



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 2024

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

1. Il s'agit de rappeler deux résultats de référence du cours.

Séries de Riemann : la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de référence : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour mémoire, si $\alpha \neq 1$ et $B > 1$, $\int_1^B \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$, qui admet une limite finie quand $B \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$; si $\alpha = 1$, $\int_1^B \frac{dt}{t} = \ln B \rightarrow +\infty$.

Conclusion

la série et l'intégrale convergent si et seulement si $\alpha > 1$. En particulier, avec $\alpha = 2$, la série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, ce qui justifie la définition de S et de R_N .

2. (a) On encadre $\frac{1}{n^2}$ par des intégrales en utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.

La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $h'(t) = -\frac{2}{t^3} < 0$: elle est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $t \geq n > 0$, donc $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Par croissance de l'intégrale sur le segment $[n, n+1]$ (de longueur 1) :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Pour tout $t \in [n-1, n]$, on a $0 < n-1 \leq t \leq n$ (car $n \geq 2$), donc $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{n^2}$, et de même :

$$\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2} \geq \frac{1}{n^2}.$$

Conclusion

pour tout entier $n \geq 2$,
$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}.$$

(b) On somme les inégalités précédentes pour n allant de $N+1$ à K , puis on fait tendre K vers $+\infty$.

Soit $N \geq 1$ et $K > N$. Les entiers $n \in \llbracket N+1, K \rrbracket$ vérifient $n \geq 2$, donc on peut sommer les inégalités de 2(a) et utiliser la relation de Chasles :

$$\int_{N+1}^{K+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=N+1}^K \frac{1}{n^2} \leq \int_N^K \frac{dt}{t^2}.$$

Comme une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto -\frac{1}{t}$, on obtient :

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{K+1} \leq \sum_{n=N+1}^K \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{K}.$$

La série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge (question 1), donc

$$\sum_{n=N+1}^K \frac{1}{n^2} \rightarrow R_N$$

quand $K \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}.$$

3. On remarque que $S - S_N = R_N \geq 0$, donc $|S_N - S| = R_N \leq \frac{1}{N}$ d'après 2(b).

Or $\frac{1}{N} \leq 10^{-3}$ dès que $N \geq 1000$.

Conclusion

$$N_0 = 1000 \text{ convient : } \forall N \geq 1000, |S_N - S| \leq 10^{-3}.$$

Remarque : la minoration $R_N \geq \frac{1}{N+1}$ montre qu'on ne peut pas descendre en dessous de $N = 999$: pour $N \leq 998$, $R_N \geq \frac{1}{999} > 10^{-3}$. La valeur $N_0 = 1000$ est donc quasiment optimale.

4. (a) On écrit $T_N - S$ à l'aide du reste R_N puis on utilise l'encadrement de 2(b).

On a $T_N - S = S_N - S + \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} - R_N$. D'après 2(b) :

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{N+1} - R_N \leq \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+1} = 0.$$

Or $\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} = -\frac{1}{N(N+1)}$. Donc $-\frac{1}{N(N+1)} \leq T_N - S \leq 0$, d'où :

$$|T_N - S| \leq \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}.$$

Conclusion

pour tout $N \geq 1$, $|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$.

(b) D'après 4(a), il suffit que $\frac{1}{N^2} \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $N^2 \geq 1000$.

Comme $31^2 = 961 < 1000$ et $32^2 = 1024 \geq 1000$, et comme $N \mapsto N^2$ est croissante sur $\mathbb{N}$, on a $N^2 \geq 1000$ pour tout $N \geq 32$.

Conclusion

$N_1 = 32$ convient, et $N_1 < N_0 = 1000$. Ajouter le terme correctif $\frac{1}{N+1}$ (qui est un équivalent de R_N) divise environ par 30 le nombre de termes nécessaires.

5. (a) On compare chacun des $p+1$ facteurs du dénominateur à n .

Pour $n \geq 1$:

$$n^{p+1}u_n(p) = \prod_{j=0}^p \frac{n}{n+j} = \prod_{j=0}^p \frac{1}{1 + \frac{j}{n}}.$$

Chacun des $p+1$ facteurs tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$; le produit (d'un nombre fixé de facteurs) tend donc vers 1.

Conclusion

$$u_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

(b) Les séries

$$\sum u_n(p)$$

et

$$\sum \frac{1}{n^{p+1}}$$

sont à termes strictement positifs et leurs termes généraux sont équivalents. Or $p + 1 \geq 2 > 1$, donc la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{p+1}}$$

converge (question 1).

Conclusion

par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n(p)$$

converge.

6. (a) On réduit au même dénominateur.

Pour $n \geq 1$, $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$. Il suffit donc que $a + b = 0$ et $a = 1$, c'est-à-dire

$a = 1$ et $b = -1$. Vérification : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = u_n(1)$.

Conclusion

$$a = 1, b = -1 : \quad u_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

(b) La somme est télescopique. Pour $K \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^K u_n(1) = \sum_{n=1}^K \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{K+1} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$$U(1) = 1.$$

7. (a) On met au même dénominateur les deux termes, qui ont $p-1$ facteurs communs.

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 2$. On a $u_n(p-1) = \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p-1)}$ et

$u_{n+1}(p-1) = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)}$. Le dénominateur commun est $n(n+1) \cdots (n+p)$:

$$u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = \frac{(n+p) - n}{n(n+1) \cdots (n+p)} = \frac{p}{n(n+1) \cdots (n+p)}.$$

Conclusion

$$u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = p u_n(p).$$

(b) On distingue $p = 1$ (déjà traité) et $p \geq 2$, cas où l'on somme la relation télescopique de 7(a).

Cas $p = 1$: $U(1) = 1 = \frac{1}{1 \cdot 1!}$ d'après 6(b).

Cas $p \geq 2$: pour $K \geq 1$, d'après 7(a),

$$p \sum_{n=1}^K u_n(p) = \sum_{n=1}^K (u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)) = u_1(p-1) - u_{K+1}(p-1).$$

On a $u_1(p-1) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots p} = \frac{1}{p!}$ et $0 < u_{K+1}(p-1) \leq \frac{1}{K+1} \rightarrow 0$ (tous les facteurs du dénominateur sont supérieurs ou égaux à 1 et le premier vaut $K+1$). La série

$$\sum u_n(p)$$

convergeant (5(b)), on passe à la limite :

$$pU(p) = \frac{1}{p!}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } p \geq 1, \quad U(p) = \frac{1}{p \cdot p!}.$$

8. (a) On procède par récurrence sur $p \geq 1$, l'entier $n \geq 1$ étant quelconque. Pour $p \geq 1$, notons $\mathcal{H}(p)$: « pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k)$$

».

Initialisation ($p = 1$). Pour $n \geq 1$, le membre de droite vaut :

$$\frac{1}{n^2(n+1)} + 0! u_n(1) = \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2}.$$

Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie pour un $p \geq 1$ et fixons $n \geq 1$. Il suffit d'établir :

$$\frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} = \frac{(p+1)!}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)} + p! u_n(p+1).$$

En effet, on a

$$p! u_n(p+1) = \frac{p!}{n(n+1) \cdots (n+p+1)} = \frac{p! n}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)},$$

donc le membre de droite vaut :

$$\frac{p!((p+1)+n)}{n^2(n+1) \cdots (n+p)(n+p+1)} = \frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}.$$

En reportant dans $\mathcal{H}(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)} + p! u_n(p+1) + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k) \\ &= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1) \cdots (n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p+1} (k-1)! u_n(k). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

Conclusion

par récurrence, $\mathcal{H}(p)$ est vraie pour tout $p \geq 1$.

(b) On somme l'identité de 8(a) en n , après avoir justifié la convergence de chaque série.

Fixons $p \geq 1$ et notons $v_n(p) = \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}$. Pour $n \geq 1$,

$0 < v_n(p) = \frac{u_n(p)}{n} \leq u_n(p)$. Comme

$$\sum u_n(p)$$

converge (5(b)), la série à termes positifs

$$\sum v_n(p)$$

converge par comparaison.

