



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie 1

1. (a) On effectue les deux produits matriciels coefficient par coefficient.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 1 & (-1) \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) & 1 \times 1 + 2 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ En particulier } AB \neq BA.$$

(b) Les deux matrices sont triangulaires supérieures : leurs valeurs propres sont leurs coefficients diagonaux. On détermine ensuite chaque sous-espace propre en résolvant un système linéaire.

Pour AB : $\text{Sp}(AB) = \{2, -1\}$.

Pour $\lambda = 2$: $(AB - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $y = 0$. Donc

$$E_2(AB) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = -1$: $(AB + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $x + y = 0$. Donc

$$E_{-1}(AB) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour BA : $\text{Sp}(BA) = \{-1, 2\}$.

Pour $\lambda = -1$: $(BA + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $y = 0$. Donc

$$E_{-1}(BA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 2$: $(BA - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $x = y$. Donc

$$E_2(BA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Conclusion

AB et BA ont toutes deux pour spectre $\{-1, 2\}$, avec

$$E_2(AB) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_{-1}(AB) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_{-1}(BA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$E_2(BA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. (a) On raisonne par l'absurde. Supposons $BX = 0$. Alors $ABX = A(BX) = 0$. Or $ABX = \lambda X$ puisque X est un vecteur propre de AB associé à λ . On obtient $\lambda X = 0$, avec $X \neq 0$ (un vecteur propre est non nul), donc $\lambda = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$.

Conclusion

$$BX \neq 0.$$

- (b) On calcule $BA(BX)$ en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$BA(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

Le vecteur BX est non nul d'après la question 2(a) et vérifie $(BA)(BX) = \lambda(BX)$.

Conclusion

BX est un vecteur propre de BA associé à λ , et λ est une valeur propre de BA .

3. (a) Il s'agit d'utiliser l'injectivité de B , puis de reproduire le calcul de la question 2(b).

Méthode 1 — Construction d'un vecteur propre. Comme B est inversible, si l'on avait $BX = 0$, alors $X = B^{-1}(BX) = 0$, ce qui est impossible puisque X est un vecteur propre. Donc $BX \neq 0$. Ensuite, puisque $ABX = 0 \cdot X = 0$:

$$BA(BX) = B(ABX) = B \cdot 0 = 0 = 0 \cdot BX.$$

Ainsi BX est un vecteur non nul de $\text{Ker}(BA)$: c'est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre 0.

Méthode 2 — Similitude. Comme B est inversible, $B(AB)B^{-1} = BA(BB^{-1}) = BA$. Les matrices AB et BA sont donc semblables. Si Y est un vecteur propre de AB associé à μ , alors $BY \neq 0$ et $BA(BY) = B(AB)B^{-1}BY = B(ABY) = \mu BY$: deux matrices semblables ont le même spectre. Comme $0 \in \text{Sp}(AB)$, on obtient $0 \in \text{Sp}(BA)$.

La première méthode répond exactement à l'enchaînement demandé ; la seconde montre que, lorsque B est inversible, AB et BA ont en fait le même spectre tout entier, ce qui anticipe la question 4 dans ce cas particulier.

Conclusion

$BX \neq 0$ et 0 est une valeur propre de BA .

(b) On compare l'image de BA à celle de B , puis on applique le théorème du rang.

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $BAY = B(AY) \in \text{Im}(B)$. Donc $\text{Im}(BA) \subset \text{Im}(B)$, et par conséquent

$$\text{rg}(BA) = \dim \text{Im}(BA) \leq \dim \text{Im}(B) = \text{rg}(B).$$

Comme B n'est pas inversible, $\text{rg}(B) < n$ (une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang vaut n). D'où $\text{rg}(BA) < n$.

Par le théorème du rang appliqué à l'application $Y \mapsto BAY$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même :

$$\dim \text{Ker}(BA) = n - \text{rg}(BA) \geq 1.$$

Il existe donc $Y \neq 0$ tel que $BAY = 0 = 0 \cdot Y$.

Conclusion

$\text{rg}(BA) < n$, et 0 est une valeur propre de BA .

4. On montre la double inclusion des spectres, les résultats des questions 2 et 3 étant valables pour deux matrices quelconques.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(AB)$. Si $\lambda \neq 0$, la question 2(b) donne $\lambda \in \text{Sp}(BA)$. Si $\lambda = 0$, alors soit B est inversible et la question 3(a) donne $0 \in \text{Sp}(BA)$, soit B n'est pas inversible et la question 3(b) donne $0 \in \text{Sp}(BA)$. Donc $\text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA)$.

Les questions 2 et 3 ont été établies pour un couple quelconque (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En les appliquant au couple (B, A) , on obtient $\text{Sp}(BA) \subset \text{Sp}(AB)$.

Conclusion

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA).$$

5. Il suffit d'examiner l'exemple de la question 1.

Avec les matrices de la question 1, 2 est valeur propre de AB et de BA , mais

$$E_2(AB) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

tandis que

$$E_2(BA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) :$$

ces deux droites sont distinctes, car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même

$$E_{-1}(AB) \neq E_{-1}(BA).$$

Conclusion

non, en général AB et BA n'ont pas les mêmes sous-espaces propres, bien qu'elles aient le même spectre.

Partie 2

6. (a) On construit le polynôme dont les coefficients sont les α_k .

