$$h^{(k+1)}(t) = (r+k)! \cdot (r+k+1)(1-t)^{-(r+k+2)} = \frac{(r+k+1)!}{(1-t)^{r+k+2}}.$$

Conclusion

h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}(t) = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}}$.

(b) Objectif et méthode. On majore l'intégrande, positif, en utilisant $1-t \geq \frac{1}{2}$.

Soit $n \geq 1$ et $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pour $t \in [0, x]$, on a $(x-t)^{n-1} \geq 0$ et $1-t \geq \frac{1}{2}$, donc

$0 \leq \frac{1}{(1-t)^{r+n+1}} \leq 2^{r+n+1}$. L'intégrande est positif, les bornes sont dans l'ordre croissant et, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt \leq 2^{r+n+1} \int_0^x (x-t)^{n-1} dt = 2^{r+n+1} \left[-\frac{(x-t)^n}{n} \right]_0^x = 2^{r+n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Conclusion

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt \right| \leq 2^{r+n+1} \frac{x^n}{n}.$$

(c) Objectif et méthode. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral de h entre 0 et x , puis on montre que le reste tend vers 0 grâce à 8(b).

Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $n \geq 1$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, x]$, et la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ donne :

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t) dt.$$

D'après 8(a), $\frac{h^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(r+k)!}{k!} = (k+r)(k+r-1) \cdots (k+1)$; ce produit de r facteurs vaut 1 si $r=0$. Le reste vaut :

$$R_n(x) = \frac{(r+n)!}{(n-1)!} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt.$$

D'après 8(b) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{(r+n)!}{(n-1)!} \cdot 2^{r+n+1} \frac{x^n}{n} = 2^{r+1} (n+1)(n+2) \cdots (n+r) (2x)^n \leq 2^{r+1} (n+r)^r (2x)^n.$$

Si $x = 0$, $R_n(0) = 0$. Si $0 < x < \frac{1}{2}$, on a $0 < 2x < 1$; comme $(n+r)^r \sim n^r$ et que $n^r (2x)^n \rightarrow 0$ par croissances comparées, $R_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Les sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+r) \cdots (k+1) x^k = h(x) - R_n(x)$$

tendent donc vers $h(x)$.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 0} (n+r) \cdots (n+1) x^n$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \cdots (n+1) x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

(d) Objectif et méthode. On applique 7 à $V = T$, en calculant

$$\sum P(T \geq n)$$

grâce à 8(c).

La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et finie presque sûrement, puisque $T \leq W$ (question 6(b)). Pour $n \geq 1$, posons $m = n - 1 \geq 0$. Le résultat admis donne :

$$P(T \geq n) = \binom{m+d-1}{m} \left(\frac{1}{d+1} \right)^m, \text{ avec}$$

$$\binom{m+d-1}{m} = \frac{(m+d-1)!}{m!(d-1)!} = \frac{(m+d-1) \cdots (m+1)}{(d-1)!}.$$

On applique 8(c) avec $r = d - 1 \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{1}{d+1}$, qui appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ car $d \geq 2$ donne $x \leq \frac{1}{3}$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+d-1) \cdots (m+1)}{(d-1)!} x^m = \frac{1}{(d-1)!} \cdot \frac{(d-1)!}{(1-x)^d} = \left(\frac{d+1}{d} \right)^d.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} P(T \geq n)$$

converge donc. D'après 7(b) et 7(d), T admet une espérance et

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T \geq n).$$

Conclusion

T admet une espérance et $E(T) = \left(\frac{d+1}{d} \right)^d$. Pour $d = 2$, on trouve $\frac{9}{4} = 2.25$, cohérent avec la figure de 6(c).

(e) Objectif et méthode. On écrit $E(T)$ sous forme exponentielle et on utilise un équivalent du logarithme.

$E(T) = \exp \left(d \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right)$. Comme $\ln(1+u) \sim u$ quand $u \rightarrow 0$, on a

$d \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) \sim d \cdot \frac{1}{d} = 1$, donc $d \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1, $E(T) \rightarrow e$.

Conclusion

$\lim_{d \rightarrow +\infty} E(T) = e$, ce qui confirme la conjecture de 6(c).