D'après 8(a), pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n^2} = p! v_n(p) + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k).$$

Les séries

$$\sum v_n(p)$$

et

$$\sum u_n(k)$$

$(1 \leq k \leq p)$ convergent ; par linéarité de la somme d'une combinaison linéaire finie de séries convergentes :

$$S = p! \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(p) + \sum_{k=1}^p (k-1)! U(k).$$

D'après 7(b), $(k-1)! U(k) = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2}.$

Conclusion

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}$$

converge et

$$S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}.$$

9. On majore $v_n(p)$ par $\frac{1}{n^{p+2}}$, puis on compare à une intégrale comme en question 2.

Soient $N \geq 1$ et $p \geq 1$. Positivité : la série

$$\sum v_n(p)$$

converge (8(b)) et ses termes sont positifs, donc son reste

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(p)$$

est positif.

Majoration. Pour $n \geq 1$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $n+j \geq n$, donc $v_n(p) \leq \frac{1}{n^2 \cdot n^p} = \frac{1}{n^{p+2}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (dérivée $-\frac{p+2}{x^{p+3}} < 0$). Pour $n \geq 2$ et $x \in [n-1, n] \subset]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{x^{p+2}} \geq \frac{1}{n^{p+2}}$, d'où $\frac{1}{n^{p+2}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{p+2}}$.

Pour $K > N$, en sommant pour $n \in \llbracket N+1, K \rrbracket$ (ces entiers sont ≥ 2) et avec la primitive $x \mapsto -\frac{1}{(p+1)x^{p+1}}$:

$$\sum_{n=N+1}^K v_n(p) \leq \int_N^K \frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{N^{p+1}} - \frac{1}{K^{p+1}} \right) \leq \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}.$$

On fait tendre K vers $+\infty$ (la série converge).

Conclusion

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} \leq \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On exprime $S - U_N$ comme un reste, puis on applique la question 9 avec $p = 3$.

On vérifie d'abord

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36 + 9 + 4}{36} = \frac{49}{36}$$

et $3! = 6$.

D'après 8(b) avec $p = 3$:

$$S = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(3).$$

Donc, pour $N \geq 1$:

$$S - U_N = 6 \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(3).$$

D'après la question 9 avec $p = 3$:

$$0 \leq S - U_N \leq \frac{6}{4N^4} = \frac{3}{2N^4}.$$

Il suffit donc que $\frac{3}{2N^4} \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $N^4 \geq 1500$. Or $6^4 = 1296 < 1500$ et $7^4 = 2401 \geq 1500$; par croissance de $N \mapsto N^4$ sur $\mathbb{N}$, $N^4 \geq 1500$ pour tout $N \geq 7$.

Conclusion

$$N_2 = 7 \text{ convient : } \forall N \geq 7, |U_N - S| \leq 10^{-3}.$$

Remarque. Il ne faut pas oublier le facteur $3! = 6$: la seule majoration $\frac{1}{4N^4} \leq 10^{-3}$, qui conduirait à $N \geq 4$ grâce à $4^4 = 256$, ne porte que sur le reste

$$\sum_{n>N} v_n(3),$$

et non sur $S - U_N$. D'ailleurs un calcul numérique (machine) donne $S - U_4 \approx 1,48 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$: l'entier 4 ne convient pas. Le même calcul donne $S - U_5 \approx 7,7 \cdot 10^{-4}$, de sorte que le plus petit entier valable est en réalité 5 ; la valeur $N_2 = 7$ est celle que l'on peut établir rigoureusement avec la majoration de la question 9.

11. On lit le graphique à l'aide des majorations obtenues.

Les deux axes sont en échelle logarithmique. Sur un tel graphique, une quantité de la forme $\frac{C}{N^k}$ est représentée par une droite de pente $-k$: en effet

$$\frac{\ln\left(\frac{C}{N^k}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln(C)}{\ln(10)} - k \frac{\ln(N)}{\ln(10)}.$$

Erreur $|S_N - S|$ (trait plein). D'après 2(b), $\frac{1}{N+1} \leq S - S_N \leq \frac{1}{N}$, donc

$S - S_N \sim \frac{1}{N}$ (encadrement). On observe une droite de pente -1 : l'erreur perd une décade quand N est multiplié par 10, et vaut environ 10^{-3} pour $N = 10^3$, en accord avec $N_0 = 1000$ (question 3).

Erreur $|T_N - S|$ (trait mixte). D'après 4(a), $0 \leq S - T_N \leq \frac{1}{N(N+1)}$: l'erreur décroît

au moins comme $\frac{1}{N^2}$. La courbe est une droite de pente -2 environ (elle passe d'environ $4 \cdot 10^{-3}$ pour $N = 10$ à environ $5 \cdot 10^{-7}$ pour $N = 10^3$, soit environ quatre décades pour deux décades de N). Le seuil 10^{-3} est franchi vers $N \approx 22$, avant $N_1 = 32$: la majoration $\frac{1}{N^2}$ est un peu pessimiste (la figure suggère une erreur de l'ordre de $\frac{1}{2N^2}$).

Erreur $|U_N - S|$ (pointillés). D'après la question 10, $0 \leq S - U_N \leq \frac{3}{2N^4}$. Pour N grand, la courbe est une droite de pente -4 environ (elle passe d'environ 10^{-4} pour $N = 10$ à environ 10^{-8} pour $N = 100$). Le seuil 10^{-3} est atteint dès $N \approx 5$, ce qui est compatible avec $N_2 = 7$. Pour les petites valeurs de N , la courbe est moins pentue : le comportement en $\frac{1}{N^4}$ n'est qu'asymptotique.

Conclusion

les trois approximations sont d'autant meilleures que l'exposant de décroissance de l'erreur est grand (1, 2, puis 4). Pour une même précision 10^{-3} , il faut de l'ordre de 1000 termes avec S_N , quelques dizaines avec T_N et quelques unités avec U_N : les transformations des questions 4 et 8 accélèrent fortement la convergence. Le graphique confirme les majorations établies et montre qu'elles décrivent correctement l'ordre de grandeur de l'erreur.

Exercice 2

Partie 1

1. (a) Linéarité. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\lambda P + Q) = (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \dots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q).$$

Donc Φ est linéaire.

Injectivité. Soit $P \in \text{Ker } \Phi : P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$. Alors P et le polynôme nul, tous deux de degré au plus n , coïncident en les $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$; d'après le rappel de l'énoncé (avec $m = n$), $P = 0$. Donc $\text{Ker } \Phi = \{0\}$.

Conclusion

Φ est une application linéaire injective.

(b) On montre que Φ est bijective par un argument de dimension.

On a $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. D'après le théorème du rang, $\text{rg } \Phi = \dim \mathbb{R}_n[x] - \dim \text{Ker } \Phi = n + 1$, donc $\text{Im } \Phi$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $n + 1$: $\text{Im } \Phi = \mathbb{R}^{n+1}$. L'application Φ est donc bijective.

Soit $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Un polynôme P de degré au plus n vérifie $P(x_i) = y_i$ pour tout i si et seulement si $\Phi(P) = (y_0, \dots, y_n)$. Par bijectivité de Φ , il existe un et un seul tel polynôme.

Conclusion

il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(x_0) = y_0, \dots, P(x_n) = y_n$.

2. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On applique 1(b) au vecteur $(y_0, \dots, y_n)$ défini par $y_j = 1$ si $j = i$ et $y_j = 0$ si $j \neq i$ (le $(i + 1)$ -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Conclusion

il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $L_i(x_j) = 1$ si $j = i$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$.

3. On détermine chaque L_i à partir de ses racines, puis on ajuste la constante.

Ici $n = 3$. Le polynôme L_0 est de degré au plus 3 et admet 1, 2, 3 pour racines. Il est donc divisible par $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$; le quotient est de degré au plus 0, c'est une constante c : $L_0 = c(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. La condition $L_0(-1) = 1$ donne $c \cdot (-2)(-3)(-4) = -24c = 1$, soit $c = -\frac{1}{24}$.

On procède de même pour les autres :

$$L_1 = c_1(x + 1)(x - 2)(x - 3) \text{ avec } L_1(1) = c_1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4c_1 = 1, \text{ donc } c_1 = \frac{1}{4}.$$

$$L_2 = c_2(x + 1)(x - 1)(x - 3) \text{ avec } L_2(2) = c_2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3c_2 = 1, \text{ donc } c_2 = -\frac{1}{3}.$$

$L_3 = c_3(x+1)(x-1)(x-2)$ avec $L_3(3) = c_3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8c_3 = 1$, donc $c_3 = \frac{1}{8}$.

Réciproquement, ces polynômes sont de degré au plus 3 et prennent les valeurs voulues ; par unicité (question 2), ce sont bien les L_i .