Posons

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k.$$

C'est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc de degré inférieur ou égal à $n - 1$, et il est non nul car ses coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ ne sont pas tous nuls. Par définition d'un polynôme de matrice, avec $A^0 = I_n$:

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

Conclusion

Q est un polynôme annulateur non nul de A , de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

(b) On montre que chaque valeur propre de A est racine de Q .

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et X_i un vecteur propre de A associé à λ_i . Par récurrence immédiate, $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $k = 0$, et si $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$, alors $A^{k+1} X_i = A(\lambda_i^k X_i) = \lambda_i^{k+1} X_i$. Par linéarité :

$$0 = Q(A)X_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k X_i = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \right) X_i = Q(\lambda_i)X_i.$$

Comme $X_i \neq 0$, on obtient $Q(\lambda_i) = 0$.

Ainsi Q admet les n racines deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Or un polynôme non nul de degré $d \leq n - 1$ admet au plus $d < n$ racines distinctes. C'est une contradiction.

Conclusion

l'hypothèse de départ est absurde : il n'existe pas de n -uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

(c) La question 6(b) montre que si

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0,$$

alors nécessairement $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Conclusion

la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. (a) On utilise le fait que la somme des espaces propres est directe.

Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_n}(A)$, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, sont en somme directe. Donc

$$\sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i}(A) = \dim (E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(A)) \leq \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n.$$

Chaque λ_i étant valeur propre, $\dim E_{\lambda_i}(A) \geq 1$. Une somme de n entiers tous supérieurs ou égaux à 1 et de total au plus n impose $\dim E_{\lambda_i}(A) = 1$ pour tout i .

De plus, A n'a pas d'autre valeur propre que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: sinon on disposerait de $n+1$ vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc d'une famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension n , ce qui est impossible. Ainsi $\lambda = \lambda_k$ pour un certain k , et $E_{\lambda}(A)$ est de dimension 1.

Enfin $X \in E_\lambda(A)$ et $X \neq 0$, donc $\text{Vect}(X) \subset E_\lambda(A)$ avec égalité des dimensions (toutes deux égales à 1).

Conclusion

$$E_\lambda(A) = \text{Vect}(X).$$

(b) D'une part, $AX = \lambda X$ donne $BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$.

D'autre part, $AB = BA$ donne $BAX = ABX = A(BX)$.

Conclusion

$$BAX = \lambda BX = A(BX).$$

(c) D'après la question 7(b), $A(BX) = \lambda(BX)$, c'est-à-dire $(A - \lambda I_n)(BX) = 0$. Donc $BX \in \text{Ker}(A - \lambda I_n) = E_\lambda(A)$ (ce qui reste vrai si $BX = 0$, puisque $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel). Par la question 7(a), $E_\lambda(A) = \text{Vect}(X)$.

Conclusion

$$BX \in \text{Vect}(X).$$

8. Soit X un vecteur propre de A , associé à une valeur propre λ . D'après la question 7(c), il existe un réel μ tel que $BX = \mu X$. Comme $X \neq 0$, cela signifie exactement que X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre μ (éventuellement nulle).

Conclusion

tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B .

9. (a) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on choisit un vecteur propre X_i de A associé à λ_i , de sorte que $AX_i = \lambda_i X_i$.

Les vecteurs $X_1, \dots, X_n$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à

deux distinctes : la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est donc libre. C'est une famille libre de n vecteurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension n : c'est une base. Enfin, d'après la question 8, chaque X_i est aussi un vecteur propre de B .

Conclusion

il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres communs à A et B , avec $AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout i .

(b) On établit une double inclusion.

Inclusion $\{\lambda_i \mu_i\} \subset \text{Sp}(AB)$: pour tout i , $ABX_i = A(\mu_i X_i) = \mu_i AX_i = \lambda_i \mu_i X_i$, avec $X_i \neq 0$. Donc $\lambda_i \mu_i \in \text{Sp}(AB)$.

Inclusion réciproque : deux méthodes naturelles sont possibles.

Méthode 1 — Décomposition dans la base $(X_1, \dots, X_n)$. Soit $\nu \in \text{Sp}(AB)$ et $Y \neq 0$ tel que $ABY = \nu Y$. On écrit

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i X_i.$$

Alors

$$ABY = \sum_{i=1}^n y_i \lambda_i \mu_i X_i \quad \text{et} \quad \nu Y = \sum_{i=1}^n \nu y_i X_i.$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $y_i(\lambda_i \mu_i - \nu) = 0$ pour tout i . Comme $Y \neq 0$, il existe i_0 tel que $y_{i_0} \neq 0$, d'où $\nu = \lambda_{i_0} \mu_{i_0}$.

Méthode 2 — Diagonalisation simultanée. Soit P la matrice dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$: c'est la matrice de passage de la base canonique à la base $(X_1, \dots, X_n)$, elle est donc inversible. Les relations $AX_i = \lambda_i X_i$ et $BX_i = \mu_i X_i$ s'écrivent $AP = PD_A$ et $BP = PD_B$ avec $D_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D_B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Alors

$$P^{-1}ABP = P^{-1}AP P^{-1}BP = D_A D_B = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n).$$

Deux matrices semblables ont le même spectre, et le spectre d'une matrice diagonale est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

La méthode 1 n'utilise que la notion de base ; la méthode 2 met en évidence que A , B et AB sont diagonalisables dans une même base, point de vue souvent utile pour calculer des puissances.

Conclusion

$$\text{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

10. (a) Notons $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[x] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$. On montre que φ est linéaire et injective, puis on compare les dimensions.

