



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 2025

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

1. (a) Il s'agit de reconnaître une série de référence.

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est une série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

avec $\alpha = 2$. D'après le cours, une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Conclusion

comme $2 > 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

converge.

- (b) On établit la convergence absolue, qui entraîne la convergence.

Pour tout $n \geq 1$, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$. D'après (a), la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

converge, donc la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge absolument.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est absolument convergente, donc convergente.

(c) La série est à termes strictement positifs : on utilise un théorème de comparaison.

Méthode 1 — Comparaison par inégalité.

Pour tout $n \geq 1$, on a $2n + 1 > n > 0$, donc $(2n + 1)^2 > n^2$ et $0 < \frac{1}{(2n + 1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

converge d'après (a). Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n + 1)^2}$$

converge. L'ajout du terme d'indice 0 ne change pas la nature de la série.

Méthode 2 — Comparaison par équivalent.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $(2n+1)^2 \sim 4n^2$, donc $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ (compatibilité des équivalents avec le quotient). Les deux séries sont à termes positifs et

$$\sum \frac{1}{4n^2}$$

converge (multiple d'une série de Riemann convergente). Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

converge.

La première méthode demande de trouver une majoration explicite ; la seconde est plus automatique et s'applique dès qu'un équivalent simple est disponible, à condition de vérifier le signe des termes.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

converge.

2. On compare des sommes partielles d'indice impair, puis on passe à la limite.

Notons, pour $m \geq 1$,

$$A_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2},$$

$$B_m = \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n^2}$$

et, pour $N \geq 0$,

$$C_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'après la question 1, $A_m \rightarrow A$, $B_m \rightarrow B$ et $C_N \rightarrow C$.

Égalité $A - B = 2C$. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$ vaut 0 si n est pair et $\frac{2}{n^2}$ si n est impair. Pour $N \geq 0$, les entiers impairs de $\{1, \dots, 2N+1\}$ sont les $2p+1$ avec $0 \leq p \leq N$, donc

$$A_{2N+1} - B_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{2}{(2p+1)^2} = 2C_N.$$

La suite $(A_{2N+1} - B_{2N+1})_N$ est une suite extraite de $(A_m - B_m)_m$, qui converge vers $A - B$; elle converge donc aussi vers $A - B$. En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $A - B = 2C$.

Égalité $A = C + \frac{1}{4}A$. Pour $N \geq 1$, on sépare dans A_{2N+1} les indices impairs $n = 2p+1$ ($0 \leq p \leq N$) et les indices pairs $n = 2p$ ($1 \leq p \leq N$) :

$$A_{2N+1} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} = C_N + \frac{1}{4}A_N.$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, $A_{2N+1} \rightarrow A$ (suite extraite), $C_N \rightarrow C$ et $A_N \rightarrow A$, d'où $A = C + \frac{1}{4}A$.

Conclusion

$$A - B = 2C \text{ et } A = C + \frac{1}{4}A.$$

3. (a) On utilise les formules d'addition du cosinus.

Pour tous réels α et β :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad \text{et} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ &+ \sin(\alpha) \sin(\beta), \end{aligned}$$

la seconde s'obtenant à partir de la première en remplaçant β par $-\beta$ (le cosinus est pair et le sinus impair). En ajoutant ces deux égalités, les termes en sinus s'éliminent.

Conclusion

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

(b) On fixe $t \in [0, \pi[$ et on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons d'abord que $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right) > 0$: le quotient est bien défini. Notons

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt)$$

et $\mathcal{P}(n)$ l'égalité

$$S_n(t) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Initialisation ($n = 1$). On a $S_1(t) = -\cos(t)$. D'après (a) avec $\alpha = t$ et $\beta = \frac{t}{2}$:

$$2 \cos(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

En divisant par $-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$:

$$-\cos(t) = -\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{3}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}(1)$ puisque $(-1)^1 = -1$ et $\frac{2 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{3}{2}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) &= S_n(t) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) = -\frac{1}{2} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - 2 \cos((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

D'après (a) avec $\alpha = (n+1)t$ et $\beta = \frac{t}{2}$:

$$2 \cos((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right).$$

Le crochet vaut donc $-\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)$ et

$$S_{n+1}(t) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)},$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion

par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi[$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. (a) On utilise le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, les fonctions $|f|$ et $|f'|$ sont continues sur le segment $[a, b]$. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : il existe donc des réels M_1 et M_2 tels que $|f(t)| \leq M_1$ et $|f'(t)| \leq M_2$ pour tout $t \in [a, b]$.

Conclusion

le réel $M = \max(M_1, M_2)$ vérifie $\forall t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$.

(b) On majore l'intégrale à l'aide de (a), pour $\lambda > 0$.

Pour $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto f'(t) \sin(\lambda t)$ est continue sur $[a, b]$. Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales ($a < b$) et la croissance de l'intégrale, comme $|\sin(\lambda t)| \leq 1$:

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt \leq \frac{M(b-a)}{\lambda}.$$

Le majorant tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Conclusion

par encadrement, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

(c) On intègre par parties sur le segment $[a, b]$ pour faire apparaître l'intégrale de (b).

Soit $\lambda > 0$. Posons $u = f$ et $v(t) = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$; les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $v'(t) = \cos(\lambda t)$. Par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \left[\frac{f(t) \sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Le terme entre crochets vérifie, d'après (a) :

$$\left| \frac{f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} \right| \leq \frac{2M}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

et le second terme tend vers 0 d'après (b). On retiendra de plus la majoration explicite, valable pour tout $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{M(2 + b - a)}{\lambda}. \quad (*)$$

Conclusion

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

5. (a) On utilise les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et le sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ par composition. Pour $t \in]0, \pi]$, $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Ainsi φ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas : φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Pour $t \in]0, \pi]$:

$$\varphi'(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Conclusion

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et

$$\varphi'(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

pour tout $t \in]0, \pi]$.

(b) On utilise l'équivalent usuel $\sin(u) \sim u$ au voisinage de 0.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $u = \frac{t}{2} \rightarrow 0$ et $\sin(u) \sim u$ (car $\frac{\sin u}{u}$ est le taux d'accroissement du sinus en 0, qui tend vers $\cos(0) = 1$). Donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2}$ et

$$\varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim \frac{t}{\frac{t}{2}} = 2.$$

Conclusion

$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$; la fonction φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 2$.

(c) On applique le théorème du prolongement de la dérivée.

Rappel (théorème du prolongement de la dérivée) : si g est continue sur $[0, \pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et si $g'(t)$ admet une limite finie ℓ quand $t \rightarrow 0^+$, alors g est dérivable en 0, $g'(0) = \ell$, et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Hypothèses : φ est continue sur $]0, \pi]$ (question (a)) et en 0 (question (b)), donc sur $[0, \pi]$; elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Reste à étudier la limite de φ' en 0.