Conclusion

$$L_0 = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{-x^3 + 6x^2 - 11x + 6}{24}$$

$$L_1 = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{4} = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{4}$$

$$L_2 = -\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{3} = \frac{-x^3 + 3x^2 + x - 3}{3}$$

$$L_3 = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{8} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{8}$$

Contrôle : la somme des quatre polynômes vaut 1 (coefficients de x^3 : $-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 0$; de x^2 : $\frac{1}{4} - 1 + 1 - \frac{1}{4} = 0$; de x : $-\frac{11}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = 0$; constant : $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{4} = 1$), ce qui est cohérent avec la question 10(a).

4. On vérifie que le polynôme proposé satisfait les conditions caractérisant L_i , puis on conclut par unicité.

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Les x_j étant deux à deux distincts,

$$D_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \neq 0.$$

On pose

$$Q_i = \frac{1}{D_i} \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j).$$

Le polynôme Q_i est un produit de n facteurs de degré 1, multiplié par une constante non nulle : il est de degré n , donc $Q_i \in \mathbb{R}_n[x]$.

Pour $k \neq i$, le facteur $x - x_k$ figure dans le produit, donc $Q_i(x_k) = 0$. Et $Q_i(x_i) = \frac{D_i}{D_i} = 1$.

Par unicité (question 2), $L_i = Q_i$.

Degré et coefficient dominant : le produit

$$\prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

est unitaire de degré n .

Conclusion

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)};$$

L_i est de degré n et son coefficient dominant est

$$\frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

5. On vérifie les quatre propriétés d'un produit scalaire.

Symétrie : pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_k P(x_k)Q(x_k) = \langle Q, P \rangle.$$

Linéarité à gauche : pour $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \sum_k (\lambda P_1(x_k) + P_2(x_k))Q(x_k) = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle.$$

Par symétrie, l'application est bilinéaire.

Positivité :

$$\langle P, P \rangle = \sum_k P(x_k)^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, une somme de réels positifs étant nulle, chaque terme est nul : $P(x_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donc $\Phi(P) = 0$, et $P = 0$ par injectivité de Φ (question 1(a)).

Conclusion

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

6. Pour $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en notant $\delta_{i,k}$ le symbole valant 1 si $i = k$ et 0 sinon, on a

$L_i(x_k) = \delta_{i,k}$, donc :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

La famille $\mathcal{L}$ est donc orthonormée ; une famille orthonormée est libre. C'est une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[x]$, espace de dimension $n + 1$: c'est une base.

Conclusion

$\mathcal{L}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

7. On cherche les coordonnées $(c_0, \dots, c_n)$ de $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathcal{L}$, définies par

$$P = \sum_{i=0}^n c_i L_i.$$

Méthode 1 — Coordonnées dans une base orthonormée. Dans une base orthonormée, la coordonnée de P selon L_i est $\langle P, L_i \rangle$. Or :

$$\langle P, L_i \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_i(x_k) = \sum_{k=0}^n P(x_k) \delta_{i,k} = P(x_i).$$

Méthode 2 — Évaluation aux points x_j . Si

$$P = \sum_i c_i L_i,$$

en évaluant en x_j on obtient

$$P(x_j) = \sum_i c_i L_i(x_j) = c_j.$$

On peut aussi raisonner sans supposer connue l'existence des coordonnées : le

polynôme

$$R = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$$

est de degré au plus n et s'annule en les $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$, donc $R = 0$.

La première méthode utilise la structure euclidienne (elle se généralise à toute base orthonormée) ; la seconde n'utilise que les valeurs $L_i(x_j)$ et le résultat d'unicité, sans produit scalaire.

Conclusion

les coordonnées de P dans $\mathcal{L}$ sont $(P(x_0), \dots, P(x_n))$, c'est-à-dire

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

Partie 2

8. (a) Avec $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} N_0 &= 1, & N_1 &= x + 1, & N_2 &= (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1, & N_3 \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

(b) D'après la question 7, les coordonnées de N_i dans (L_0, L_1, L_2, L_3) sont $(N_i(-1), N_i(1), N_i(2), N_i(3))$.

$$N_0 : (1, 1, 1, 1).$$

$$N_1 = x + 1 : (0, 2, 3, 4).$$

$$N_2 = x^2 - 1 : (0, 0, 3, 8).$$

$$N_3 = (x+1)(x-1)(x-2) : \text{il s'annule en } -1, 1, 2 \text{ et } N_3(3) = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8, \text{ d'où } (0, 0, 0, 8).$$

La matrice $M = (m_{i-1, j-1})_{1 \leq i, j \leq 4}$ a pour j -ième colonne les coordonnées de N_{j-1} :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice M est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux 1, 2, 3, 8 sont tous non nuls : elle est inversible.

Pour calculer M^{-1} , on résout le système $MX = Y$ d'inconnue $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ pour $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ quelconque :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = y_4 \end{cases}$$

Par substitutions successives :

$$x_1 = y_1, \text{ puis } x_2 = \frac{y_2 - y_1}{2} = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2.$$

$$3x_3 = y_3 - y_1 - \frac{3}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + y_3, \text{ donc } x_3 = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3.$$

$$8x_4 = y_4 - y_1 - 2(y_2 - y_1) - 8\left(\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3\right) = -\frac{1}{3}y_1 + 2y_2 - \frac{8}{3}y_3 + y_4,$$

$$\text{donc } x_4 = -\frac{1}{24}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{8}y_4.$$

Conclusion

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 8 & 0 \\ -1 & 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérification par produit : par exemple, la dernière ligne de M multipliée par la première colonne de M^{-1} donne $1 - 2 + \frac{8}{6} - \frac{8}{24} = 0$, et par la quatrième colonne $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$; les autres produits se vérifient de même. On remarque que la dernière ligne de M^{-1} est formée des coefficients dominants de $L_0, \dots, L_3$ trouvés en question 3, ce qu'éclaireront les questions 13 et 14.

9. On montre que $\mathcal{N}$ est libre ; comme elle compte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ vecteurs, ce sera une base.

Méthode 1 — Degrés échelonnés. Pour $i \geq 1$, N_i est un produit de i facteurs unitaires de degré 1 : il est unitaire de degré i ; et $N_0 = 1$ est de degré 0.

Supposons

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i N_i = 0$$

avec des λ_i non tous nuls, et soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i N_i$$

a pour coefficient de x^m le réel $\lambda_m \neq 0$ (les N_i avec $i < m$ sont de degré $< m$), ce qui contredit sa nullité. Donc tous les λ_i sont nuls.

Méthode 2 — Coordonnées dans la base $\mathcal{L}$. D'après la question 7, la k -ième coordonnée de N_i dans $\mathcal{L}$ (avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) est

$$N_i(x_k) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j).$$

Elle est nulle si $k < i$ (le facteur $j = k$ est nul) et vaut

$$\prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

si $k = i$. La matrice de la famille $\mathcal{N}$ dans la base $\mathcal{L}$ est donc triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible, donc de rang $n + 1$, et la famille $\mathcal{N}$ est de rang $n + 1$.

La méthode 1 n'utilise que les degrés ; la méthode 2 exploite la base de Lagrange et prépare les questions 10 et 11.

Conclusion

$\mathcal{N}$ est une famille libre de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est de dimension $n + 1$: c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

10. (a) D'après la question 7 appliquée à $N_0 = 1$, dont toutes les valeurs $N_0(x_k)$ valent 1 :

$$N_0 = \sum_{k=0}^n N_0(x_k) L_k = \sum_{k=0}^n L_k.$$

(b) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la question 7,

$$N_i = \sum_{k=0}^n N_i(x_k) L_k$$

avec

$$N_i(x_k) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)$$

(produit vide égal à 1 si $i = 0$). Pour $k < i$, ce produit contient le facteur $x_k - x_k = 0$, donc $N_i(x_k) = 0$.

Conclusion

$$N_i = \sum_{k=i}^n \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) \right) L_k$$

(pour $i = 0$, on retrouve 10(a)).

11. La matrice de passage de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{N}$ a pour colonnes les coordonnées des N_i dans $\mathcal{L}$. En numérotant lignes et colonnes de 0 à n , son coefficient de ligne k et de colonne i est, d'après 10(b) :

$$A_{k,i} = \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) \quad \text{si } k \geq i, \quad A_{k,i} = 0 \quad \text{si } k < i.$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire inférieure ; pour $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, on retrouve $A = M$.