Linéarité : pour $P, R \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $t \in \mathbb{R}$, $(P + tR)(\lambda_i) = P(\lambda_i) + tR(\lambda_i)$ pour tout i , donc $\varphi(P + tR) = \varphi(P) + t\varphi(R)$.

Injectivité : si $\varphi(P) = 0$, alors $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i . Le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ admet alors n racines deux à deux distinctes, donc $P = 0$ d'après le rappel de l'énoncé. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

Dimensions : $\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n = \dim \mathbb{R}^n$. Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie est bijective.

Conclusion

φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On ramène la condition à une équation $\varphi(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $BX_i = \mu_i X_i$, donc $BX_i = P(\lambda_i)X_i$ équivaut à $(\mu_i - P(\lambda_i))X_i = 0$, c'est-à-dire à $P(\lambda_i) = \mu_i$ puisque $X_i \neq 0$. Ainsi P vérifie la condition demandée si et seulement si $\varphi(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Comme φ est bijective, cette équation admet une unique solution $P = \varphi^{-1}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Conclusion

il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $BX_i = P(\lambda_i)X_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) On montre que B et $P(A)$ coïncident sur une base.

Comme à la question 6(b), $A^k X_i = \lambda_i^k X_i$, donc, en écrivant

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k :$$

$$P(A)X_i = \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^k X_i = P(\lambda_i)X_i = BX_i.$$

Ainsi $(B - P(A))X_i = 0$ pour tout i . Tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit

$$Y = \sum_i y_i X_i$$

car $(X_1, \dots, X_n)$ est une base, et par linéarité $(B - P(A))Y = 0$. En prenant pour Y les vecteurs de la base canonique, toutes les colonnes de $B - P(A)$ sont nulles.

Conclusion

$$B = P(A).$$

11. (a) Deux méthodes classiques sont possibles.

Méthode 1 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels. On a $0 \in \mathcal{C}(A)$ car $A \cdot 0 = 0 = 0 \cdot A$. Soit $B, B' \in \mathcal{C}(A)$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$A(B + tB') = AB + tAB' = BA + tB'A = (B + tB')A,$$

donc $B + tB' \in \mathcal{C}(A)$. Ainsi $\mathcal{C}(A)$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par combinaison linéaire.

Méthode 2 — Noyau d'une application linéaire. L'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$ est linéaire, par distributivité du produit matriciel. Par définition, $\mathcal{C}(A) = \text{Ker } \psi$, et le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

La méthode 2 est plus rapide et se réutilise pour tout ensemble défini par une équation linéaire.

Conclusion

$\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) On procède par double inclusion.

Inclusion $\subset$: soit $B \in \mathcal{C}(A)$, c'est-à-dire $AB = BA$. La matrice A vérifie les hypothèses de la partie 2, donc les questions 7 à 10 s'appliquent à B , et la question 10(c) fournit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $B = P(A)$.

Inclusion $\supset$: soit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k \in \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

Alors

$$AP(A) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^{k+1} = P(A)A,$$

donc $P(A) \in \mathcal{C}(A)$.

Conclusion

$$\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}.$$

(c) D'après la question 11(b), un élément de $\mathcal{C}(A)$ s'écrit

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^k$$

et réciproquement toute combinaison linéaire de $I_n, A, \dots, A^{n-1}$ est de cette forme. Donc

$$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}).$$

La famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{C}(A)$ et libre d'après la question 6(c) : c'est une base de $\mathcal{C}(A)$, formée de n matrices.

Conclusion

$$\dim \mathcal{C}(A) = n.$$

Exercice 2

1. Il suffit de montrer que f est injective, puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Soit $x \in \text{Ker } f$. Si l'on avait $x \neq 0$, alors $f(x) = 0 = 0 \cdot x$ ferait de 0 une valeur propre de f . Or les valeurs propres de f vérifient $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, donc 0 n'est pas valeur propre. Ainsi $x = 0$ et $\text{Ker } f = \{0\}$.

Un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif (par le théorème du rang, $\text{rg } f = n - \dim \text{Ker } f = n$).

Conclusion

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique lorsque

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

(b) La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel. Le coefficient $a_{i,j}$ est la i -ième coordonnée de $f(e_j)$ dans cette base, donc $a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$. Par symétrie de f et du produit scalaire :

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = a_{j,i}.$$

Conclusion

${}^tA = A$: la matrice A est symétrique.

(c) On applique le théorème spectral (admis au programme).

La matrice A est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est-à-dire telle que ${}^tPP = I_n$, et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. La matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = {}^tP$, et

$${}^tPAP = {}^tPPD{}^tPP = D.$$

Conclusion

il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible (et même orthogonale) telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

(d) On écrit x dans une base orthonormale de vecteurs propres de f .

Notons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $P_1, \dots, P_n$ les colonnes de P . La relation ${}^tPP = I_n$ signifie que ${}^tP_iP_j$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon : les vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $P_1, \dots, P_n$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. La relation $AP = PD$ donne $AP_i = d_iP_i$, c'est-à-dire $f(\varepsilon_i) = d_i\varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \neq 0$. Chaque d_i est donc une valeur propre de f , d'où

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_1 \leq d_i \leq \lambda_n,$$

puisque λ_1 est la plus petite et λ_n la plus grande valeur propre de f .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, que l'on écrit

$$x = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i.$$

Par linéarité,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n d_i y_i \varepsilon_i,$$

et comme la base (ε_i) est orthonormale :

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Comme $y_i^2 \geq 0$, on obtient $\lambda_1 y_i^2 \leq d_i y_i^2 \leq \lambda_n y_i^2$ pour tout i , puis en sommant :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.