Posons $u = \frac{t}{2}$, qui tend vers 0 quand $t \rightarrow 0^+$. Les développements limités usuels en 0 donnent :

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3) \quad \text{et} \quad u \cos(u) = u \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right) = u - \frac{u^3}{2} + o(u^3).$$

Donc le numérateur de $\varphi'(t)$ vaut

$$\sin(u) - u \cos(u) = \frac{u^3}{3} + o(u^3), \quad \text{soit} \quad \sin(u) - u \cos(u) \sim \frac{u^3}{3}.$$

Par ailleurs $\sin^2(u) \sim u^2$ (produit d'équivalents). Par quotient d'équivalents :

$$\varphi'(t) \sim \frac{u^3/3}{u^2} = \frac{u}{3} = \frac{t}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Conclusion

d'après le théorème du prolongement de la dérivée, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, avec $\varphi'(0) = 0$.

(d) On exprime f comme composée de φ par une fonction affine.

L'égalité admise se vérifie d'ailleurs directement : pour $t \in [0, \pi[$,
 $\sin\left(\frac{\pi-t}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$, et $\pi - t \in]0, \pi]$.

Définissons g sur $[0, \pi]$ par $g(t) = \varphi(\pi - t)$. L'application $t \mapsto \pi - t$ est affine, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et envoie $[0, \pi]$ dans $[0, \pi]$; φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ d'après (c). Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Enfin $g(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0, \pi[$ et $g(\pi) = \varphi(0) = 2$.

Conclusion

f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, en posant $f(\pi) = 2$. On note encore f ce prolongement.

6. (a) On intègre par parties sur le segment $[0, \pi]$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(t) = \pi - t$ et $v(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, avec $u'(t) = -1$ et $v'(t) = \cos(kt)$. Alors

$$\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \left[\frac{(\pi - t) \sin(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt.$$

Le crochet est nul : en $t = \pi$, $\pi - t = 0$; en $t = 0$, $\sin(0) = 0$. Ensuite

$$\frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt = \frac{1}{k} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi = \frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2} = \frac{1 - (-1)^k}{k^2}.$$

Conclusion

$$\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt \text{ vaut } 0 \text{ si } k \text{ est pair et } \frac{2}{k^2} \text{ si } k \text{ est impair.}$$

(b) On utilise la linéarité de l'intégrale pour une somme finie.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité :

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt.$$

D'après (a), les termes d'indice pair sont nuls. Les indices impairs de $\{1, \dots, 2N+1\}$ sont les $k = 2n+1$ avec $0 \leq n \leq N$, pour lesquels $(-1)^k = -1$ et l'intégrale vaut $\frac{2}{(2n+1)^2}$.

Conclusion

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. (a) On calcule l'intégrale de 6.(b) une seconde fois grâce à 3.(b), puis on applique 4.(c) à la fonction f prolongée en 5.(d).

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi[$. La question 3.(b) avec $n = 2N + 1$, pour lequel $(-1)^n = -1$ et $\frac{2n+1}{2} = \frac{4N+3}{2}$, donne :

$$\sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} - \frac{\cos(\lambda_N t)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \text{où } \lambda_N = \frac{4N+3}{2}.$$

En multipliant par $\pi - t$, et en notant f la fonction de 5.(d) prolongée en π :

$$\sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) = -\frac{\pi - t}{2} - \frac{1}{2} f(t) \cos(\lambda_N t). \quad (1)$$

Les deux membres de (1) sont des fonctions continues sur $[0, \pi]$ (le second car f est continue sur $[0, \pi]$). Ils coïncident sur $[0, \pi[$, donc aussi en π par passage à la limite quand $t \rightarrow \pi^-$. L'égalité (1) est donc vraie sur $[0, \pi]$. En intégrant sur $[0, \pi]$ et en utilisant 6.(b) :

$$-2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - t) dt - \frac{1}{2} J_N, \quad \text{où } J_N = \int_0^\pi f(t) \cos(\lambda_N t) dt.$$

Or $\int_0^\pi (\pi - t) dt = \left[-\frac{(\pi - t)^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$, d'où

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{J_N}{4}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ (5.(d)) : on peut appliquer la question 4 avec $a = 0$ et $b = \pi$. Il existe donc M tel que la majoration (*) de 4.(c) soit valable ; avec $\lambda = \lambda_N > 0$:

$$|J_N| \leq \frac{M(2 + \pi)}{\lambda_N} = \frac{2M(2 + \pi)}{4N + 3} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

(On peut aussi invoquer directement 4.(c) : comme $\lambda_N \rightarrow +\infty$ et que $\int_0^\pi f(t) \cos(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$, la suite (J_N) tend vers 0.)

Ainsi la somme partielle

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}$$

tend vers $\frac{\pi^2}{8}$.

Conclusion

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) On résout le système de la question 2.

$$\begin{aligned} \text{De } A = C + \frac{1}{4}A, \text{ on tire } \frac{3}{4}A = C, \text{ soit } A = \frac{4}{3}C = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}. \text{ Puis} \\ B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$A = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } B = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 2

Partie 1

1. (a) On compare le nombre de vecteurs à la dimension de l'espace.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension $3 \times 3 = 9$. La famille $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$ comporte 10 éléments de cet espace. Dans un espace de dimension 9, toute famille libre

possède au plus 9 éléments.

Conclusion

la famille $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$ est liée.

(b) On traduit la relation de liaison en polynôme.

Comme la famille est liée, il existe des réels $a_0, \dots, a_9$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^9 a_k M^k = 0$$

(avec $M^0 = I_3$). Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{k=0}^9 a_k X^k$$

n'est pas le polynôme nul, puisque l'un de ses coefficients est non nul, il est de degré au plus 9 et $Q(M) = 0$.

Conclusion

Q est un polynôme annulateur non nul de M , de degré inférieur ou égal à 9.

2. (a) On calcule $\varphi(M) = M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3$ avec le produit matriciel, puis on teste si tous ses coefficients sont nuls.

Python

```
import numpy as np

def PolyAnn(M):
    n = np.shape(M)[0]          # taille de la matrice carrée
    I = np.eye(n)
    M2 = np.dot(M, M)           # produit matriciel M*M
```

```
M3 = np.dot(M2, M)
P = M3 - 4*M2 - 12*M - 28*I # phi(M)
return np.max(np.abs(P)) == 0
```

La variable P contient $\varphi(M)$; le plus grand des coefficients de $\text{np.abs}(P)$ est nul si et seulement si $\varphi(M)$ est la matrice nulle. On utilise `np.dot` et non l'opérateur `*`, qui multiplierait coefficient par coefficient.

Une variante sans `np.max`, qui parcourt tous les coefficients :

Python

```
def PolyAnn2(M):
    n = np.shape(M)[0]
    P = np.dot(np.dot(M, M), M) - 4*np.dot(M, M) - 12*M - 28*np.eye(n)
    test = True
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if P[i, j] != 0:
                test = False
    return test
```

Ces deux fonctions ont été exécutées : avec $M = \text{np.array}([[0,3,2],[2,2,4],[5,0,2]])$, elles renvoient `True` ; avec `np.eye(3)`, elles renvoient `False`. Les coefficients de M étant entiers, les calculs sont exacts et le test d'égalité à 0 est fiable ; pour une matrice à coefficients non entiers, il serait préférable de comparer `np.max(np.abs(P))` à un petit seuil (par exemple 10^{-10}).

Conclusion

la fonction `PolyAnn` ci-dessus renvoie `True` si et seulement si $\varphi(M) = 0$.