La base $\mathcal{N}$ n'est pas orthonormée :

$$\langle N_0, N_0 \rangle = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1 \geq 2,$$

donc N_0 n'est pas de norme 1. Elle n'est même pas orthogonale : comme $N_n(x_k) = 0$ pour $k < n$,

$$\langle N_{n-1}, N_n \rangle = N_{n-1}(x_n)N_n(x_n) = \prod_{j=0}^{n-2} (x_n - x_j) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \neq 0.$$

Conclusion

A est la matrice triangulaire inférieure ci-dessus, et $\mathcal{N}$ n'est pas orthonormée.

- 12.** D'après 1(b), le polynôme P_n existe et appartient à $\mathbb{R}_n[x]$. Comme $\mathcal{N}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (question 9), P_n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $N_0, \dots, N_n$: les réels $a_0, \dots, a_n$ sont ses coordonnées dans $\mathcal{N}$.

Conclusion

il existe un unique $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_n = a_0 N_0 + \dots + a_n N_n$.

13. Les tableaux X et Y sont des `numpy.array` de taille $(n + 1, 1)$: on accède à x_i par `X[i, 0]`. Les codes ci-dessous ont été exécutés (test avec les points de la question 8).

(a) La fonction parcourt les indices j de 0 à k (`range(k + 1)`) en sautant $j = i$, et multiplie les facteurs $x_i - x_j$ dans la variable `p` initialisée à 1.

Python

```
import numpy as np

def prodX(X, i, k):
    p = 1
    for j in range(k + 1):
        if j != i:
            p = p * (X[i, 0] - X[j, 0])
    return p
```

(b) Le nombre de points est $n + 1$, nombre de lignes de X , obtenu par `np.shape(X)[0]`. On remplit une matrice colonne C de taille $(n + 1, 1)$: `C[0, 0]` reçoit y_0 , puis pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on calcule la somme

$$\sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

à l'aide de `prodX`. Les divisions sont licites car les x_j sont deux à deux distincts.

Python

```
import numpy as np

def coeff(X, Y):
    n = np.shape(X)[0] - 1
    C = np.zeros((n + 1, 1))
```

```

C[0, 0] = Y[0, 0]
for k in range(1, n + 1):
    s = 0
    for i in range(k + 1):
        s = s + Y[i, 0] / prodX(X, i, k)
    C[k, 0] = s
return C

```

Vérification exécutée : avec $X = (-1, 1, 2, 3)^T$ et $Y = (2, -1, 5, 0, 5)^T$, le polynôme

$$\sum_k a_k N_k$$

reconstruit à partir du résultat prend bien les valeurs 2, -1, 5, 0, 5 aux points -1, 1, 2, 3.

(c) On relie les coordonnées de P_n dans les deux bases par la formule de changement de base.

D'après la question 7, les coordonnées de P_n dans $\mathcal{L}$ sont

$(P_n(x_0), \dots, P_n(x_n)) = (y_0, \dots, y_n)$, c'est-à-dire la colonne Y . Ses coordonnées dans $\mathcal{N}$ forment la colonne $C = (a_0, \dots, a_n)^T$ renvoyée par `coeff(X, Y)`. La formule de changement de base, avec la matrice de passage A de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{N}$, donne $Y = AC$, donc :

$$\text{coeff}(X, Y) = A^{-1}Y.$$

En choisissant pour Y la colonne E_j dont le seul coefficient non nul est un 1 en position j (ce qui revient à interpoler la fonction qui vaut 1 en x_j et 0 aux autres points, c'est-à-dire à décomposer L_j dans $\mathcal{N}$), on obtient $A^{-1}E_j$, qui est la colonne d'indice j de A^{-1} .

Il faut donc $n + 1$ appels à la fonction `coeff`, un par colonne :

Python

```
import numpy as np

def inverseA(X):
    n = np.shape(X)[0] - 1
    B = np.zeros((n + 1, n + 1))
    for j in range(n + 1):
        E = np.zeros((n + 1, 1))
        E[j, 0] = 1
        C = coeff(X, E)
        for k in range(n + 1):
            B[k, j] = C[k, 0]
    return B
```

Vérification exécutée : pour $X = (-1, 1, 2, 3)^T$, `inverseA(X)` multiplié par 24 renvoie la matrice

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 8 & 0 \\ -1 & 6 & -8 & 3 \end{pmatrix},$$

ce qui est exactement $24M^{-1}$ trouvé en 8(c) (rappelons que $A = M$ dans ce cas).

Conclusion

la colonne d'indice j de A^{-1} est la matrice renvoyée par `coeff` appliquée à X et à E_j ;
il faut $n + 1$ appels.

14. (a) Valeur de a_0 . Pour $i \geq 1$,

$$N_i(x_0) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_0 - x_j) = 0$$

(facteur $j = 0$), et $N_0(x_0) = 1$. En évaluant

$$P_n = \sum_i a_i N_i$$

en x_0 :

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0.$$

Coefficient de degré n . Pour $i < n$, N_i est de degré $i < n$ et ne contribue pas au coefficient de x^n ; N_n est unitaire de degré n . Le coefficient de x^n dans

$$P_n = \sum_{i=0}^n a_i N_i$$

est donc $a_n \times 1 = a_n$.

Conclusion

$a_0 = y_0$, et a_n est le coefficient du monôme de degré n de P_n (ce coefficient peut être nul si P_n est de degré $< n$).

(b) Méthode 1 — Question 7. Les coordonnées de $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathcal{L}$ sont $(P_n(x_0), \dots, P_n(x_n)) = (y_0, \dots, y_n)$, donc

$$P_n = \sum_{i=0}^n y_i L_i.$$

Méthode 2 — Unicité de l'interpolation. Le polynôme

$$Q = \sum_{i=0}^n y_i L_i$$

est de degré au plus n et, pour tout j ,

$$Q(x_j) = \sum_i y_i L_i(x_j) = y_j.$$

Par l'unicité de la question 1(b), $Q = P_n$.

La méthode 1 réinvestit la base orthonormée ; la méthode 2 n'utilise que la caractérisation de P_n .

Conclusion

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x).$$

(c) On calcule le coefficient de x^n dans l'écriture de la question 14(b).

L'application qui à un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ associe son coefficient de x^n est linéaire. D'après la question 4, chaque L_i a pour coefficient de x^n le réel

$$\frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Donc le coefficient de x^n de

$$P_n = \sum_i y_i L_i$$

est

$$\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

D'après 14(a), c'est a_n .

Conclusion

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

- 15.** (a) Pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, N_j est de degré $j \leq k$. Une combinaison linéaire de polynômes de degré au plus k est de degré au plus k .

Conclusion

$$Q_k \in \mathbb{R}_k[x].$$

- (b) On sépare dans P_n les termes d'indice au plus k et les autres.

On a

$$P_n = Q_k + \sum_{j=k+1}^n a_j N_j.$$

Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ (le raisonnement vaut aussi pour $i = 0$). Pour $j \geq k + 1$, on a $i \leq k \leq j - 1$, donc

$$N_j(x_i) = \prod_{l=0}^{j-1} (x_i - x_l)$$

contient le facteur nul $x_i - x_i$: $N_j(x_i) = 0$. Ainsi :

$$y_i = P_n(x_i) = Q_k(x_i) + 0.$$

Conclusion

pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $Q_k(x_i) = y_i$.

- (c) D'après 15(b), $Q_k(x_i) = y_i$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$; pour $i = 0$, $N_j(x_0) = 0$ pour $j \geq 1$ donc $Q_k(x_0) = a_0 = y_0$ (question 14(a)). Ainsi Q_k est un polynôme de degré au plus k (15(a)) prenant les valeurs $y_0, \dots, y_k$ aux $k + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_k$.

D'après 1(b) appliquée avec $k \geq 1$ à la place de n et aux points $x_0, \dots, x_k$, un tel polynôme est unique : c'est P_k .

Conclusion

$$P_k(x) = a_0 N_0(x) + \dots + a_k N_k(x).$$

- (d) On applique les résultats de la question 14 à la situation réduite aux points $x_0, \dots, x_k$.

Les résultats des questions 1 à 14 valent pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels deux à deux distincts. On les applique avec $k \geq 1$ à la place de n et les points $x_0, \dots, x_k$: les polynômes $N_0, \dots, N_k$ associés sont les mêmes (ils ne dépendent que de $x_0, \dots, x_{k-1}$), et le polynôme d'interpolation associé aux points $X_0, \dots, X_k$ est P_k .