(e) Si $x = 0$, alors $f(x) = 0$ et $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Réciproquement, si $\langle f(x), x \rangle = 0$, la question 2(d) donne $0 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \leq 0$, donc $\lambda_1 \|x\|^2 = 0$. Comme $\lambda_1 > 0$, on obtient $\|x\| = 0$, donc $x = 0$.

Conclusion

$\langle f(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3. (a) La i -ième coordonnée de $f(x)$ est

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Donc

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

Par ailleurs

$$\langle u, x \rangle = \sum_{i=1}^n u_i x_i.$$

Conclusion

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j - \sum_{i=1}^n u_i x_i.$$

(b) D'après la question 3(a), g est une fonction polynomiale des coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Ses dérivées partielles existent et sont encore polynomiales, donc continues : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ (et même de classe $\mathcal{C}^2$).

Pour calculer $\partial_1 g(x)$, on fixe $x_2, \dots, x_n$ et on isole les termes contenant x_1 :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = a_{1,1} x_1^2 + \sum_{j=2}^n a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^n a_{i,1} x_i x_1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

En dérivant par rapport à x_1 :

$$\partial_1 g(x) = \frac{1}{2} \left(2a_{1,1} x_1 + \sum_{j=2}^n a_{1,j} x_j + \sum_{i=2}^n a_{i,1} x_i \right) - u_1.$$

Comme A est symétrique (question 2(b)), $a_{i,1} = a_{1,i}$, donc les deux sommes sont égales et

$$\partial_1 g(x) = a_{1,1}x_1 + \sum_{j=2}^n a_{1,j}x_j - u_1.$$

Conclusion

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\partial_1 g(x) = \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j - u_1.$$

- (c) Le calcul de la question 3(b) s'applique à chaque indice $k \in \{1, \dots, n\}$ en isolant les termes contenant x_k , et la symétrie $a_{i,k} = a_{k,i}$ donne de même

$$\partial_k g(x) = \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j - u_k.$$

Or

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j$$

est la k -ième coordonnée de $f(x)$ et u_k celle de u .

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g(x) = (\partial_1 g(x), \dots, \partial_n g(x)) = f(x) - u$.

4. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, et ses points critiques sont les points où le gradient s'annule. D'après la question 3(c) :

$$\nabla g(x) = 0 \iff f(x) = u \iff x = f^{-1}(u),$$

la dernière équivalence venant de la bijectivité de f (question 1).

Conclusion

g admet un unique point critique, $m = f^{-1}(u)$.

5. On développe par bilinéarité, puis on utilise la symétrie de f et la relation $f(m) = u$.

Par linéarité de f , $f(x - m) = f(x) - f(m) = f(x) - u$. Donc

$$\langle f(x - m), x - m \rangle = \langle f(x), x \rangle - \langle f(x), m \rangle - \langle u, x \rangle + \langle u, m \rangle.$$

Par symétrie de f , $\langle f(x), m \rangle = \langle x, f(m) \rangle = \langle x, u \rangle$. D'où

$$\frac{1}{2} \langle f(x - m), x - m \rangle = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle.$$

Par ailleurs

$$g(m) = \frac{1}{2} \langle f(m), m \rangle - \langle u, m \rangle = \frac{1}{2} \langle u, m \rangle - \langle u, m \rangle = -\frac{1}{2} \langle u, m \rangle,$$

donc

$$g(x) - g(m) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle.$$

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{2} \langle f(x - m), x - m \rangle = g(x) - g(m)$.

6. On montre que m est un minimum global strict de g .

Méthode 1 — Étude directe du signe de $g(x) - g(m)$. D'après les questions 5 et 2(d), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x) - g(m) = \frac{1}{2} \langle f(x - m), x - m \rangle \geq \frac{\lambda_1}{2} \|x - m\|^2 \geq 0.$$

De plus, si $x \neq m$, alors $\|x - m\| > 0$ et, comme $\lambda_1 > 0$, $g(x) - g(m) > 0$.

Méthode 2 — Hessienne et convexité. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. D'après la question 3(c),

$$\partial_k g(x) = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j - u_k,$$

donc $\partial_l \partial_k g(x) = a_{k,l}$: la hessienne de g en tout point est $\nabla^2 g(x) = A$, matrice symétrique dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positives. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe et la hessienne y est partout à valeurs propres positives : d'après le critère d'extremum global sur un ouvert convexe, le point critique m est un minimum global de g . En particulier, en m , toutes les valeurs propres de la hessienne sont strictement positives, donc m est aussi un minimum local strict.

La méthode 1 donne directement le caractère strict et global ainsi qu'une minoration quantitative, réutilisée à la question 9(b) ; la méthode 2 illustre la méthode générale d'étude d'un point critique par la hessienne et s'applique à des fonctions qui ne sont pas quadratiques.

Conclusion

g atteint en m un minimum global strict : pour tout $x \neq m$, $g(x) > g(m)$.

7. (a) Par linéarité de f , $f(a + h) = f(a) + f(h)$. Par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle f(a + h), a + h \rangle = \langle f(a), a \rangle + \langle f(a), h \rangle + \langle f(h), a \rangle + \langle f(h), h \rangle.$$

Par symétrie de f et du produit scalaire, $\langle f(h), a \rangle = \langle h, f(a) \rangle = \langle f(a), h \rangle$.