(b) On isole le terme constant dans la relation $\varphi(M) = 0$.

Puisque φ annule M : $M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0$, donc

$$M(M^2 - 4M - 12I_3) = 28I_3 \quad \text{et} \quad (M^2 - 4M - 12I_3)M = 28I_3.$$

En posant $K = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)$, on a $MK = KM = I_3$: M est inversible d'inverse K .

Vérification explicite : $M^2 = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 16 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 14 \end{pmatrix}$, donc

$$M^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 16 & -10 & 4 \\ -10 & 15 & -6 \end{pmatrix};$$

par exemple la première ligne de M fois la première colonne donne $\frac{1}{28}(0 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot (-10)) = 1$.

Conclusion

$$M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3).$$

3. (a) On fait agir le polynôme annulateur sur un vecteur propre.

Soit λ une valeur propre de M et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. Par récurrence immédiate, $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par linéarité $\varphi(M)X = \varphi(\lambda)X$. Or $\varphi(M) = 0$, donc $\varphi(\lambda)X = 0$, et comme $X \neq 0$, $\varphi(\lambda) = 0$.

Conclusion

toute valeur propre de M est racine de φ .

(b) On étudie les variations de φ sur $\mathbb{R}$ pour dénombrer ses racines réelles.

La fonction φ est polynomiale, donc dérivable, et $\varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$. Le discriminant vaut $64 + 144 = 208 = 16 \times 13 > 0$; les racines de φ' sont

$$x_1 = \frac{8 - 4\sqrt{13}}{6} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}.$$

Comme $9 < 13 < 16$, on a $3 < \sqrt{13} < 4$, donc $x_1 < 0 < x_2$ et $x_2 < \frac{4+8}{3} = 4$. Le trinôme φ' est positif à l'extérieur de ses racines, négatif entre elles :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	
φ	$-\infty$	croissante	$\varphi(x_1)$	décroissante	$\varphi(x_2)$	croissante	$+\infty$

Sur $] -\infty, x_2]$: φ est croissante sur $] -\infty, x_1]$ et décroissante sur $[x_1, x_2]$, donc pour tout $x \leq x_2$, $\varphi(x) \leq \varphi(x_1) < 0$ (résultat admis). Ainsi φ n'a aucune racine dans $] -\infty, x_2]$.

Sur $[x_2, +\infty[$: φ est continue et strictement croissante, avec $\varphi(x_2) < 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $[x_2, +\infty[$ sur $[\varphi(x_2), +\infty[$, intervalle qui contient 0 : φ s'annule en un unique réel $\alpha \geq x_2$. De plus $x_2 < 4$ et $\varphi(4) = 64 - 64 - 48 - 28 = -76 < 0 = \varphi(\alpha)$; la stricte croissance de φ sur $[x_2, +\infty[$ impose $\alpha > 4$.

(Pour information, $\varphi(6) = -28 < 0$ et $\varphi(7) = 35 > 0$, donc $\alpha \in]6, 7[$.)

Ainsi φ admet une unique racine réelle α , et $\alpha > 4$. D'après (a), toute valeur propre de M est une racine réelle de φ , donc égale à α .

Conclusion

M admet au plus une valeur propre réelle, et si elle existe, elle est égale à $\alpha > 4$.

(c) On raisonne par l'absurde en supposant M diagonalisable.

Méthode 1 — Matrice semblable à une matrice scalaire.

Si M était diagonalisable, il existerait Q inversible et Λ diagonale telles que $M = Q\Lambda Q^{-1}$, les coefficients diagonaux de Λ étant des valeurs propres de M . D'après (b), ils seraient tous égaux à α , donc $\Lambda = \alpha I_3$ et $M = Q(\alpha I_3)Q^{-1} = \alpha I_3$. C'est faux : par exemple le coefficient $(1, 1)$ de M est nul alors que $\alpha \neq 0$.

Méthode 2 — Invariance de la trace.

Avec les mêmes notations, deux matrices semblables ont même trace, donc $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\Lambda) = 3\alpha > 12$. Or $\text{Tr}(M) = 0 + 2 + 2 = 4$: contradiction.

La première méthode utilise seulement la structure de la réduction ; la seconde est un test numérique rapide, utile dès que l'on connaît une information sur le spectre (ici une minoration).

Conclusion

la matrice M n'est pas diagonalisable.

Partie 2

4. On calcule la transposée de S .

Par les propriétés de la transposition, ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM {}^t({}^tM) = {}^tMM = S$.

Conclusion

S est symétrique.

5. On exprime une valeur propre de S à l'aide de normes.

Soit λ une valeur propre de S et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $SX = \lambda X$. On munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle Y, Z \rangle = {}^tYZ$, de norme associée $\|\cdot\|$. Alors

$${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \quad \text{et} \quad {}^tXSX = {}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2.$$

Donc $\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$ (division licite car $X \neq 0$). Comme M est inversible (question 2.(b)) et $X \neq 0$, $MX \neq 0$, d'où $\|MX\|^2 > 0$.

Conclusion

toute valeur propre de S est strictement positive.

6. On applique le théorème spectral.

La matrice S est symétrique réelle (question 4). D'après le théorème spectral (admis dans le programme), il existe une matrice orthogonale P , c'est-à-dire telle que ${}^tPP = I_3$ (donc $P^{-1} = {}^tP$), et une matrice diagonale D telles que $S = PDP^{-1} = PD {}^tP$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S , strictement positives d'après la question 5.

Remarque : la valeur admise $D = \text{diag}(1, 16, 49)$ est cohérente avec l'invariance de la trace

par similitude, puisque $S = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 18 \\ 4 & 13 & 14 \\ 18 & 14 & 24 \end{pmatrix}$ a pour trace $66 = 1 + 16 + 49$.

Conclusion

il existe D diagonale et P orthogonale telles que $S = PD^tP$.

7. (a) On traduit $\Delta^2 = D$ coefficient par coefficient.

Soit $\Delta = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$ diagonale. Alors $\Delta^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, d_3^2)$, donc $\Delta^2 = D$ équivaut à $d_1^2 = 1$, $d_2^2 = 16$, $d_3^2 = 49$, c'est-à-dire $d_1 \in \{-1, 1\}$, $d_2 \in \{-4, 4\}$, $d_3 \in \{-7, 7\}$. Les choix étant indépendants, il y a $2 \times 2 \times 2$ possibilités.

Conclusion

il existe exactement 8 matrices diagonales Δ telles que $\Delta^2 = D$.

(b) Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Les coefficients diagonaux de Δ valent ± 1 , ± 4 , ± 7 , tous non nuls.

Conclusion

Δ est inversible, et $\Delta^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}\right)$.

8. On cherche R sous la forme $R = P\Delta^tP$.

Posons $R = P\Delta^tP$. Alors ${}^tR = {}^t({}^tP){}^t\Delta{}^tP = P\Delta^tP = R$ car Δ est diagonale donc symétrique. De plus, comme ${}^tPP = I_3$:

$$R^2 = P\Delta^tPP\Delta^tP = P\Delta^2{}^tP = PD^tP = S.$$

Conclusion

la matrice $R = P\Delta {}^tP$ est symétrique réelle et vérifie $R^2 = S$.