D'après 15(c), $(a_0, \dots, a_k)$ est la famille des coordonnées de P_k dans la base $(N_0, \dots, N_k)$ de $\mathbb{R}_k[x]$. Les questions 14(a) et 14(c) appliquées à cette situation donnent donc que a_k est le coefficient de x^k de P_k et que :

$$a_k = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

Conclusion

la formule est établie pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$; avec 14(c) pour $k = n$, on a justifié le résultat admis à la question 13 pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Problème

Partie 1

Dans tout le corrigé, pour $b > 0$, on note $f_b(x) = \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$ et

$F_b(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{1}{2}$; ainsi $f = f_a$ et $F = F_a$. On note $\mathcal{C}(b)$ la loi de Cauchy de paramètre b .

1. On vérifie que f est positive, continue, et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues, à dénominateur strictement positif) et positive car $a > 0$.

Primitive : la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$H'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} = f(x).$$

Pour $A, B > 0$: $\int_{-A}^B f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{B}{a} - \arctan \left(-\frac{A}{a} \right) \right)$. Comme $\arctan$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et vers $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f$ et $\int_{-\infty}^0 f$ convergent, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Conclusion

f est une densité de probabilité.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition associée à f est $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Avec la primitive H de la question 1 :

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (H(x) - H(-A)) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}.$$

Conclusion

la fonction de répartition associée à f est $F : x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$.

3. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge. Par parité de $x \mapsto |x|f(x)$, il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ (intégrande continue et positive).

Méthode 1 — Critère d'équivalence. Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$xf(x) = \frac{ax}{\pi(x^2 + a^2)} \sim \frac{a}{\pi x}. \text{ Les fonctions sont positives sur } [1, +\infty[\text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$) ; donc $\int_1^{+\infty} xf(x) dx$ diverge.

Méthode 2 — Calcul direct. Pour $B > 0$:

$$\int_0^B \frac{ax}{\pi(x^2 + a^2)} dx = \frac{a}{2\pi} \left[\ln(x^2 + a^2) \right]_0^B = \frac{a}{2\pi} \ln\left(\frac{B^2 + a^2}{a^2}\right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La première méthode est la plus rapide et se généralise (elle ne demande pas de primitive) ; la seconde donne en plus la vitesse de divergence (logarithmique).

Conclusion

une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

4. On compare les fonctions de répartition, qui caractérisent la loi.

Pour tout réel x , comme $a > 0$:

$$P(aX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) = F_X\left(\frac{x}{a}\right).$$

Sens direct. Si X suit $\mathcal{C}(1)$, alors $F_X = F_1$ et $P(aX \leq x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} = F_a(x)$ pour tout x ; donc aX suit $\mathcal{C}(a)$.

Réciproque. Si aX suit $\mathcal{C}(a)$, alors pour tout réel y :

$$P(X \leq y) = P(aX \leq ay) = F_a(ay) = \frac{1}{\pi} \arctan(y) + \frac{1}{2} = F_1(y);$$

donc X suit $\mathcal{C}(1)$.

Conclusion

X suit la loi de Cauchy standard si et seulement si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a .

Conséquence utile pour la suite. Si Z suit $\mathcal{C}(b)$ et $c > 0$, alors cZ suit $\mathcal{C}(cb)$. En effet, en appliquant le résultat avec le paramètre b à la variable $\frac{Z}{b}$ (puisque $b \cdot \frac{Z}{b} = Z$ suit $\mathcal{C}(b)$), $\frac{Z}{b}$ suit $\mathcal{C}(1)$; puis, avec le paramètre cb , $cb \cdot \frac{Z}{b} = cZ$ suit $\mathcal{C}(cb)$.

5. (a) On réduit au même dénominateur et on identifie les coefficients d'un polynôme en t .

En multipliant l'égalité admise par $(t^2 + k^2)((x - t)^2 + 1) > 0$, on obtient pour tout réel t :

$$1 = (\alpha t + \beta)((x - t)^2 + 1) + (\alpha(x - t) + \gamma)(t^2 + k^2).$$

Développons, avec $(x - t)^2 + 1 = t^2 - 2xt + x^2 + 1$:

$$(\alpha t + \beta)(t^2 - 2xt + x^2 + 1) = \alpha t^3 + (\beta - 2\alpha x)t^2 + (\alpha(x^2 + 1) - 2\beta x)t + \beta(x^2 + 1),$$

$$(\alpha x + \gamma - \alpha t)(t^2 + k^2) = -\alpha t^3 + (\alpha x + \gamma)t^2 - \alpha k^2 t + (\alpha x + \gamma)k^2.$$

En sommant, pour tout réel t :

$$1 = (\beta + \gamma - \alpha x)t^2 + (\alpha(x^2 + 1 - k^2) - 2\beta x)t + \beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2.$$

Le polynôme en t obtenu en retranchant 1 s'annule en une infinité de points : il est nul, donc tous ses coefficients sont nuls.

Conclusion

$$\beta + \gamma = \alpha x, \quad \alpha(x^2 + 1 - k^2) = 2\beta x \text{ et } \beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2 = 1.$$

(b) On élimine α en utilisant la première relation $\alpha x = \beta + \gamma$.

Première équation. Dans la troisième relation de (a), $\alpha x k^2 = (\beta + \gamma)k^2$, donc :

$$\beta(x^2 + 1) + (\beta + \gamma)k^2 + \gamma k^2 = 1, \quad \text{soit} \quad \beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 = 1. \quad (E_1)$$

Seconde équation. En multipliant la deuxième relation de (a) par x et en remplaçant αx par $\beta + \gamma$:

$$(\beta + \gamma)(x^2 + 1 - k^2) = 2\beta x^2, \quad \text{soit} \quad \beta(1 - k^2 - x^2) + \gamma(x^2 + 1 - k^2) = 0. \quad (E_0)$$

En ajoutant (E_0) et (E_1) :

$$\begin{aligned} \beta(x^2 + k^2 + 1 + 1 - k^2 - x^2) + \gamma(2k^2 + x^2 + 1 - k^2) &= 1, \quad \text{soit} \quad 2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 = 1 \text{ et } 2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) = 1.$$

(c) On combine les deux équations de (b) pour faire apparaître $\beta + k\gamma$.

Notons $s = x^2 + k^2 + 1$. En multipliant la seconde équation de (b) par k et en l'ajoutant à la première :

$$(s + 2k)\beta + (2k^2 + sk)\gamma = 1 + k, \quad \text{soit} \quad (s + 2k)(\beta + k\gamma) = k + 1.$$

Or $s + 2k = x^2 + k^2 + 2k + 1 = x^2 + (k + 1)^2 > 0$, donc on peut diviser.

Conclusion

$$\beta + \gamma k = \frac{k + 1}{x^2 + (k + 1)^2}.$$

(d) On dérive G . Les quantités $t^2 + k^2$ et $(x - t)^2 + 1$ sont strictement positives, donc G est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\ln\left(\frac{t^2 + k^2}{(x - t)^2 + 1}\right) = \ln(t^2 + k^2) - \ln((x - t)^2 + 1)$.

La dérivée de $t \mapsto \ln((x - t)^2 + 1)$ est $t \mapsto \frac{-2(x - t)}{(x - t)^2 + 1}$. Celle de $t \mapsto \frac{\beta}{k} \arctan\left(\frac{t}{k}\right)$ est

$t \mapsto \frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t^2}{k^2}} = \frac{\beta}{t^2 + k^2}$. Celle de $t \mapsto \gamma \arctan(t - x)$ est $t \mapsto \frac{\gamma}{1 + (t - x)^2}$. Donc, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2t}{t^2 + k^2} + \frac{2(x - t)}{(x - t)^2 + 1} \right) + \frac{\beta}{t^2 + k^2} + \frac{\gamma}{(x - t)^2 + 1} = \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + k^2} + \frac{\alpha(x - t) + \gamma}{(x - t)^2 + 1} \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Conclusion

G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

6. (a) On calcule le produit de convolution des densités de X et Y .

Résultat de cours utilisé : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X et f_Y , l'une de ces densités étant bornée, alors la fonction

$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x - t) dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est une densité de $X + Y$.

Hypothèses : X et Y sont indépendantes, de densités f_k et f_1 ; et f_1 est bornée par $\frac{1}{\pi}$. (L'énoncé admet en outre que $X + Y$ est à densité.)

Soit $x \neq 0$. Pour tout réel t :

$$f_k(t)f_1(x - t) = \frac{k}{\pi(t^2 + k^2)} \cdot \frac{1}{\pi((x - t)^2 + 1)} = \frac{k}{\pi^2} g(t),$$

où g est la fonction de la question 5, associée à ces valeurs de k et x (les réels α, β, γ dépendent de x).