Conclusion

$$\langle f(a + h), a + h \rangle = \langle f(a), a \rangle + 2\langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle.$$

(b) Par la question 7(a) et la linéarité de $x \mapsto \langle u, x \rangle$:

$$g(a + h) = \frac{1}{2}\langle f(a), a \rangle + \langle f(a), h \rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h \rangle - \langle u, a \rangle - \langle u, h \rangle.$$

On regroupe : $\frac{1}{2}\langle f(a), a \rangle - \langle u, a \rangle = g(a)$ et
 $\langle f(a), h \rangle - \langle u, h \rangle = \langle f(a) - u, h \rangle = \langle \nabla g(a), h \rangle$ par la question 3(c).

Conclusion

$$g(a + h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h \rangle.$$

8. (a) On applique la question 7(b) avec $a = m_p$ et $h = -\alpha \nabla g(m_p)$, de sorte que
 $a + h = m_{p+1}$. Par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle \nabla g(m_p), h \rangle = -\alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 \quad \text{et} \quad \langle f(h), h \rangle = \alpha^2 \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle.$$

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle.$$

(b) La question 2(d) appliquée à $x = \nabla g(m_p)$ donne

$\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle \leq \lambda_n \|\nabla g(m_p)\|^2$. Comme $\frac{\alpha^2}{2} \geq 0$, la question 8(a) donne

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2 \lambda_n}{2} \|\nabla g(m_p)\|^2.$$

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2$.

9. (a) On applique le théorème de la limite monotone.

Comme $0 < \alpha \leq \frac{1}{\lambda_n}$, on a $\alpha \lambda_n \leq 1$, donc $1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$. Ainsi

$\alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2 \geq 0$ et la question 8(b) donne $g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$ pour tout p : la suite $(g(m_p))$ est décroissante.

D'après la question 6, $g(m_p) \geq g(m)$ pour tout p : la suite est minorée par $g(m)$.

Conclusion

la suite $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$, décroissante et minorée, converge.

(b) On applique les questions 5 et 2(d) avec $x = m_p$:

$$g(m_p) - g(m) = \frac{1}{2} \langle f(m_p - m), m_p - m \rangle \geq \frac{\lambda_1}{2} \|m_p - m\|^2.$$

Comme $\lambda_1 > 0$, on multiplie par $\frac{2}{\lambda_1} > 0$.

Conclusion

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \quad \|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1} (g(m_p) - g(m)).$$

(c) D'après le résultat admis, $g(m_p) - g(m) \rightarrow 0$. Par la question 9(b),

$$0 \leq \|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1} (g(m_p) - g(m)), \text{ donc par encadrement } \|m_p - m\|^2 \rightarrow 0. \text{ La}$$

fonction racine carrée étant continue en 0, $\|m_p - m\| = \sqrt{\|m_p - m\|^2} \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|m_p - m\| = 0.$$

10. (a) On écrit la matrice de f dans la base canonique.

f est linéaire (ses coordonnées sont des combinaisons linéaires de x et y) et sa matrice

dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, qui est symétrique. La base canonique étant

orthonormale pour le produit scalaire usuel, pour tous vecteurs v, w de coordonnées V, W , on a

$$\langle f(v), w \rangle = {}^t(AV)W = {}^tV {}^tA W = {}^tV A W = \langle v, f(w) \rangle.$$

Pour vérifier les autres hypothèses de l'énoncé, on détermine aussi les valeurs propres de A :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs propres forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc A est semblable à $\text{diag}(3, 1)$ et $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$. Ainsi $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_n = 3$, toutes deux strictement positives.

Conclusion

f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$, de valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

(b) Pour $\alpha = \alpha_0 = 0,2$, la suite $(g(m_p))$ décroît rapidement (de 6 à environ 0,24, puis $-0,72$) et se stabilise vers une valeur voisine de -1 ; les points m_p se rapprochent d'un point limite. Pour $\alpha = \alpha_1 = 0,67$, la suite $(g(m_p))$ diminue légèrement au premier pas puis croît régulièrement (environ 7,4 pour $p = 11$); les points m_p oscillent de part et d'autre d'un point en s'en éloignant.

Or, sous les hypothèses de l'énoncé, la question 9(a) montre que $(g(m_p))$ est décroissante. La suite tracée pour α_1 n'est pas décroissante : α_1 ne vérifie pas les hypothèses. Cela est confirmé par la question 10(a) : la condition s'écrit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$, vérifiée par $\alpha_0 = 0,2$ mais pas par $\alpha_1 = 0,67 > \frac{1}{3}$.

Pour mieux comprendre, on peut expliciter les suites. Comme $f(m) = u$, on a $\nabla g(m_p) = f(m_p) - f(m) = f(m_p - m)$, donc $m_{p+1} - m = (\text{id} - \alpha f)(m_p - m)$. En notant $e = (1, 1)$ et $e' = (1, -1)$, on a $(\text{id} - \alpha f)(e) = (1 - 3\alpha)e$ et $(\text{id} - \alpha f)(e') = (1 - \alpha)e'$. Avec le point de départ $m_0 = (-1, -1)$ lu sur la figure et $m = (1, 0)$, solution du système $f(m) = u$ résolu à la question 10(c), $m_0 - m = (-2, -1) = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}e'$, d'où par récurrence

$$m_p - m = -\frac{3}{2}(1 - 3\alpha)^p e - \frac{1}{2}(1 - \alpha)^p e'.$$

Comme $e \perp e'$, $\|e\|^2 = \|e'\|^2 = 2$, $f(e) = 3e$ et $f(e') = e'$, la question 5 donne

$$g(m_p) - g(m) = \frac{27}{4}(1 - 3\alpha)^{2p} + \frac{1}{4}(1 - \alpha)^{2p}.$$