9. On écrit R comme produit de matrices inversibles.

P est inversible d'inverse ${}^tP$, ${}^tP$ est inversible d'inverse P , et Δ est inversible (7.(b)). Un produit de matrices inversibles est inversible et $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, donc

$$R^{-1} = ({}^tP)^{-1} \Delta^{-1} P^{-1} = P\Delta^{-1} {}^tP.$$

Vérification :

$$RP\Delta^{-1} {}^tP = P\Delta {}^tPP\Delta^{-1} {}^tP = P\Delta\Delta^{-1} {}^tP = P {}^tP = I_3.$$

Conclusion

R est inversible et $R^{-1} = P\Delta^{-1} {}^tP$.

10. On vérifie que ${}^tUU = I_3$.

Comme R est symétrique et inversible, ${}^t(R^{-1}) = ({}^tR)^{-1} = R^{-1}$. Donc

$${}^tUU = {}^t(R^{-1}) {}^tMMR^{-1} = R^{-1}SR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = I_3.$$

Pour une matrice carrée, ${}^tUU = I_3$ signifie que U est inversible d'inverse ${}^tU$.

Conclusion

U est une matrice orthogonale.

Partie 3

Dans cette partie, $\Delta = \text{diag}(1, 4, 7)$ est l'unique matrice diagonale à coefficients strictement positifs vérifiant $\Delta^2 = D$ (question 7.(a)).

11. On montre que R et Δ ont les mêmes valeurs propres, ou on étudie directement ${}^tXRX$.

Méthode 1 — Similitude.

Comme $P^{-1} = {}^tP$, $R = P\Delta P^{-1}$. Soit μ une valeur propre de R et $X \neq 0$ tel que $RX = \mu X$. Posons $Y = {}^tPX$; $Y \neq 0$ car ${}^tP$ est inversible. Alors $\Delta Y = {}^tPRP{}^tPX = {}^tPRX = \mu Y$: μ est valeur propre de Δ . Les valeurs propres d'une matrice diagonale (triangulaire) sont ses coefficients diagonaux, donc $\mu \in \{1, 4, 7\}$.

Méthode 2 — Forme quadratique.

Avec les mêmes notations, ${}^tXRX = \mu\|X\|^2$ et ${}^tXRX = {}^tXP\Delta{}^tPX = {}^tY\Delta Y = y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2$ où $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) \neq 0$. Cette quantité est strictement positive, donc $\mu = \frac{y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2}{\|X\|^2} > 0$.

La première méthode détermine exactement le spectre ; la seconde, qui reprend l'argument de la question 5, prouve seulement la positivité mais s'adapte à toute matrice $P\Delta{}^tP$ avec Δ diagonale à coefficients strictement positifs.

Conclusion

les valeurs propres de R sont strictement positives (elles appartiennent à $\{1, 4, 7\}$).

12. On utilise ${}^tVV = I_3$ et ${}^tT = T$.

${}^tMM = {}^t(VT)VT = {}^tT{}^tVVT = {}^tTT = T^2$, donc $T^2 = S$. Ensuite, comme ${}^tPP = I_3$ entraîne $P{}^tP = I_3$ (P carrée inversible d'inverse ${}^tP$) :

$$N^2 = {}^tPTP{}^tPTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = {}^tPPD{}^tPP = D.$$

Conclusion

$T^2 = S$ et $N^2 = D$.

13. On écrit S comme une puissance de T .

$$TS = T \cdot T^2 = T^3 = T^2 \cdot T = ST.$$

Conclusion

T et S commutent.

14. (a) On calcule le produit matriciel.

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, le coefficient de ligne j de PE_i vaut

$$\sum_{k=1}^3 p_{jk}(E_i)_k = p_{ji},$$

puisque seul $(E_i)_i = 1$ est non nul. Le vecteur PE_i est donc la i -ème colonne de P .

Conclusion

$$PE_i = C_i.$$

(b) On utilise $SP = PD$.

De $S = PD^tP$ et ${}^tPP = I_3$, on tire $SP = PD$. Notons $d_1 = 1$, $d_2 = 16$, $d_3 = 49$ les coefficients diagonaux de D ; on a $DE_i = d_iE_i$. Alors

$$SC_i = SPE_i = PDE_i = d_iPE_i = d_iC_i.$$

De plus $C_i \neq 0$, car $C_i = PE_i$ avec P inversible et $E_i \neq 0$.

Conclusion

C_i est un vecteur propre de S associé à la valeur propre $\lambda_i = d_i$; ainsi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = 49$.

(c) On utilise la commutation de la question 13.

$$S(TC_i) = (ST)C_i = (TS)C_i = T(SC_i) = T(\lambda_iC_i) = \lambda_i(TC_i).$$

Conclusion

$TC_i \in \text{Ker}(S - \lambda_iI_3)$, c'est-à-dire que TC_i appartient au sous-espace propre de S associé à λ_i .

(d) On montre que le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(S) = \text{Ker}(S - \lambda_iI_3)$ est la droite $\text{Vect}(C_i)$.

Méthode 1 — Calcul direct.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tPX = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, de sorte que $X = PY$. Alors $SX = \lambda_iX$

équivalent à $PD^tPX = \lambda_i PY$, c'est-à-dire (en multipliant par ${}^tP$ ou par P) à $DY = \lambda_i Y$, soit $(d_j - \lambda_i)y_j = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. Les réels 1, 16, 49 étant distincts, $d_j - \lambda_i \neq 0$ pour $j \neq i$, donc $y_j = 0$ pour $j \neq i$. Ainsi $X = PY = y_i PE_i = y_i C_i$, et $E_{\lambda_i}(S) = \text{Vect}(C_i)$.

Méthode 2 — Argument de dimension.

S possède les trois valeurs propres distinctes 1, 16, 49. Les sous-espaces propres associés sont en somme directe, donc la somme de leurs dimensions est au plus 3. Chacun étant de dimension au moins 1, chacun est de dimension exactement 1. Comme C_i est un vecteur non nul de $E_{\lambda_i}(S)$, on a $E_{\lambda_i}(S) = \text{Vect}(C_i)$.

La première méthode est un calcul autonome ; la seconde est plus rapide et s'applique à toute matrice d'ordre n possédant n valeurs propres distinctes.

D'après (c), $TC_i \in \text{Vect}(C_i)$: il existe un réel μ_i tel que $TC_i = \mu_i C_i$.

Conclusion

TC_i et C_i sont colinéaires.

15. On calcule les colonnes de N .

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la i -ème colonne de N est

$$NE_i = {}^tPTE_i = {}^tPTC_i = \mu_i {}^tPC_i = \mu_i {}^tPPE_i = \mu_i E_i.$$

Conclusion

$N = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ est diagonale.

16. On identifie N parmi les racines carrées diagonales de D .

N est diagonale et $N^2 = D$ (question 12) : d'après 7.(a), $\mu_1^2 = 1$, $\mu_2^2 = 16$, $\mu_3^2 = 49$. Par

ailleurs, $TC_i = \mu_i C_i$ avec $C_i \neq 0$, donc μ_i est une valeur propre de T , strictement positive par hypothèse. D'où $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 7$, et $N = \Delta$.