Calcul de l'intégrale. Pour $A < B$, comme G est une primitive de g (5(d)),

$$\int_A^B g(t) dt = G(B) - G(A). \text{ Étudions les limites de } G :$$

quand $t \rightarrow \pm\infty$, $\frac{t^2 + k^2}{(x - t)^2 + 1} \rightarrow 1$ (numérateur et dénominateur sont équivalents à t^2),

donc par continuité du logarithme en 1, le terme $\frac{\alpha}{2} \ln(\dots)$ tend vers 0 ;

$\arctan\left(\frac{t}{k}\right)$ et $\arctan(t-x)$ tendent vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et vers $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\beta}{k} \cdot \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = -\frac{\beta}{k} \cdot \frac{\pi}{2} - \gamma \frac{\pi}{2}$: ces limites sont finies. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge donc et vaut $\lim_{+\infty} G - \lim_{-\infty} G$. Par conséquent :

$$h(x) = \frac{k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{k}{\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \right) = \varphi(x).$$

Ainsi h et φ coïncident sur $\mathbb{R}^*$. Une densité modifiée (ou définie arbitrairement) en un nombre fini de points reste une densité de la même variable, car les intégrales $\int_{-\infty}^y$ ne changent pas.

Conclusion

φ , complétée par une valeur quelconque en 0 (par exemple $h(0)$), est une densité de $X + Y$.

(b) D'après le calcul de (a) et la question 5(c), pour $x \neq 0$:

$$\varphi(x) = \frac{k}{\pi^2} \cdot \pi \left(\frac{\beta}{k} + \gamma \right) = \frac{\beta + k\gamma}{\pi} = \frac{k+1}{\pi(x^2 + (k+1)^2)} = f_{k+1}(x).$$

Ainsi $X + Y$ admet une densité égale à f_{k+1} sauf éventuellement en 0. Pour tout réel y ,

$$P(X + Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^y f_{k+1}(t) dt = F_{k+1}(y) :$$

la fonction de répartition de $X + Y$ est celle de $\mathcal{C}(k+1)$.

Conclusion

$X + Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $k + 1$.

7. Pour $k \geq 1$, notons $\mathcal{P}(k)$: « si $X_1, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{C}(a)$, alors $X_1 + \dots + X_k$ suit $\mathcal{C}(ka)$ ».

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est immédiate.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un $k \geq 1$, et soient $X_1, \dots, X_{k+1}$ mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{C}(a)$. Posons $Z = X_1 + \dots + X_k$.

D'après $\mathcal{P}(k)$, Z suit $\mathcal{C}(ka)$; d'après la conséquence de la question 4 (avec $c = \frac{1}{a}$), $\frac{Z}{a}$ suit $\mathcal{C}(k)$ et $\frac{X_{k+1}}{a}$ suit $\mathcal{C}(1)$.

D'après le lemme des coalitions, Z (fonction de $X_1, \dots, X_k$) est indépendante de X_{k+1} ; donc $\frac{Z}{a}$ et $\frac{X_{k+1}}{a}$ sont indépendantes.

D'après la question 6(b), $\frac{Z}{a} + \frac{X_{k+1}}{a}$ suit $\mathcal{C}(k + 1)$. Par la conséquence de la question 4 (avec $c = a$), $Z + X_{k+1} = a\left(\frac{Z}{a} + \frac{X_{k+1}}{a}\right)$ suit $\mathcal{C}((k + 1)a)$. Donc $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $k \geq 1$, $X_1 + \dots + X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre ka .

Partie 2

8. On calcule la fonction de répartition de Y à l'aide de la bijection $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

L'événement $\{U \in \{0, 1\}\}$ est de probabilité nulle (loi à densité). Quitte à modifier U sur cet événement négligeable, ce qui ne change pas sa loi, on suppose que U prend ses valeurs dans $]0, 1[$. Alors $\pi(U - \frac{1}{2}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et Y est bien définie.

La fonction $\tan$ est une bijection strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$. Pour tout réel y , comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{y}{a}\right) = P\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right) \leq \arctan \frac{y}{a}\right) \\ &= P\left(U \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{a}\right). \end{aligned}$$

Le réel $u_y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{a}$ appartient à $]0, 1[$ et $P(U \leq u) = u$ pour $u \in [0, 1]$. Donc

$$P(Y \leq y) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{1}{2} = F_a(y).$$

Conclusion

Y suit la loi de Cauchy de paramètre a (c'est la méthode d'inversion : $Y = F_a^{-1}(U)$).

9. On applique la question 8 : on simule U uniforme sur $[0, 1[$ avec `rd.random()`, puis on renvoie $a \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$, la tangente étant écrite comme quotient du sinus par le cosinus. La valeur $u = 0$, de probabilité négligeable, donnerait un cosinus numériquement très petit mais non nul (le flottant représentant $-\frac{\pi}{2}$ n'est pas exact), donc pas d'erreur. Code exécuté.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def cauchy(a):
    u = rd.random()
    t = np.pi * (u - 1/2)
    return a * np.sin(t) / np.cos(t)
```

Contrôle expérimental exécuté (ce n'est pas une preuve) : sur 10^5 simulations avec $a = 2$, la fréquence de l'événement $\{X \leq 1\}$ vaut environ 0,648, pour une valeur théorique

$$F_2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{2} \approx 0,648.$$

Remarque sur l'énoncé : avant la question 10, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Cauchy de paramètre a (rectification : l'énoncé original évoquait « la même loi que X », la variable X n'étant pas définie dans cette partie ; le contexte et la question 10 imposent la loi $\mathcal{C}(a)$).

10. On remplit un vecteur de taille n par n appels indépendants à cauchy. Code exécuté.

Python

```
import numpy as np

def realisation(n, a):
    V = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        V[i] = cauchy(a)
    return V
```

Les appels successifs au générateur pseudo-aléatoire modélisent des variables indépendantes : V contient une réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$.

11. Il faut que les moyennes $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ soient calculées à partir de la même réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$. On utilise les sommes cumulées : `np.cumsum(V)` renvoie le vecteur de composantes $X_1 + \dots + X_k$ pour $k = 1, \dots, n$, que l'on divise coefficient par coefficient par le vecteur `np.arange(1, n + 1) = (1, 2, \dots, n)`. Code exécuté.

Python

```
import numpy as np

def moyennes(n, a):
    V = realisation(n, a)
    S = np.cumsum(V)
    return S / np.arange(1, n + 1)
```

Variante sans `cumsum`, avec une boucle :

Python