Pour $\alpha_0 = 0,2$: $1 - 3\alpha_0 = 0,4$ et $1 - \alpha_0 = 0,8$ sont dans $] -1, 1[$, donc $m_p \rightarrow m$. Pour $\alpha_1 = 0,67$: $1 - 3\alpha_1 = -1,01$, de valeur absolue strictement supérieure à 1, ce qui explique l'alternance des points de part et d'autre de m selon la direction e (sur la droite d'équation $y = x - 1$) et la croissance lente de $g(m_p)$; on retrouve d'ailleurs $g(m_1) = -1 + \frac{27}{4} \times 1,0201 + \frac{1}{4} \times 0,1089 \approx 5,91$, conforme à la figure.

Conclusion

la descente avec α_0 converge vers le minimum, celle avec α_1 diverge; c'est $\alpha_1 = 0,67$ qui ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé.

- (c) Sur la figure de droite, les points m_p obtenus avec α_0 (pour lequel la question 9(c) assure la convergence vers m) se rapprochent du point $(1, 0)$, le dernier point tracé étant voisin de $(0,96; 0,04)$. Comme m est à coordonnées entières, on conjecture $m = (1, 0)$.

Vérification : $m = f^{-1}(u)$ est la solution du système $2x + y = 2$, $x + 2y = 1$. En retranchant la seconde équation au double de la première, on obtient $3x = 3$, donc $x = 1$, puis $y = 2 - 2x = 0$.

Conclusion

$m = (1, 0)$, ce que confirme le calcul exact.

- (d) Vérification des hypothèses : $n = 2 \geq 2$, f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$, avec $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ (question 10(a)). La condition sur le pas s'écrit $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{3} \right]$; elle est satisfaite par $\alpha_0 = 0,2$, ce qui permet d'appliquer les résultats des questions 8 et 9 à la suite tracée avec α_0 .

Adéquation avec la théorie :

D'une part, $g(m) = -\frac{1}{2}\langle u, m \rangle = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ (calcul de la question 5). La suite $(g(m_p))$ tracée avec α_0 est décroissante (question 9(a)) et se stabilise près de $-1 = g(m)$, conformément au résultat admis.

D'autre part, les points m_p se rapprochent de $(1, 0) = m$, conformément à la question 9(c). On peut aussi contrôler l'inégalité de la question 9(b) au rang $p = 0$:

$$\|m_0 - m\|^2 = \|(-2, -1)\|^2 = 5 \text{ et } \frac{2}{\lambda_1}(g(m_0) - g(m)) = 2 \times 7 = 14.$$

Enfin, le comportement observé pour α_1 n'est pas en contradiction avec la théorie, puisque α_1 ne vérifie pas l'hypothèse $\alpha \leq \frac{1}{\lambda_n}$; il montre que cette hypothèse ne peut pas être supprimée.

Conclusion

les conditions de l'énoncé sont vérifiées pour α_0 , et les observations expérimentales (décroissance de $g(m_p)$ vers $g(m) = -1$, convergence de m_p vers $m = (1, 0)$) sont en accord avec les questions 6 à 9. Ces observations numériques illustrent les résultats mais ne les démontrent pas.

Problème

Partie 1

1. On traduit directement la formule à l'aide de la fonction exponentielle de Numpy.

Python

```
import numpy as np

def F(x):
    return np.exp(x) / (1 + np.exp(x))
```

La fonction reçoit un réel x , calcule e^x avec `np.exp` et renvoie le quotient $\frac{e^x}{1 + e^x}$. Code exécuté : `F(0)` renvoie 0.5, et `F(2)` renvoie environ 0.8808, valeur égale à $\frac{1}{1 + e^{-2}}$.

Remarque : pour de très grandes valeurs de x , $\text{np.exp}(x)$ dépasse la capacité des flottants ; l'écriture équivalente $1 / (1 + \text{np.exp}(-x))$ évite ce problème pour x positif. Cela ne change rien à la réponse attendue.

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de même que $x \mapsto 1 + e^x$, qui ne s'annule pas puisque $1 + e^x > 1 > 0$. Par quotient, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $f = F'$: par la formule de dérivation d'un quotient,

$$f(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Calcul de f' : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme dérivée de F . Par la formule du quotient, avec $((1 + e^x)^2)' = 2e^x(1 + e^x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x)^2 - e^x \cdot 2e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 + e^x)((1 + e^x) - 2e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}.$$

Conclusion

F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ et $f'(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$ pour tout réel x .

3. On étudie le signe des dérivées, puis les limites.

Variations de F : pour tout x , $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites de F : en $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$, donc $F(x) \rightarrow \frac{0}{1} = 0$. En $+\infty$, on écrit $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ (en divisant numérateur et dénominateur par $e^x > 0$) et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $F(x) \rightarrow 1$. Enfin $F(0) = \frac{1}{2}$.

Variations de f : $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^3 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - e^x$: strictement positif pour $x < 0$, nul en 0, strictement négatif pour $x > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $] - \infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, avec $f(0) = \frac{1}{4}$.