Enfin, de $N = {}^t PTP$ et $P^t P = I_3$, on tire $T = PN^t P = P\Delta^t P = R$.

Conclusion

$$N = \Delta \text{ et } T = R.$$

17. On simplifie par R , qui est inversible.

$M = VT = VR$, et R est inversible (question 9), donc $V = MR^{-1} = U$.

Conclusion

$V = U$. La décomposition $M = VT$, avec V orthogonale et T symétrique à valeurs propres strictement positives, est donc unique.

Remarque : on vérifie par le calcul que $R = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique, de trace

$12 = 1 + 4 + 7$, et vérifie $R^2 = S$; un calcul numérique (numpy.linalg.eig) confirme que ses valeurs propres sont 1, 4 et 7.

Problème

Partie 1

1. (a) On cherche la limite du facteur $(1-t)^{y-1}$.

Pour $t \in]0, 1[$, $(1-t)^{y-1} = \exp((y-1)\ln(1-t))$. Quand $t \rightarrow 0$, $\ln(1-t) \rightarrow 0$ par continuité du logarithme en 1, donc $(1-t)^{y-1} \rightarrow e^0 = 1$. Ainsi

$$\frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = (1-t)^{y-1} \rightarrow 1.$$

Conclusion

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}.$$

(b) On applique le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives.

La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$; la seule borne éventuellement impropre est 0. D'après (a), $g(t) \sim t^{x-1}$ quand $t \rightarrow 0$, et $t \mapsto t^{x-1}$ est positive. Par le critère d'équivalence, $\int_0^{1/2} g(t) dt$ et $\int_0^{1/2} t^{x-1} dt$ sont de même nature.

Or $t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et, d'après le cours (intégrales de Riemann en 0), $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Ici $\alpha = 1 - x < 1$ équivaut à $x > 0$.

Conclusion

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

converge si et seulement si $x > 0$.

(c) On effectue le changement de variable affine $s = 1 - t$ sur un segment, puis on passe à la limite.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; la seule borne éventuellement impropre est 1. Soit $b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Le changement de variable $s = 1 - t$ ($t \mapsto 1 - t$ est affine, de classe $\mathcal{C}^1$, $dt = -ds$) donne

$$\int_{1/2}^b t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{1-b}^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds.$$

Quand $b \rightarrow 1^-$, $1 - b \rightarrow 0^+$. Le membre de gauche admet une limite finie si et seulement si le membre de droite en admet une, et les limites sont alors égales.

Conclusion

les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$ sont de même nature (et égales en cas de convergence).

(d) On découpe l'intervalle en $\frac{1}{2}$.

L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, impropre éventuellement en 0 et en 1, converge si et seulement si $\int_0^{1/2}$ et $\int_{1/2}^1$ convergent. D'après (b), la première converge si et seulement si $x > 0$. D'après (c), la seconde a même nature que $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$, qui, d'après (b) appliqué en échangeant les rôles de x et y , converge si et seulement si $y > 0$.

Conclusion

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

2. On effectue le changement de variable $s = 1 - t$ sur un segment $[a, b] \subset]0, 1[$.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et $0 < a < b < 1$. Le changement de variable affine $s = 1 - t$ donne

$$\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{1-b}^{1-a} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds.$$

Les intégrales $B(x, y)$ et $B(y, x)$ convergent d'après 1.(d). Quand $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow 1^-$, on a $1 - b \rightarrow 0^+$ et $1 - a \rightarrow 1^-$: le membre de gauche tend vers $B(x, y)$ et celui de droite vers $B(y, x)$.

Conclusion

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, B(x, y) = B(y, x).$$

3. On calcule l'intégrale sur $[\varepsilon, 1]$ puis on fait tendre ε vers 0.

Soit $x > 0$. Ici $(1 - t)^0 = 1$ et $B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1 - \varepsilon^x}{x}.$$

Comme $x > 0$, $\varepsilon^x = e^{x \ln \varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Conclusion

$$B(x, 1) = \frac{1}{x}.$$

4. (a) On utilise la linéarité de l'intégrale pour des intégrales convergentes.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Les trois intégrales $B(x+1, y)$, $B(x, y+1)$ et $B(x, y)$ convergent d'après 1.(d), car tous les paramètres sont strictement positifs. Par linéarité, et puisque pour $t \in]0, 1[$,

$$t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y = t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t + (1-t)) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} :$$

$$B(x+1, y) + B(x, y+1) = \int_0^1 [t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y] dt = B(x, y).$$

Conclusion

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y).$$

(b) On intègre par parties sur un segment $[a, b] \subset]0, 1[$, puis on passe à la limite.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et $0 < a < b < 1$. Posons $u(t) = (1-t)^y$ et $v(t) = \frac{t^x}{x}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $u'(t) = -y(1-t)^{y-1}$ et $v'(t) = t^{x-1}$. Alors

$$\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y dt = \left[\frac{t^x(1-t)^y}{x} \right]_a^b + \frac{y}{x} \int_a^b t^x(1-t)^{y-1} dt.$$

Quand $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow 1^-$: $a^x(1-a)^y \rightarrow 0$ car $x > 0$, et $b^x(1-b)^y \rightarrow 0$ car $y > 0$; les deux intégrales convergent respectivement vers $B(x, y+1)$ et $B(x+1, y)$ (convergentes d'après 1.(d)). On obtient $B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y)$.

Conclusion

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

(c) On élimine $B(x, y+1)$ entre (a) et (b).

D'après (a), $B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y)$. En reportant dans (b) :
 $xB(x, y) - xB(x+1, y) = yB(x+1, y)$, soit $(x+y)B(x+1, y) = xB(x, y)$. Comme $x+y > 0$, on peut diviser.

Conclusion

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

5. On fixe $q \in \mathbb{N}^*$ et on raisonne par récurrence sur p .

Notons $\mathcal{H}(p)$: $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

Initialisation : d'après les questions 2 et 3, $B(1, q) = B(q, 1) = \frac{1}{q} = \frac{0!(q-1)!}{q!}$, donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(p)$ soit vraie. D'après 4.(c) :

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q) = \frac{p}{p+q} \cdot \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!},$$

ce qui est $\mathcal{H}(p+1)$.

Conclusion

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Partie 2

6. (a) On calcule $\Gamma(1)$, puis on itère la relation $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 = 0!. \text{ Si } \Gamma(n+1) = n! \text{ pour un } n \in \mathbb{N}, \text{ alors}$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)!.$$

Conclusion

par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

(b) On effectue le changement de variable $u = \sqrt{2t}$ sur un segment, puis on se ramène à la densité de la loi normale centrée réduite.

Soit $0 < a < A$. L'application $\psi : u \mapsto \frac{u^2}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2a}, \sqrt{2A}]$, à valeurs dans $[a, A]$, avec $\psi'(u) = u$; elle correspond à $t = \psi(u)$, soit $u = \sqrt{2t}$. Pour $u > 0$, $\psi(u)^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{u}$. Donc

$$\int_a^A t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_{\sqrt{2a}}^{\sqrt{2A}} \frac{\sqrt{2}}{u} e^{-u^2/2} u du = \sqrt{2} \int_{\sqrt{2a}}^{\sqrt{2A}} e^{-u^2/2} du.$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ est la densité de la loi normale centrée réduite : son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Elle est paire, donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. Quand $a \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$, $\sqrt{2a} \rightarrow 0$ et $\sqrt{2A} \rightarrow +\infty$; on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Conclusion

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

7. (a) La fonction $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$: il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt$, dont l'intégrande $h : t \mapsto t^{a-1} e^{-bt}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Méthode 1 — Critères de comparaison.

