



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2023

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer AB et BA .

(b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA .

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.

(a) Justifier que $BX \neq 0$.

(b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA .

3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.

(a) Supposons que B est inversible. Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA .

(b) Supposons que B n'est pas inversible. Montrer que $\text{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA .

4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Partie 2

On considère A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n -uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

(a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

(b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A , aboutir à une contradiction.

(c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$?

7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

(a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X .

(b) Exprimer de deux manières différentes BAX .

(c) En déduire que $BX \in \text{Vect}(X)$.

8. Dédurre que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B .

9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$

(b) Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$. Montrer que $\text{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.

(a) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad BX_i = P(\lambda_i)X_i.$$

(c) Montrer que $B = P(A)$.

11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

(c) À l'aide de la question 6, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on considère que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et que la norme associée au produit scalaire usuel est notée $\| \cdot \|$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on considère un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note alors f^{-1} la réciproque de f .

2. (a) Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.

(b) Exprimer ${}^t A$ en fonction de A .

(c) En déduire qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^t P A P$ soit diagonale.

(d) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.

(e) Montrer que $\langle f(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(a) Exprimer $g(x)$ en fonction des x_i , $a_{i,j}$ et u_i .

(b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et préciser $\partial_1 g(x)$.

(c) Vérifier que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla g(x) = f(x) - u.$$

4. Montrer que g admet un unique point critique m de $\mathbb{R}^n$ et que $m = f^{-1}(u)$.

5. Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{2} \langle f(x - m), x - m \rangle = g(x) - g(m).$$

6. Que peut-on en déduire au sujet du point m , vis-à-vis de g ?

On considère un réel α de $\left] 0, \frac{1}{\lambda_n} \right]$ et un vecteur m_0 de $\mathbb{R}^n$, et l'on définit par récurrence des vecteurs m_p de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{p+1} = m_p - \alpha \nabla g(m_p).$$

7. Soit a, h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que

$$\langle f(a + h), a + h \rangle = \langle f(a), a \rangle + 2\langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle.$$

(b) En déduire que

$$g(a + h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle.$$

8. (a) En appliquant cette égalité à des vecteurs a, h bien choisis, montrer que pour tout entier naturel p :

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel p :

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2.$$

9. (a) Montrer que la suite $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

On admet que $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$, où m a été défini à la question 4.

(b) Montrer que pour tout entier naturel p ,

$$\|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1} (g(m_p) - g(m)).$$

(c) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|m_p - m\| = 0$.

10. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $u = (2, 1)$ et

$$f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y).$$

(a) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

Dans la figure 1, on a représenté l'évolution des suites $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ en prenant deux paramètres différents ($\alpha_0 = 0,2$ et $\alpha_1 = 0,67$).

Dans la figure de gauche, on représente l'évolution de $g(m_p)$ en fonction de p , et dans la figure de droite on a représenté l'évolution de points m_p dans le plan, en reliant les points successifs.

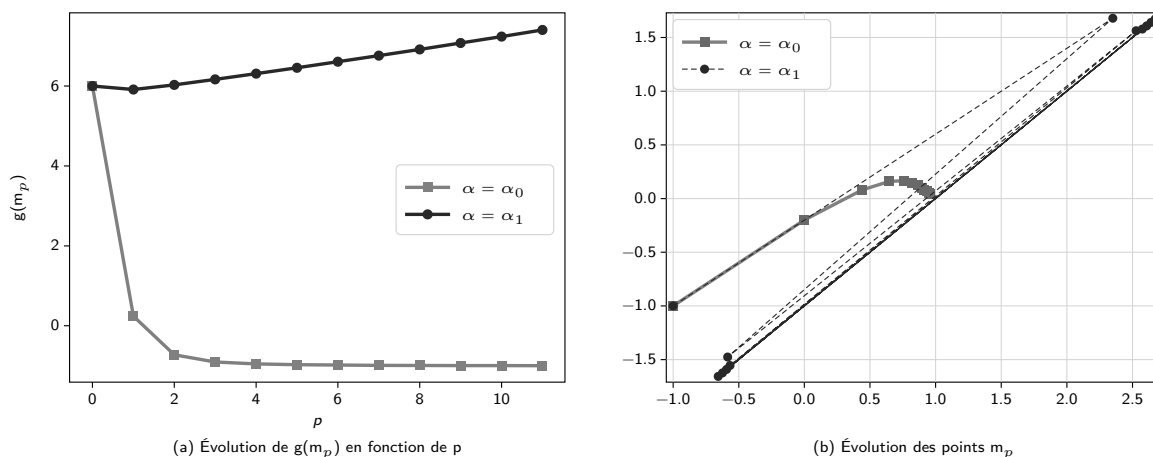


Figure 1 – Deux descentes de gradient, pour deux valeurs de α différentes.