```
import numpy as np

def moyennes2(n, a):
    V = realisation(n, a)
    M = np.zeros(n)
```

```
s = 0
for k in range(n):
    s = s + V[k]
M[k] = s / (k + 1)
return M
```

12. On interprète la figure à l'aide de la loi de $\bar{X}_n$, que l'on détermine d'abord.

Loi de $\bar{X}_n$. D'après la question 7, $X_1 + \dots + X_n$ suit $\mathcal{C}(na)$. D'après la conséquence de la question 4 (avec $c = \frac{1}{n}$), $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ suit $\mathcal{C}(a)$: pour tout n , $\bar{X}_n$ a la même loi que X_1 .

Absence de convergence en probabilité vers une constante. Pour tout réel c et tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|\bar{X}_n - c| > \varepsilon) = P(|X_1 - c| > \varepsilon) = 1 - \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f_a(t) dt,$$

quantité indépendante de n et strictement positive car $f_a > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a = 1$. Elle ne tend donc pas vers 0 : $(\bar{X}_n)$ ne converge en probabilité vers aucune constante. Il n'y a pas de contradiction avec la loi faible des grands nombres, qui suppose l'existence d'une espérance et d'une variance, ce qui n'est pas le cas ici (question 3).

Lecture de la figure. Les trois trajectoires ne se stabilisent pas quand n augmente, même pour n de l'ordre de 10^4 : elles ne se resserrent pas autour d'une valeur commune (valeurs finales différentes : environ 2,5, -1,3 et 0,4). On observe des sauts brutaux, y compris pour de grandes valeurs de n (vers $n \approx 25$ et $n \approx 4500$ sur le premier panneau, vers $n \approx 600$ sur le deuxième, vers $n \approx 2800$ sur le troisième). Comme $X_n = n\bar{X}_n - (n-1)\bar{X}_{n-1}$, un saut d'amplitude d au rang n correspond à une valeur X_n d'ordre nd : par exemple, le saut d'environ 5 vers $n \approx 4500$ correspond à une valeur simulée de l'ordre de $2 \cdot 10^4$. Ces valeurs extrêmes, rares mais pas assez rares (la queue de la loi décroît seulement comme $\frac{1}{x}$,

puisque $P(|X| > x) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{a}{x} \sim \frac{2a}{\pi x}$), suffisent à déplacer durablement la moyenne. Les échelles verticales des trois panneaux sont d'ailleurs très différentes.

Conclusion

la figure illustre que la moyenne empirique d'un échantillon de loi de Cauchy ne converge pas : $\bar{X}_n$ suit à chaque rang la loi $\mathcal{C}(a)$, aussi dispersée que celle d'une seule observation. La moyenne empirique n'est pas un estimateur convergent d'un paramètre de position pour cette loi.

Partie 3

Remarque sur l'énoncé : le préambule de la partie 3 doit se lire « un paramètre réel M strictement positif » (le mot « positif » manquait dans l'énoncé original ; avec $M > 0$, la définition de Y_n et la valeur $p(a)$ ont le sens attendu).

- 13.** Les variables Y_n prennent les valeurs 0 et 1 : ce sont des variables de Bernoulli, de paramètre $P(Y_n = 1) = P(|X_n| \leq M)$.

La loi de X_n est à densité, donc $P(X_n = -M) = 0$, et :

$$P(|X_n| \leq M) = P(-M \leq X_n \leq M) = F(M) - F(-M).$$

La fonction arctan étant impaire, $F(-M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{M}{a} = 1 - F(M)$. Donc :

$$P(Y_n = 1) = 2F(M) - 1 = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{M}{a} \right).$$

Conclusion

Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $2F(M) - 1 = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{M}{a} \right) = p(a)$.

- 14.** Les variables $Y_n = \mathbf{1}_{[-M, M]}(X_n)$ sont des fonctions respectives des variables mutuellement indépendantes X_n : elles sont mutuellement indépendantes. Elles suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p(a))$ (question 13), donc admettent une espérance $p(a)$ et une variance $p(a)(1 - p(a))$.

Méthode 1 — Loi faible des grands nombres. La suite (Y_n) est formée de variables mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance $p(a)$ et une variance. D'après la loi faible des grands nombres, $\bar{Y}_n$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $p(a)$.

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par linéarité, $E(\bar{Y}_n) = p(a)$ et, par indépendance,

$$V(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \frac{p(a)(1-p(a))}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq P(|\bar{Y}_n - p(a)| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(a)(1-p(a))}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La première méthode applique directement un théorème du cours ; la seconde redémontre ce théorème dans ce cas et fournit une majoration explicite de la probabilité d'écart, utile pour construire un intervalle de confiance non asymptotique.

Conclusion

$\bar{Y}_n$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $p(a) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right)$.

- 15.** (a) Comme $M > 0$ et $a > 0$, $\frac{M}{a} > 0$, et $\arctan$ réalise une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $0 < \arctan \frac{M}{a} < \frac{\pi}{2}$, puis, en multipliant par $\frac{2}{\pi} > 0$, $0 < p(a) < 1$.

Pour tout réel p , $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Conclusion

$$0 < p(a) < 1 \text{ et } p(a)(1 - p(a)) \leq \frac{1}{4}.$$

(b) La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, strictement positive : Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Comme $0,975 \in]0, 1[$, il existe un unique réel z tel que $\Phi(z) = 0,975$. De plus, par parité de la densité, $\Phi(0) = \frac{1}{2} < 0,975$, et la stricte croissance de Φ impose $z > 0$.

Conclusion

il existe un unique réel $z > 0$ tel que $\Phi(z) = 0,975$ (numériquement, $z \approx 1,96$).

(c) On applique le théorème limite central aux Y_i , puis on majore la variance inconnue grâce à 15(a), ce qui évite tout remplacement de $p(a)$ par un estimateur dans la convergence en loi.

Définition utilisée : une suite d'intervalles $[U_n, V_n]$, où U_n et V_n ne dépendent que de l'échantillon, est un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance $1 - \alpha$ du paramètre θ s'il existe une suite (α_n) de réels de $[0, 1]$, de limite α , telle que pour tout n , $P(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1 - \alpha_n$.

Notons $p = p(a)$ et $\theta = \arctan\left(\frac{M}{a}\right) = \frac{\pi}{2}p$.

Théorème limite central. Les Y_i sont mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance p et de variance $p(1 - p) > 0$ (15(a)). Donc la suite $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - p)}{\sqrt{p(1 - p)}}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite. La fonction Φ étant continue sur $\mathbb{R}$, pour tout réel t , $P(Z_n \leq t) \rightarrow \Phi(t)$. Ainsi :

$$P(-z < Z_n \leq z) = P(Z_n \leq z) - P(Z_n \leq -z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0,95,$$

en utilisant $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (parité de la densité).

Majoration de l'écart-type. D'après 15(a), $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$. Donc :

$$\{-z < Z_n \leq z\} \subset \left\{ |\bar{Y}_n - p| \leq \frac{z\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right\} \subset \left\{ |\bar{Y}_n - p| \leq \frac{z}{2\sqrt{n}} \right\}.$$

En multipliant par $\frac{\pi}{2} > 0$, le dernier événement s'écrit $\{A_n \leq \theta \leq B_n\}$, avec :

$$A_n = \frac{\pi}{2}\bar{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \quad B_n = \frac{\pi}{2}\bar{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}.$$

On pose $\alpha_n = 1 - P(-z < Z_n \leq z) \in [0, 1]$, de limite 0,05. Alors

$P(A_n \leq \theta \leq B_n) \geq 1 - \alpha_n$. Les bornes A_n et B_n ne dépendent que de l'échantillon (et de M, z, n connus).

Conclusion

$\left[\frac{\pi}{2}\bar{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\bar{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\arctan\left(\frac{M}{a}\right)$ au niveau de confiance 95 %.

(d) On transforme l'intervalle de (c) par la fonction strictement décroissante qui exprime a en fonction de θ .

Comme $\theta = \arctan \frac{M}{a} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan \theta = \frac{M}{a}$, donc $a = \frac{M}{\tan \theta} = h(\theta)$, où h est définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $h(u) = \frac{M \cos u}{\sin u}$. La fonction h est dérivable, de dérivée $h'(u) = -\frac{M}{\sin^2 u} < 0$: elle est strictement décroissante, avec $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $h(u) \rightarrow +\infty$ quand $u \rightarrow 0^+$.

On a toujours $B_n > 0$ (car $\bar{Y}_n \geq 0$) et $A_n < \frac{\pi}{2}$ (car $\bar{Y}_n \leq 1$). Posons

$B'_n = \min(B_n, \frac{\pi}{2}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\{A_n \leq \theta \leq B_n\} = \{A_n \leq \theta \leq B'_n\}$, et par stricte décroissance de h :