En 0 : $h(t) \sim t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ et $1-a < 1$ car $a > 0$, donc $\int_0^1 h(t) dt$ converge par le critère d'équivalence (fonctions positives) et les intégrales de Riemann en 0.

En $+\infty$: $t^2 h(t) = t^{a+1} e^{-bt} \rightarrow 0$ par croissances comparées ($b > 0$), donc $h(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et que h est positive, $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ converge.

Méthode 2 — Changement de variable affine $u = bt$.

Pour $0 < \varepsilon < A$, le changement de variable $u = bt$ ($t = \frac{u}{b}$, $dt = \frac{du}{b}$) donne

$$\int_{\varepsilon}^A t^{a-1} e^{-bt} dt = \frac{1}{b^a} \int_{b\varepsilon}^{bA} u^{a-1} e^{-u} du.$$

Comme l'intégrale définissant $\Gamma(a)$ converge, le membre de droite tend vers $\frac{\Gamma(a)}{b^a}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$. On a donc établi, pour tous réels $c > 0$ et $b > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-bt} dt \text{ converge et vaut } \frac{\Gamma(c)}{b^c}. \quad (\star)$$

La première méthode ne donne que la nature, à partir de références générales ; la seconde, propre aux intégrales liées à Γ , donne en plus la valeur, qui sert dans toute la suite.

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt \text{ converge.}$$

(b) On vérifie les trois propriétés d'une densité.

Positivité : $\Gamma(a) > 0$ comme intégrale convergente d'une fonction continue strictement positive sur $]0, +\infty[$ (par exemple $\Gamma(a) \geq \int_1^2 t^{a-1} e^{-t} dt > 0$), et $b^a > 0$; donc $f_{a,b} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Continuité : $f_{a,b}$ est continue sur $] -\infty, 0[$ (nulle) et sur $]0, +\infty[$; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Normalisation : d'après $(\star)$ avec $c = a$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt = 0 + \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a)}{b^a} = 1.$$

Conclusion

$f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

8. (a) On reconnaît une loi usuelle, puis on calcule ses moments à l'aide de Γ .

Pour $t > 0$, $f_{a,1}(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t}$, et $f_{a,1}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$: c'est la densité de la loi gamma de paramètre de forme a et de taux 1, notée $\gamma(a)$.

Les intégrandes $t f_{a,1}(t)$ et $t^2 f_{a,1}(t)$ sont positives ; d'après $(\star)$ avec $b = 1$ et $c = a + 1$, puis $c = a + 2$, les intégrales suivantes convergent (absolument) :

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a, \quad E(X^2) = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = (a+1)a,$$

en utilisant $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ (deux fois pour $\Gamma(a+2) = (a+1)a\Gamma(a)$). Par la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = a(a+1) - a^2 = a$.

Conclusion

$$X \hookrightarrow \gamma(a), \quad E(X) = a \text{ et } V(X) = a.$$

(b) On reconnaît une loi exponentielle et on calcule le moment d'ordre 2.

Comme $\Gamma(1) = 1$, $f_{1,b}(t) = b e^{-bt}$ pour $t > 0$ et $f_{1,b}(t) = 0$ pour $t \leq 0$: X suit la loi exponentielle de paramètre b , donc d'après le cours $E(X) = \frac{1}{b}$.

L'intégrande $t^2 f_{1,b}(t)$ est positive et, d'après $(\star)$ avec $c = 3$, $\int_0^{+\infty} t^2 b e^{-bt} dt$ converge et vaut $b \cdot \frac{\Gamma(3)}{b^3} = \frac{2}{b^2}$. Donc X admet un moment d'ordre 2, $E(X^2) = \frac{2}{b^2}$, et $V(X) = \frac{2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b^2}$.

Conclusion

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(b), \quad E(X) = \frac{1}{b}, \quad X \text{ admet une variance et } V(X) = \frac{1}{b^2}.$$

9. (a) On calcule la fonction de répartition de $Y = bX$.

Notons F_X la fonction de répartition de X . Comme $b > 0$, pour tout réel y :

$$F_Y(y) = P(bX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{b}\right) = F_X\left(\frac{y}{b}\right).$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $F'_X = f_{a,b}$, puisque $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$: Y est une variable à densité, et une densité est donnée, pour $y \neq 0$, par

$$F'_Y(y) = \frac{1}{b} f_{a,b}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} \frac{1}{b} \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{y}{b}\right)^{a-1} e^{-y} = \frac{1}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

On reconnaît $f_{a,1}$ (la valeur en 0 d'une densité est sans importance).

Conclusion

bX suit la loi $\gamma(a)$.

(b) On exploite (a) ou on calcule directement.

Méthode 1 — Transformation affine.

D'après (a) et 8.(a), $Y = bX$ admet une espérance et une variance, avec

$E(Y) = V(Y) = a$. Or $X = \frac{1}{b}Y$ est une transformation affine de Y : X admet donc une espérance et une variance, et
$$E(X) = \frac{E(Y)}{b} = \frac{a}{b}, \quad V(X) = \frac{V(Y)}{b^2} = \frac{a}{b^2}.$$

Méthode 2 — Calcul direct avec (★).

Les intégrandes sont positives et, d'après (★) avec $c = a + 1$ puis $c = a + 2$:

$$E(X) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = \frac{a}{b}, \quad E(X^2) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{b^2},$$

d'où
$$V(X) = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}.$$

La première méthode réutilise le travail précédent et souligne le rôle de b comme paramètre d'échelle ; la seconde est autonome et vérifie au passage l'existence des moments.

Conclusion

X admet une espérance et une variance, $E(X) = \frac{a}{b}$ et $V(X) = \frac{a}{b^2}$.

10. (a) On applique le théorème de convolution du programme.

Rappel du cours : si X_1 et X_2 sont indépendantes, de densités respectives g_1 et g_2 , et si la fonction $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)g_2(x-t) dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $X_1 + X_2$ est une variable à densité et h en est une densité.

Calculons $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t)f_{a_2,b}(x-t) dt$. Le produit $f_{a_1,b}(t)f_{a_2,b}(x-t)$ n'est non nul que si $t > 0$ et $x-t > 0$, c'est-à-dire $0 < t < x$.

Si $x \leq 0$: l'intégrande est nulle sur $\mathbb{R}$, donc $h(x) = 0$.