Valeurs lues sur la figure 1. Les deux suites partent du même point $m_0 = (-1, -1)$, avec $g(m_0) = 6$, et les points sont tracés pour $p \in \{0, \dots, 11\}$. Pour $\alpha = \alpha_0$, les valeurs $g(m_p)$ décroissent d'environ 6 à environ -1 (environ 0,24 pour $p = 1$, $-0,72$ pour $p = 2$, puis stabilisation près de -1) et les points m_p , partis de $(-1, -1)$, passent près de $(0, -0,2)$ et $(0,44; 0,08)$ puis se rapprochent du point $(1, 0)$, le dernier point tracé étant voisin de $(0,96; 0,04)$. Pour $\alpha = \alpha_1$, les valeurs $g(m_p)$ valent environ 5,9 pour $p = 1$ puis croissent régulièrement jusqu'à environ 7,4 pour $p = 11$, et les points m_p alternent entre le voisinage de $(2,35; 1,68)$ à $(2,67; 1,67)$ et celui de $(-0,58; -1,48)$ à $(-0,66; -1,66)$, en s'éloignant lentement.

(b) Commenter ces courbes, et déterminer qualitativement lequel des deux α ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé (il n'y en a qu'un seul).

(c) Conjecturer la valeur de m , sachant que m est à coordonnées entières.

(d) Vérifier que les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées, et que les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

Problème

Partie 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

1. La librairie Numpy est importée sous la dénomination `np`. Écrire une fonction en langage Python nommée `F` prenant en argument un réel x et renvoyant en sortie le réel $F(x)$.
2. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f = F'$, puis justifier que

$$f' : x \mapsto \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}.$$

3. Dresser le tableau de variations des fonctions f et F sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les limites aux bornes.
4. Déterminer la parité des fonctions f et $F - \frac{1}{2}$.
5. Sur un schéma, tracer l'allure de la courbe de F , en faisant apparaître tous les éléments remarquables (asymptotes, points d'inflexion notamment).
6. Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I (à déterminer), et donner l'expression de F^{-1} la fonction réciproque de F .

Partie 2

7. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

converge.

On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

8. Justifier que f est une densité de probabilité, et que F est la fonction de répartition associée.

Dans cette partie et dans la suivante, on note X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est F , et dont f est une densité.

9. Justifier que X admet une espérance et une variance.

10. (a) En utilisant un résultat obtenu à la question 4 et à l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) \, dx = - \int_0^{+\infty} x f(x) \, dx.$$

(b) En déduire la valeur de $E(X)$.

11. Justifier que

$$V(X) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx,$$

puis que

$$V(X) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx.$$

12. Pour tout entier naturel n non nul, justifier la convergence et donner la valeur de

$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx.$$

13. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad V(X) = 4 \left(\sum_{n=1}^N \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right),$$

où $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, R_N(x) = \frac{x e^{-(N+1)x}}{1 + e^{-x}}.$

14. (a) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_N(x)| \leq x e^{-(N+1)x}.$

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} R_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$

15. Dédurre de toutes les questions précédentes que $V(X) = \frac{\pi^2}{3}.$

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, toutes de même loi que X .

On admet que X^2 admet une variance et que $V(X^2) = \frac{16\pi^4}{45}$.

16. Montrer que $V_n = \frac{1}{n} (X_1^2 + \dots + X_n^2)$ converge en probabilité vers $\frac{\pi^2}{3}$.

17. Construire une variable aléatoire T_n qui converge en probabilité vers π . On justifiera précisément le résultat.

18. Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X , où la fonction F est définie dans la partie 1.

19. La bibliothèque `numpy.random` est importée sous la dénomination `rd`. On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 selon une loi uniforme sur $[0, 1[$.

Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation_X`, ne prenant aucun argument en entrée et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

20. Écrire une fonction en langage Python, nommée `estimation_pi`, prenant un entier naturel n en entrée et renvoyant une estimation de π à l'aide de la question 17.