sur l'événement $\{A_n > 0\}$, $\{A_n \leq \theta \leq B'_n\} = \{h(B'_n) \leq a \leq h(A_n)\}$;

sur l'événement $\{A_n \leq 0\}$, la condition $A_n \leq \theta$ est toujours vraie et $\{\theta \leq B'_n\} = \{h(B'_n) \leq a\}$.

Posons donc $U_n = h(B'_n) = \frac{M \cos B'_n}{\sin B'_n}$, et $V_n = h(A_n) = \frac{M \cos A_n}{\sin A_n}$ si $A_n > 0$, $V_n = +\infty$ si $A_n \leq 0$. Les événements $\{U_n \leq a \leq V_n\}$ et $\{A_n \leq \theta \leq B_n\}$ sont égaux, donc $P(U_n \leq a \leq V_n) \geq 1 - \alpha_n$ avec $\alpha_n \rightarrow 0,05$.

Conclusion

$\left[\frac{M}{\tan B'_n}, \frac{M}{\tan A_n} \right]$, avec $B'_n = \min\left(\frac{\pi}{2} \bar{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\right)$, $A_n = \frac{\pi}{2} \bar{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}$, et les conventions $\frac{M}{\tan(\pi/2)} = 0$ et borne supérieure $+\infty$ si $A_n \leq 0$, est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance 95 %. Comme $P(A_n \leq 0) \rightarrow 0$ (car $\bar{Y}_n \rightarrow p > 0$ en probabilité), la borne supérieure est finie avec une probabilité tendant vers 1.

Contrôle expérimental exécuté (ce n'est pas une preuve) : sur 4000 échantillons de taille 1000 avec $a = M = 1$, l'intervalle obtenu contient a dans environ 94,9 % des cas.

16. On commente la figure à la lumière de la construction de 15(d).

Pour $a = M = 1$, on a $p = \frac{2}{\pi} \arctan 1 = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

L'intervalle contient la vraie valeur $a = 1$ pour tous les n représentés (sur cette unique réalisation) : la borne inférieure reste sous la droite $a = 1$, la borne supérieure au-dessus.

Les bornes se rapprochent de 1 quand n augmente : la longueur de l'intervalle tend vers 0. Elle décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$: le demi-intervalle pour θ vaut $\frac{\pi z}{4\sqrt{n}}$; quand n est multiplié par 100 (de 10^2 à 10^4), la longueur lue passe d'environ 2,6 à environ 0,25, soit une division par environ 10.

L'intervalle n'est pas symétrique autour de 1 : la borne supérieure est plus éloignée de 1 que la borne inférieure (pour $n = 1000$, environ 1,31 et 0,59). Cela vient de la transformation non linéaire $u \mapsto \frac{M}{\tan u}$, strictement décroissante et convexe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (sa dérivée $-\frac{M}{\sin^2 u}$ est croissante sur cet intervalle) : un intervalle symétrique autour de θ a une image dissymétrique, plus étendue du côté des grandes valeurs de a .

Les bornes fluctuent (aspect « bruité », surtout pour n petit) car ce sont des variables aléatoires : elles dépendent de $\bar{Y}_n$.

Pour $n = 100$, la borne inférieure est proche de 0 (elle est même légèrement négative sur la figure, environ $-0,04$) : l'intervalle est alors peu informatif. Une borne négative n'a pas de sens puisque $a > 0$; la troncature $B'_n = \min(B_n, \frac{\pi}{2})$ de 15(d) donne dans ce cas la borne inférieure 0.

Conclusion

la figure illustre le caractère asymptotique de l'intervalle : il encadre la vraie valeur, sa longueur tend vers 0 à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et il est dissymétrique en raison de la transformation $\theta \mapsto \frac{M}{\tan \theta}$.

17. Qualités attendues. Un intervalle de confiance doit d'abord être fiable : la probabilité qu'il contienne la vraie valeur du paramètre doit être au moins égale au niveau de confiance annoncé (ici, asymptotiquement, 95 %). Il doit ensuite être précis : à niveau de confiance fixé, on préfère l'intervalle le plus court. Ces deux exigences s'opposent : augmenter le niveau de confiance allonge l'intervalle.

Influence de M sur la longueur. Notons $r = \frac{M}{a}$ et $\theta = \arctan r$. La longueur de l'intervalle de 15(d) (lorsque $0 < A_n$ et $B_n < \frac{\pi}{2}$) vaut $h(A_n) - h(B_n)$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c_n entre A_n et B_n tel que :

$$h(A_n) - h(B_n) = (B_n - A_n) \frac{M}{\sin^2 c_n} = \frac{\pi z}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{M}{\sin^2 c_n}.$$

Pour n grand, A_n et B_n sont proches de θ avec une probabilité proche de 1, et

$\frac{M}{\sin^2 \theta} = M \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) = M + \frac{a^2}{M} = a \left(r + \frac{1}{r}\right)$. La longueur est donc approximativement :

$$\ell_n \approx \frac{\pi z a}{2\sqrt{n}} \left(r + \frac{1}{r}\right).$$

La fonction $r \mapsto r + \frac{1}{r}$ est minimale sur $]0, +\infty[$ en $r = 1$ (car $r + \frac{1}{r} - 2 = \frac{(r-1)^2}{r} \geq 0$), où elle vaut 2 ; elle vaut environ 2,27 pour $r = 0,6$, 2,5 pour $r = 2$ et 5,2 pour $r = 5$.

Lecture de la figure 4. Elle confirme cette analyse :

pour $\frac{M}{a} = 1$, les intervalles sont les plus courts ;

pour $\frac{M}{a} = 5$, ils sont nettement plus longs (environ 2,6 fois plus longs pour $n = 10^4$, comme le prévoit le rapport $\frac{5,2}{2}$) : si M est grand devant a , presque toutes les observations vérifient $|X_i| \leq M$, p est proche de 1 et l'information apportée par les Y_i est faible ;

pour $\frac{M}{a} = 0,6$ et $\frac{M}{a} = 2$, les longueurs sont intermédiaires et proches de celle obtenue pour $\frac{M}{a} = 1$ pour n grand (rapports lus d'environ 1,17 et 1,29, pour des valeurs prévues 1,13 et 1,25) ;

pour n petit, la courbe $\frac{M}{a} = 0,6$ est très irrégulière et élevée : $\theta = \arctan 0,6 \approx 0,54$ est assez proche de 0, et A_n peut s'approcher de 0, où h devient très grande (la pente $\frac{M}{\sin^2 u}$ explose) ;

toutes les longueurs décroissent comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (division par environ $\sqrt{10} \approx 3,2$ entre $n = 10^3$ et $n = 10^4$ sur le panneau de droite).

Conclusion

le meilleur choix est M du même ordre que a , idéalement $M = a$. Comme a est inconnu, on peut choisir M à l'aide d'une estimation préliminaire de a : par exemple, $P(|X| \leq a) = \frac{2}{\pi} \arctan 1 = \frac{1}{2}$, donc a est la médiane de $|X|$, que l'on peut approcher par la médiane empirique des $|X_i|$ calculée sur une partie de l'échantillon. Si M est choisi à partir des données mêmes, les résultats théoriques ci-dessus (établis pour M fixé) ne s'appliquent plus directement ; on utilise alors une partie de l'échantillon pour choisir M et l'autre pour construire l'intervalle.

Relevé des adaptations

Exercice 1, Exercice 2 et Problème : aucune question ne fait appel aux nombres complexes, au théorème de Slutsky, à l'ancien critère d'extremum ou à un langage autre que Python ; les énoncés des questions sont conservés.

Problème, préambule précédant la question 10 : « suivant toutes la même loi que X » est remplacé par « suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre a » ; la variable X n'étant pas définie dans la partie 2, la rectification précise la loi commune imposée par le contexte (questions 9 à 11).

Problème, préambule de la partie 3 : « un paramètre réel M strictement » est complété en « un paramètre réel M strictement positif » (mot manquant dans l'énoncé original).

Question 15(c) du problème : la construction utilise la majoration $p(a)(1 - p(a)) \leq \frac{1}{4}$ de 15(a), sans remplacer la variance inconnue par un estimateur dans la convergence en loi (pas de recours à Slutsky).

Figures 1, 2, 3 et 4 : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les courbes des figures 2, 3 et 4 sont tirées des tracés vectoriels du PDF ; les trois courbes de la figure 1 sont calculées exactement à partir des définitions de S_N , T_N et U_N pour $1 \leq N \leq 1200$, et concordent avec les tracés du PDF. Dans les légendes de la figure 1, l'indice N est noté « n » (indice Unicode disponible) ; dans la figure 4, $\frac{M}{a}$ est écrit « M/a ».

Points restant à vérifier

Figures 3 et 4 : les longueurs lues sur ces figures (par exemple environ 0,25 pour $n = 10^4$ et $a = M = 1$) sont environ 4 fois plus grandes que celles de l'intervalle construit en 15(c)-(d), dont la longueur théorique vaut environ 0,06 dans ce cas ; de plus, la borne inférieure de la figure 3 est légèrement négative pour $n = 100$. Les figures ont donc vraisemblablement été produites avec un intervalle plus large (par exemple un demi-intervalle pour p égal à $\frac{2z}{\sqrt{n}}$ au lieu de $\frac{z}{2\sqrt{n}}$) et sans troncature. Les commentaires qualitatifs des questions 16 et 17 (encadrement, décroissance en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, dissymétrie, rapports de longueurs selon $\frac{M}{a}$) n'en dépendent pas.

Exercice 1, question 10 : les données $3^4 = 81$ et $4^4 = 256$ de l'énoncé suggèrent une réponse attendue $N_2 = 4$, qui correspondrait à l'oubli du facteur $3! = 6$. Le corrigé retient $N_2 = 7$, seule valeur établie par la majoration de la question 9 ; un calcul numérique confirme que $N = 4$ ne convient pas.