Limites de f : en $-\infty$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc

$f(x) \rightarrow 0$. En $+\infty$, en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-2x} ,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	—	
variations de f	0	croissante	$\frac{1}{4}$	décroissante	0

Tableau de variations de F :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x) = F'(x)$		+	+	+	
variations de F	0	croissante	$\frac{1}{2}$	croissante	1

Conclusion

F croît strictement de 0 à 1 sur $\mathbb{R}$; f croît strictement de 0 à $\frac{1}{4}$ sur $] -\infty, 0]$ puis décroît strictement de $\frac{1}{4}$ à 0 sur $[0, +\infty[$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.

Parité de f : en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{2x} > 0$,

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}e^{2x}}{(e^x(1 + e^{-x}))^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x).$$

Donc f est paire.

Parité de $F - \frac{1}{2}$: deux méthodes sont naturelles.

Méthode 1 — Calcul direct. En multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$F(-x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 1} = \frac{(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x} = 1 - F(x).$$

Donc $F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - F(x) = -\left(F(x) - \frac{1}{2}\right).$

Méthode 2 — Par dérivation, à partir de la parité de f . Posons

$h(x) = \left(F(x) - \frac{1}{2}\right) + \left(F(-x) - \frac{1}{2}\right)$. La fonction h est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et

$h'(x) = f(x) - f(-x) = 0$ par parité de f . Donc h est constante, égale à

$$h(0) = 2\left(F(0) - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

La méthode 1 est la plus rapide ici ; la méthode 2 traduit un fait général utile : une primitive d'une fonction paire qui s'annule en 0 est impaire.

Conclusion

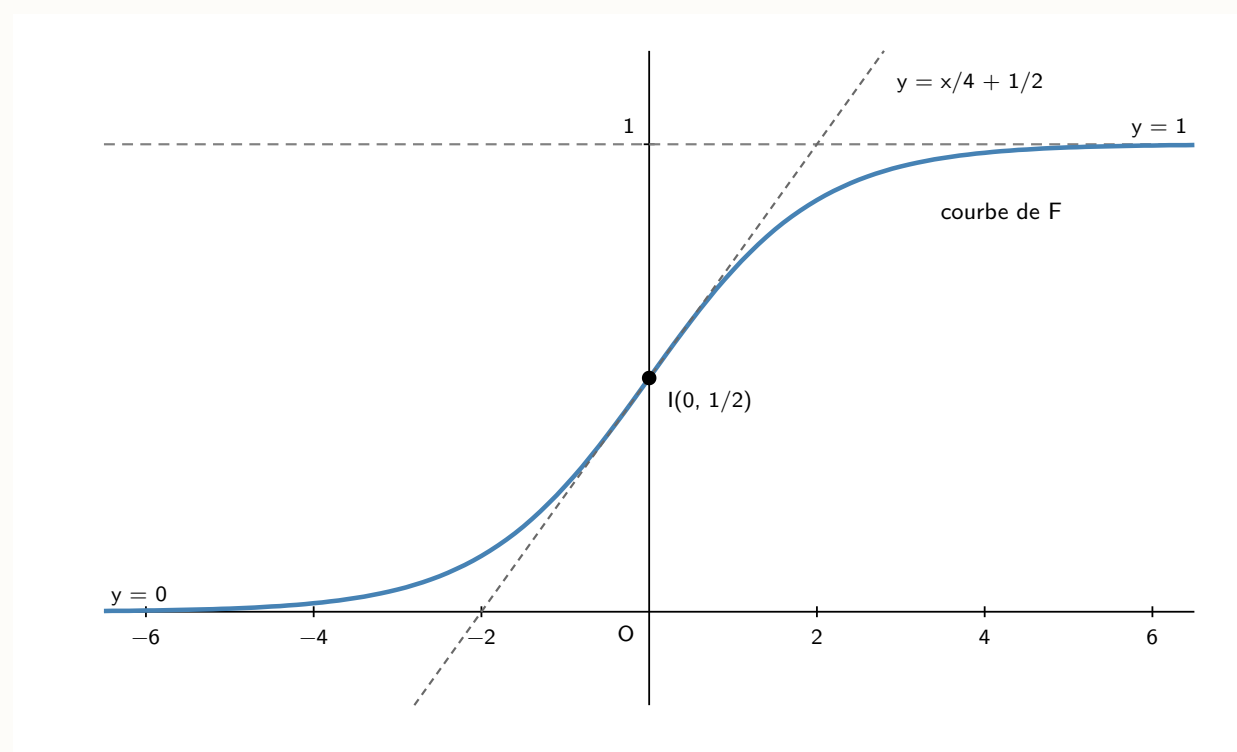
f est paire et $F - \frac{1}{2}$ est impaire : la courbe de F est symétrique par rapport au point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

5. On rassemble les éléments remarquables obtenus.

Asymptotes : d'après la question 3, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. Comme $0 < F(x) < 1$ pour tout x , la courbe reste strictement entre ces deux droites.

Point d'inflexion : $F'' = f'$ s'annule en 0 en changeant de signe (positive sur $] -\infty, 0[$, négative sur $]0, +\infty[$). Donc F est convexe sur $] -\infty, 0[$, concave sur $]0, +\infty[$, et le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion. La tangente en I a pour pente $F'(0) = f(0) = \frac{1}{4}$; son équation est $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

Symétrie : d'après la question 4, I est centre de symétrie de la courbe.



Conclusion

la courbe de F est une courbe en S, strictement croissante, comprise entre les asymptotes $y = 0$ (en $-\infty$) et $y = 1$ (en $+\infty$), de centre de symétrie et point d'inflexion $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$, où la tangente a pour équation $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

6. On applique le théorème de la bijection, puis on résout l'équation $F(x) = y$.

La fonction F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]0, 1[$.