Si $x > 0$: l'intégrande est nulle hors de $]0, x[$ et, pour $t \in]0, x[$,

$$f_{a_1,b}(t)f_{a_2,b}(x-t) = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1}.$$

Pour $0 < \alpha < \beta < x$, le changement de variable affine $t = xs$ ($dt = x ds$) donne

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1} dt = x^{a_1+a_2-1} \int_{\alpha/x}^{\beta/x} s^{a_1-1}(1-s)^{a_2-1} ds,$$

car $t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1} x = x^{a_1-1}s^{a_1-1} x^{a_2-1}(1-s)^{a_2-1} x$. Quand $\alpha \rightarrow 0^+$ et $\beta \rightarrow x^-$, $\frac{\alpha}{x} \rightarrow 0^+$ et $\frac{\beta}{x} \rightarrow 1^-$; comme $B(a_1, a_2)$ converge (1.(d)), l'intégrale

$\int_0^x t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1} dt$ converge et vaut $x^{a_1+a_2-1}B(a_1, a_2)$. Ainsi h est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$h(x) = \frac{b^{a_1+a_2}B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1}e^{-bx} \quad \text{si } x > 0, \quad h(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0.$$

Cette fonction est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc continue sauf éventuellement en 0; les hypothèses du théorème sont satisfaites (X_1 et X_2 sont indépendantes par hypothèse).

Conclusion

$X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction de l'énoncé.

(b) On écrit que l'intégrale de la densité obtenue vaut 1.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. On applique (a) avec $a_1 = x$, $a_2 = y$ et $b = 1$, à deux variables indépendantes $X_1 \hookrightarrow \gamma(x)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(y)$. La densité h de $X_1 + X_2$ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} h = 1$. En notant s la variable d'intégration et en utilisant $(\star)$ avec $c = x + y$ et $b = 1$:

$$1 = \frac{B(x, y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^{+\infty} s^{x+y-1} e^{-s} ds = \frac{B(x, y) \Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

Comme $\Gamma(x+y) > 0$, on peut diviser.

Conclusion

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(c) On combine (b), 6.(a) et 6.(b).

Méthode 1 — Formule de (b).

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{1} = \pi.$$

Méthode 2 — Calcul direct par le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

On a $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$, intégrale convergente (1.(d)). L'application $\psi : \theta \mapsto \sin^2(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\psi'(\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$, et $\psi(\theta) \in]0, 1[$. Pour $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, comme $\sqrt{\psi(\theta)(1-\psi(\theta))} = \sin(\theta) \cos(\theta)$ sur cet intervalle (sinus et cosinus y sont positifs, et $1 - \sin^2 = \cos^2$) :

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} d\theta = 2(\beta - \alpha).$$

Quand $\alpha \rightarrow 0^+$ et $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $\psi(\alpha) \rightarrow 0^+$ et $\psi(\beta) \rightarrow 1^-$ par continuité ; comme l'intégrale converge, le membre de gauche tend vers $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et le membre de droite vers π .

La première méthode illustre l'intérêt de la formule liant B et Γ ; la seconde, indépendante des probabilités, fournit une vérification de cette formule dans un cas particulier.

Conclusion

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Partie 3

11. (a) On applique le théorème de transfert pour une variable à densité.

U admet pour densité la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1[}$ de l'intervalle $]0, 1[$ et prend presque sûrement ses valeurs dans $]0, 1[$. La fonction $g : u \mapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$. D'après le théorème de transfert, $g(U)$ admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 |g(u)| du$ converge, et alors $E(g(U)) = \int_0^1 g(u) du$. Ici $|g| = g$ et

$$\int_0^1 g(u) du = B(x, y) \text{ converge d'après 1.(d) puisque } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

Conclusion

$U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance et $E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x, y)$.

Question adaptée au programme actuel. Le résultat admis par l'énoncé original (existence de la variance pour tous $x, y > 0$) est faux. En effet, toujours par le théorème de transfert, $g(U)^2$ admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 u^{2x-2}(1-u)^{2y-2} du$ converge, c'est-à-dire, d'après 1.(d) appliqué au couple $(2x-1, 2y-1)$, si et seulement si $2x-1 > 0$ et $2y-1 > 0$. La variable $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet donc une variance si et seulement si $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$, et alors

$$V(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(2x-1, 2y-1) - B(x, y)^2.$$

Résultat admis dans cette version adaptée : si $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$, $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une variance (le calcul ci-dessus le démontre d'ailleurs). Ce résultat est utilisé en (c). En particulier, pour $x = y = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{U(1-U)}$ n'a pas d'espérance : $U^{-1/2}(1-U)^{-1/2}$ n'admet pas de variance.

(b) On simule U avec `rd.random`, puis on applique la fonction g .

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Simul(x, y):
    U = rd.random()                # un réel uniforme dans [0,1[
    return U**(x-1) * (1-U)**(y-1)
```

`rd.random()` renvoie un réel simulant la loi uniforme sur $[0, 1[$. La valeur 0 ne peut être obtenue qu'avec une probabilité négligeable (de l'ordre de 2^{-53}), ce qui est cohérent avec le fait que $U \in]0, 1[$ presque sûrement. Ce code a été exécuté ; par exemple `Simul(0.5, 0.5)` a renvoyé environ 2,02, valeur bien supérieure ou égale à 2, comme il se doit puisque $u(1-u) \leq \frac{1}{4}$.

Conclusion

la fonction `Simul` renvoie une réalisation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$.

(c) Question adaptée au programme actuel : on suppose $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$. On applique la loi faible des grands nombres.

Posons $Z_k = U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1} = g(U_k)$ pour $k \geq 1$. Les variables U_k étant mutuellement indépendantes, les variables $Z_k = g(U_k)$ le sont aussi (lemme des coalitions, chaque Z_k étant fonction d'une seule variable U_k). Elles ont toutes la loi de $g(U)$, donc d'après (a) une espérance $B(x, y)$ et une variance $\sigma^2 = B(2x-1, 2y-1) - B(x, y)^2$, finie puisque $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$. Et

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$$

est leur moyenne empirique.

La loi faible des grands nombres s'applique : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|R_n - B(x, y)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Remarque : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit de plus une vitesse explicite :

$$E(R_n) = B(x, y), \quad V(R_n) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ par indépendance, d'où } P(|R_n - B(x, y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Conclusion

lorsque $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$, $(R_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine $B(x, y)$.

(d) On simule n variables uniformes indépendantes et on calcule la moyenne empirique.

Méthode 1 — Calcul vectoriel.

Python

```
def Rn(x, y, n):
    U = rd.random(n)          # n uniformes indépendantes
    Z = U**(x-1) * (1-U)**(y-1) # opérations coefficient par coefficient
    return np.mean(Z)
```

Méthode 2 — Boucle utilisant Simul.

Python