21. (a) Montrer qu'il existe un réel positif z tel que $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0,975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On admet que $z \leq 2$, ainsi que $\pi \leq 4$.

(b) Montrer que

$$P \left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \leq z \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,95.$$

(c) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95%, ne dépendant ni de π , ni de z .

(d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de π au niveau de confiance 95%.

22. Dans la figure 2, on a tracé l'évolution, en fonction de n , de l'estimateur et de l'intervalle de confiance construits précédemment. Commenter la figure obtenue au regard des questions précédentes.

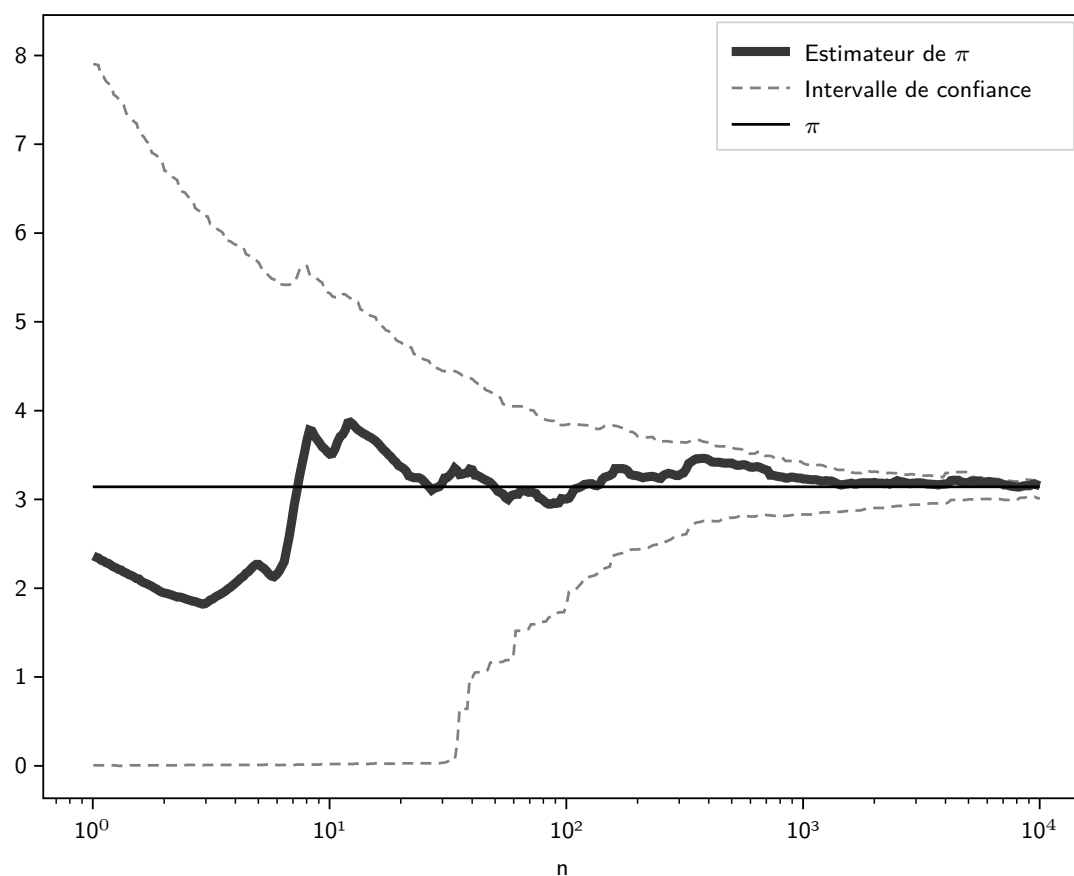


Figure 2 – Estimation de π

Valeurs lues sur la figure 2 (axe des abscisses en échelle logarithmique, de $n = 1$ à $n = 10^4$). L'estimateur vaut environ 2,4 pour $n = 1$, descend vers 1,8 pour $n = 3$, saute à environ 3,7 pour $n = 8$ et atteint environ 3,9 vers $n = 12$, puis oscille entre environ 2,9 et 3,5 pour n entre 20 et 10^3 et se stabilise vers 3,15 à 3,2 pour n voisin de 10^4 . La borne supérieure de l'intervalle vaut environ 8 pour $n = 1$, environ 3,8 pour $n = 10^2$, environ 3,4 pour $n = 10^3$ et environ 3,2 pour $n = 10^4$. La borne inférieure est nulle jusqu'à n voisin de 33, puis vaut environ 1,8 pour $n = 10^2$, 2,8 pour $n = 10^3$ et 3,0 pour $n = 10^4$. La droite horizontale est d'ordonnée π .