Partie III

Remarque préliminaire sur le choix des densités. Une densité n'est déterminée qu'aux valeurs près en un nombre fini de points ; les questions 9 et 10 portent sur des densités précises. On prend pour f_1 la densité $f_1(x) = \frac{1}{d}$ si $x \in [0, d]$ et $f_1(x) = 0$ sinon, et, pour $n \geq 1$, f_{n+1} égale au produit de convolution de f_n et f_1 :

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_1(x-t) dt = \frac{1}{d} \int_{x-d}^x f_n(t) dt,$$

car $f_1(x-t) = \frac{1}{d}$ si $x-d \leq t \leq x$ et 0 sinon. Cette intégrale existe pour tout réel x et vaut $\frac{1}{d} (F_n(x) - F_n(x-d))$, où F_n est la fonction de répartition de S_n ; elle définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme $S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$ et que S_n , fonction de $(U_1, \dots, U_n)$, est indépendante de U_{n+1} (lemme des coalitions), le théorème de convolution du programme assure que f_{n+1} est une densité de S_{n+1} .

9. (a) Objectif et méthode. On rappelle les résultats du cours sur la loi uniforme sur $[0, d]$.

Conclusion

$S_1 = U_1$ admet pour densité f_1 définie par $f_1(x) = \frac{1}{d}$ si $x \in [0, d]$ et $f_1(x) = 0$ sinon ; $E(S_1) = \frac{d}{2}$ et $V(S_1) = \frac{d^2}{12}$.

- (b) Objectif et méthode. On utilise $f_2(x) = \frac{1}{d} \int_{x-d}^x f_1(t) dt$: $f_2(x)$ vaut $\frac{1}{d^2}$ fois la

longueur de $[x - d, x] \cap [0, d]$.

Si $x < 0$, on a $[x - d, x] \cap [0, d] = \emptyset$ car $x < 0$, donc $f_2(x) = 0$.

Si $x \geq 2d$, on a $x - d \geq d$, donc l'intersection $[x - d, x] \cap [0, d]$ est vide ou réduite au point d ; elle est de longueur nulle, donc $f_2(x) = 0$.

Conclusion

pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup [2d, +\infty[$, $f_2(x) = 0$.

(c) Objectif et méthode. On détermine l'intersection $[x - d, x] \cap [0, d]$ pour $x \in [0, d]$.

Si $x \in [0, d]$, on a $x - d \leq 0$ et $x \leq d$, donc $[x - d, x] \cap [0, d] = [0, x]$, où $f_1 = \frac{1}{d}$. Ainsi :

$$f_2(x) = \frac{1}{d} \int_0^x \frac{1}{d} dt = \int_0^x \frac{1}{d^2} dt.$$

Conclusion

pour tout $x \in [0, d]$, $f_2(x) = \int_0^x \frac{1}{d^2} dt = \frac{x}{d^2}$.

(d) Objectif et méthode. Il reste à traiter le cas $x \in]d, 2d[$.

Si $x \in]d, 2d[$, on a $0 < x - d < d < x$, donc $[x - d, x] \cap [0, d] = [x - d, d]$, de longueur $2d - x$, d'où $f_2(x) = \frac{2d - x}{d^2}$.

Conclusion

$f_2(x) = \frac{x}{d^2}$ si $x \in [0, d]$, $f_2(x) = \frac{2d - x}{d^2}$ si $x \in]d, 2d[$, et $f_2(x) = 0$ sinon. La fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, et son graphe est un triangle de sommet $\left(d, \frac{1}{d}\right)$.

10. Soit $n \geq 1$ tel que f_n vérifie les hypothèses de l'énoncé. On utilise

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{d} \int_{x-d}^x f_n(t) dt.$$

(a) Objectif et méthode. On remarque que l'intervalle d'intégration est inclus dans $] - \infty, 0[$.

Si $x < 0$, pour tout $t \in [x - d, x]$, on a $t \leq x < 0$, donc $f_n(t) = 0$ et $f_{n+1}(x) = 0$.

Conclusion

pour tout réel $x < 0$, $f_{n+1}(x) = 0$.

(b) Objectif et méthode. Pour $x \in [0, d]$, on découpe l'intervalle d'intégration en $[x - d, 0]$, où f_n est nulle, et $[0, x] \subset [0, d]$, où l'on connaît f_n .

Si $x \in [0, d]$, alors $x - d \leq 0 \leq x \leq d$. Par la relation de Chasles, l'hypothèse sur f_n donne :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{d} \left(\int_{x-d}^0 0 \, dt + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)! d^n} \, dt \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{x^n}{n(n-1)! d^n}.$$

Conclusion

pour tout $x \in [0, d]$, $f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n! d^{n+1}}$.

11. Objectif et méthode. On établit par récurrence l'expression de f_n sur $] - \infty, d]$, puis on intègre.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $f_n(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)! d^n}$ pour $x \in [0, d]$.

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après 9(a), car $\frac{x^0}{0! d^1} = \frac{1}{d}$.

Hérédité : la question 10 montre que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.

Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Comme S_n est à densité :

$$P(S_n < d) = \int_{-\infty}^d f_n(x) \, dx = \int_0^d \frac{x^{n-1}}{(n-1)! d^n} \, dx = \left[\frac{x^n}{n! d^n} \right]_0^d = \frac{1}{n!}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad P(S_n < d) = \frac{1}{n!}.$$

12. Les variables U_k suivent la loi uniforme sur $[0, d]$, donc $P(U_k \in [0, d]) = 1$. Quitte à négliger un événement de probabilité nulle, ce qui ne modifie aucune probabilité, on suppose $U_k(\Omega) \subset [0, d]$ pour tout k . La suite (S_n) est alors croissante.

(a) Objectif et méthode. On a $[T = 1] = [S_1 \geq d]$, puisque $T \geq 1$.

Méthode 1 — Avec la question 11 :

$$P(T = 1) = P(S_1 \geq d) = 1 - P(S_1 < d) = 1 - \frac{1}{1!} = 0.$$

Méthode 2 — Directement : $P(S_1 \geq d) = P(U_1 = d) = 0$, car U_1 est à densité et à valeurs dans $[0, d]$.

Conclusion

$$P(T = 1) = 0.$$

(b) Objectif et méthode. On utilise la croissance de la suite (S_k) .

Par définition de T , $[T > n] = \bigcap_{k=1}^n [S_k < d]$; cet événement contient aussi les issues pour lesquelles $S_k < d$ pour tout k . Comme $S_k \leq S_n$ pour $k \leq n$, l'événement $[S_n < d]$ est inclus dans chaque $[S_k < d]$, $k \leq n$. Donc l'intersection vaut $[S_n < d]$.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $[T > n] = [S_n < d]$, et donc $P(T > n) = \frac{1}{n!}$.

(c) Objectif et méthode. On applique la question 7 à T ; une seconde méthode calcule la loi de T .

T est finie presque sûrement. En effet, pour tout $n \geq 1$, $[T = +\infty] \subset [T > n]$, donc $P(T = +\infty) \leq \frac{1}{n!}$, et cette borne tend vers 0. On peut donc considérer T comme une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Méthode 1 — Avec la question 7.

Pour $n \geq 2$, $P(T \geq n) = P(T > n-1) = \frac{1}{(n-1)!}$, et $P(T \geq 1) = 1 = \frac{1}{0!}$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!}$$

converge (série exponentielle) et a pour somme e . D'après 7(b) et 7(d), T admet une espérance et $E(T) = e$.

Méthode 2 — Par la loi de T .

Pour $n \geq 2$, $[T = n] = [T > n-1] \setminus [T > n]$ avec $[T > n] \subset [T > n-1]$, donc $P(T = n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$, et $P(T = 1) = 0$. La série à termes positifs

$$\sum_{n \geq 2} n P(T = n) = \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!}$$

converge et vaut e . Donc T admet une espérance et $E(T) = e$.

La première méthode utilise directement les probabilités $P(T > n)$; la seconde demande d'abord la loi de T , mais n'utilise que la définition de l'espérance.

Conclusion

T admet une espérance et $E(T) = e$. On retrouve la limite obtenue en 8(e) pour le dé à $d + 1$ faces quand $d \rightarrow +\infty$.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a été modifiée : le sujet est conforme au programme de mathématiques approfondies (aucun nombre complexe, aucun recours à Slutsky ni au critère r, s, t , codes déjà écrits en Python).

Exercice 1, question 5(d) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. La courbe en pointillés a été recalculée exactement à partir des sommes $\text{Rect}(n)$, $1 \leq n \leq 1000$, après contrôle de sa concordance avec la mesure; la courbe en trait plein, issue d'une simulation, a été relevée colonne de pixels par colonne de pixels.

Problème, question 6(c) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées (250 croix d'abscisses $d = 2, \dots, 251$ et droite d'ordonnée e).

Les définitions données par accolades dans le PDF (fonction f de l'exercice 1, question 5; loi de S_2 en 5(c) du problème) sont transcrites en ligne, sans changement de contenu.

Précisions apportées dans le corrigé, l'énoncé restant inchangé :

Exercice 2, question 9(a) : le produit PQ pouvant être de degré supérieur à n , la notation $\langle , \rangle$ est prise au sens de l'intégrale, définie pour tous polynômes.

Exercice 2, question 9(e) : G_3 n'existe que si $n \geq 3$, hypothèse implicite de la question.

Problème, question 6(b) : la loi faible des grands nombres du programme demande une variance ; son existence pour T est établie par domination.

Problème, partie III : les densités f_n sont choisies comme produits de convolution successifs, ce qui donne un sens précis aux égalités ponctuelles des questions 9 et 10.