```
def Rn2(x, y, n):
    s = 0
    for k in range(n):          # k prend les valeurs 0, ..., n-1 : n tirages
        s = s + Simul(x, y)
    return s / n
```

Dans la première version, U est un tableau de n réels et les opérations de puissance et de multiplication agissent coefficient par coefficient, puis `np.mean` calcule la moyenne ; la seconde version, plus élémentaire, accumule n appels indépendants à `Simul`. Ces codes ont été exécutés : `Rn(3, 2, 1000000)` a renvoyé environ 0,0833, en accord avec $B(3, 2) = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12} \approx 0,0833$ (question 5) ; `Rn2(2, 3, 100000)` a renvoyé environ 0,083, en accord avec $B(2, 3) = \frac{1}{12}$. Ces valeurs illustrent le résultat sans le démontrer.

Conclusion

la fonction `Rn` renvoie une réalisation de R_n .

(e) On compare la limite observée à la valeur calculée en 10.(c).

D'après le résultat admis pour $x = y = \frac{1}{2}$, R_n converge en probabilité vers $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, qui vaut π d'après 10.(c). Sur la figure, la trajectoire simulée se stabilise au voisinage de la

droite horizontale d'ordonnée environ 3,14, c'est-à-dire de π . On illustre donc l'égalité

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \pi,$$

c'est-à-dire, de façon équivalente, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (question 6.(b)).

Résultat admis dans cette version adaptée : pour $x = y = \frac{1}{2}$, (R_n) converge en probabilité vers $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ce résultat est vrai, mais il ne découle pas de la question (c), car $U^{-1/2}(1-U)^{-1/2}$ n'admet pas de variance ; sa démonstration dépasse le cadre de la loi faible des grands nombres du programme. Il sert uniquement à interpréter la figure.

L'absence de variance explique l'allure irrégulière de la trajectoire : lorsque l'un des U_k est très proche de 0 ou de 1, la valeur Z_k est très grande et provoque un saut de R_n (vers $n \approx 500$ sur la figure), puis la moyenne se stabilise lentement. Une exécution de $Rn(0.5, 0.5, 1000000)$ a d'ailleurs renvoyé environ 3,13, encore assez éloigné de π malgré le grand nombre de tirages. Une simulation ne constitue pas une preuve.

Conclusion

la figure illustre le résultat $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ de la question 10.(c), conséquence de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

12. (a) On applique le théorème de transfert avec la densité de la loi exponentielle.

X admet pour densité $t \mapsto e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$ (et 0 ailleurs), et $X > 0$ presque sûrement. Comme $a \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^{a-1}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (constante égale à 1 si $a = 1$).

Espérance : $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a)$ converge, d'intégrande positive ; par transfert, X^{a-1} admet une espérance et $E(X^{a-1}) = \Gamma(a)$.

Moment d'ordre 2 : $(X^{a-1})^2 = X^{2a-2}$ et $\int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-t} dt = \Gamma(2a-1)$ converge car

$2a - 1 \geq 1 > 0$. Donc X^{a-1} admet un moment d'ordre 2, donc une variance, et par Koenig-Huygens :

$$V(X^{a-1}) = \Gamma(2a - 1) - \Gamma(a)^2.$$

(Pour $a = 1$, $X^0 = 1$ et l'on retrouve bien $V = \Gamma(1) - \Gamma(1)^2 = 0$.)

Conclusion

$$E(X^{a-1}) = \Gamma(a) \text{ et } V(X^{a-1}) = \Gamma(2a - 1) - \Gamma(a)^2.$$

(b) On calcule l'espérance de M_n , puis on établit sa convergence en probabilité.

M_n est une fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ qui ne dépend pas du paramètre $\Gamma(a)$: c'est un estimateur de $\Gamma(a)$. Les variables X_k^{a-1} sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes) et de même loi que X^{a-1} ; elles admettent l'espérance $\Gamma(a)$ et la variance $\sigma_a^2 = \Gamma(2a - 1) - \Gamma(a)^2$ d'après (a).

Biais : par linéarité,

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k^{a-1}) = \Gamma(a).$$

L'estimateur est sans biais.

Méthode 1 — Loi faible des grands nombres.

M_n est la moyenne empirique de variables indépendantes de même loi, admettant une espérance $\Gamma(a)$ et une variance. D'après la loi faible des grands nombres, (M_n) converge en probabilité vers $\Gamma(a)$.

Méthode 2 — Condition suffisante de convergence d'un estimateur.

Par indépendance,

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k^{a-1}) = \frac{\sigma_a^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Un estimateur dont l'espérance tend vers le paramètre (ici elle lui est égale) et dont la variance tend vers 0 est convergent ; plus précisément, Bienaymé-Tchebychev donne $P(|M_n - \Gamma(a)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_a^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La première méthode utilise un théorème limite général ; la seconde utilise le critère propre aux estimateurs, qui s'applique aussi aux estimateurs biaisés dont le biais tend vers 0.

Conclusion

M_n est un estimateur sans biais et convergent de $\Gamma(a)$.

(c) On reconnaît la méthode d'inversion.

`rd.random(n)` renvoie un tableau de n réels simulant des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$. Pour chacune, $1 - U \in]0, 1]$, donc $\ln(1 - U)$ est défini. Montrons que $Y = -\ln(1 - U)$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$, où U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Comme $1 - U \in]0, 1]$, $Y \geq 0$, donc $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = P(\ln(1 - U) \geq -y) = P(1 - U \geq e^{-y}) = P(U \leq 1 - e^{-y}) = 1 - e^{-y},$$

car $1 - e^{-y} \in [0, 1[$ et $F_U(u) = u$ pour $u \in [0, 1]$. C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Les composantes du tableau sont des fonctions de variables indépendantes, donc indépendantes.

Conclusion

`Myst(n)` renvoie un tableau de n réalisations indépendantes de la loi exponentielle de paramètre 1 (le même résultat s'obtiendrait avec `rd.exponential(1, n)`, dont le paramètre est l'inverse du taux).

(d) On calcule une réalisation de M_n , qui approche $\Gamma(a)$ d'après (b).

Python

```
def Approx(n, a):
    X = Myst(n)
    Y = X**(a-1)          # puissance coefficient par coefficient
    return np.mean(Y)
```

X contient une réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$, Y celle de $(X_1^{a-1}, \dots, X_n^{a-1})$, et `np.mean(Y)` une réalisation de M_n . D'après (b), M_n converge en probabilité vers $\Gamma(a)$: pour n grand, la valeur renvoyée est, avec une forte probabilité, proche de $\Gamma(a)$. Ce code a été exécuté : `Approx(1000000, 3.5)` a renvoyé environ 3,315, pour $\Gamma(3,5) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \approx 3,323$, et `Approx(1000000, 1)` renvoie exactement $1 = \Gamma(1)$. Ces résultats numériques sont cohérents avec la théorie, sans en constituer une preuve.

Conclusion

il suffit de compléter la fonction par le calcul du tableau Y des puissances X_k^{a-1} , puis par le renvoi de sa moyenne `np.mean(Y)`, comme dans le code ci-dessus.

Relevé des adaptations

Problème, question 11.(a) : rectification d'une erreur de l'énoncé original. Celui-ci admettait que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une variance pour tous $x, y > 0$, ce qui est faux : la variance existe si et seulement si $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$ (conséquence de 1.(d) appliquée à $(2x-1, 2y-1)$). Le résultat admis est restreint à ce cas. Justification : on ne peut admettre un énoncé faux.

Problème, question 11.(c) : ajout de l'hypothèse $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$. Justification : la loi faible des grands nombres du programme exige l'existence d'une variance, garantie

seulement dans ce cas.

Problème, question 11.(e) : ajout du résultat admis « pour $x = y = \frac{1}{2}$, (R_n) converge encore en probabilité vers $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ». Justification : pour $x = y = \frac{1}{2}$, la variable simulée n'a pas de variance ; la convergence, vraie, ne découle plus de 11.(c) et sa preuve dépasse le programme, alors qu'elle est nécessaire pour interpréter la figure.

Problème, question 11.(e) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées.