23. Pour toutes les valeurs de n entre 1 et 10^3 , on a répété 100 fois l'expérience précédente, et on a tracé dans la figure 3 la proportion de fois où π appartient bien à l'intervalle de confiance proposé (en traits pleins), ainsi que la limite de 95% (en traits hachurés). Commenter la figure obtenue.

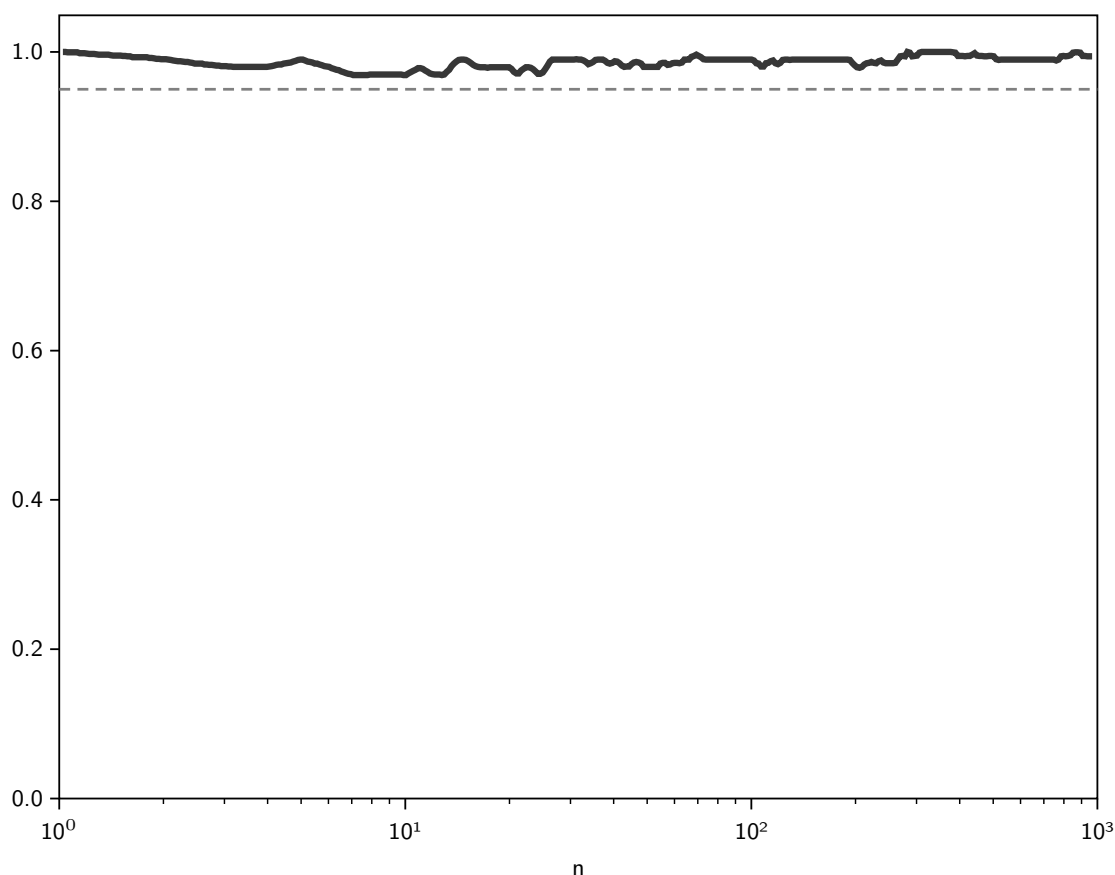


Figure 3 – Évaluation de la qualité de l'intervalle de confiance

Valeurs lues sur la figure 3 (axe des abscisses en échelle logarithmique, de $n = 1$ à

$n = 10^3$). La proportion vaut 1 pour $n = 1$, reste comprise entre environ 0,97 et 1 pour toutes les valeurs de n représentées (minimum voisin de 0,97 pour n entre 7 et 10 et pour n entre 20 et 25), et vaut le plus souvent 0,98 à 1 pour $n \geq 30$. La droite en tirets est d'ordonnée 0,95.