Expression de F^{-1} : soit $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$F(x) = y \iff e^x = y(1 + e^x) \iff e^x(1 - y) = y \iff e^x = \frac{y}{1 - y},$$

la division par $1 - y$ étant licite car $y < 1$. Comme $\frac{y}{1 - y} > 0$, cette dernière égalité équivaut à $x = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)$.

Conclusion

F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]0, 1[$, et pour tout $y \in]0, 1[$, $F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)$.

Partie 2

7. On montre la convergence absolue.

Pour tout $n \geq 1$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

converge, car $2 > 1$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

est donc absolument convergente, et la convergence absolue implique la convergence.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

converge.

8. On vérifie les trois propriétés d'une densité, puis on calcule la fonction de répartition associée.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (question 2) et positive (question 3).

Pour $a < 0 < b$, puisque F est une primitive de f , $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$, cette quantité tend vers $1 - 0 = 1$ (question 3). Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1 : f est une densité de probabilité.

Pour tout réel x et tout $a < x$, $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$, qui tend vers $F(x)$ quand $a \rightarrow -\infty$. Donc la fonction de répartition associée à f , $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$, est égale à F .

Conclusion

f est une densité de probabilité, et F est la fonction de répartition associée.

9. Il suffit de montrer que X admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire, par le théorème de transfert, que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge (l'intégrande étant positif, convergence et convergence absolue coïncident).

Majoration de f : pour tout réel x , $(1 + e^x)^2 \geq 1$, donc $f(x) \leq e^x$. De même, l'écriture $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ (question 3) donne $f(x) \leq e^{-x}$. Donc $0 \leq f(x) \leq e^{-|x|}$.

Sur $[0, +\infty[: 0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 e^{-x}$, et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge (c'est $\Gamma(3) = 2$). Par

comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge.

Sur $] -\infty, 0] : 0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 e^x$, et pour $A > 0$ le changement de variable affine $t = -x$

donne $\int_{-A}^0 x^2 e^x dx = \int_0^A t^2 e^{-t} dt$, qui a une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$. Par

comparaison, $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx$ converge.

Ainsi X^2 admet une espérance. Comme $|x| \leq 1 + x^2$, on a $0 \leq |x|f(x) \leq f(x) + x^2 f(x)$,

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument : X admet une espérance. Par la formule de

Koenig-Huygens, X admet alors une variance $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Conclusion

X admet une espérance et une variance.

10. (a) On effectue sur un segment le changement de variable affine $t = -x$, puis on passe à la limite.

Les deux intégrales convergent d'après la question 9. Soit $A > 0$. Avec $x = -t$, $dx = -dt$, et x variant de $-A$ à 0 quand t varie de A à 0 :

$$\int_{-A}^0 x f(x) dx = \int_A^0 (-t) f(-t) (-dt) = \int_A^0 t f(-t) dt = - \int_0^A t f(t) dt,$$

la dernière égalité utilisant la parité de f (question 4). En faisant tendre A vers $+\infty$, les deux membres convergent.

Conclusion

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = - \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

- (b) L'espérance existe (question 9) et, par la relation de Chasles pour des intégrales convergentes,

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = 0$$

d'après la question 10(a).

Conclusion

$$E(X) = 0.$$

11. Première égalité. Par Koenig-Huygens et la question 10(b),

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2), \text{ et par le théorème de transfert,}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, \text{ intégrale convergente d'après la question 9.}$$

Le même changement de variable qu'à la question 10(a) donne, pour $A > 0$,

$$\int_{-A}^0 x^2 f(x) dx = \int_0^A t^2 f(-t) dt = \int_0^A t^2 f(t) dt \text{ par parité de } f. \text{ Par passage à la limite,}$$

$$\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx, \text{ d'où}$$

$$V(X) = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx.$$

Seconde égalité. On effectue une intégration par parties sur un segment $[0, A]$, avec $A > 0$, puis on passe à la limite. On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -\frac{1}{1 + e^x}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} = f(x)$. Alors

$$\int_0^A x^2 f(x) dx = \left[-\frac{x^2}{1 + e^x} \right]_0^A + \int_0^A \frac{2x}{1 + e^x} dx = -\frac{A^2}{1 + e^A} + 2 \int_0^A \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx,$$

où l'on a multiplié numérateur et dénominateur par e^{-x} dans la dernière intégrale.

Quand $A \rightarrow +\infty$: $0 \leq \frac{A^2}{1 + e^A} \leq A^2 e^{-A} \rightarrow 0$ par croissances comparées, et

$\int_0^A x^2 f(x) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{V(X)}{2}$. Donc $\int_0^A \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ admet une limite finie, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ converge, et

$$\frac{V(X)}{2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx.$$

Conclusion

$$V(X) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux méthodes classiques sont possibles.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment. La fonction $x \mapsto xe^{-nx}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Pour $A > 0$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^A xe^{-nx} dx = \left[-\frac{x}{n}e^{-nx} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A e^{-nx} dx = -\frac{A}{n}e^{-nA} + \frac{1}{n^2} (1 - e^{-nA}).$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, $Ae^{-nA} \rightarrow 0$ par croissances comparées et $e^{-nA} \rightarrow 0$ car $n > 0$. L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{n^2}$.

Méthode 2 — Loi exponentielle. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $n > 0$, de densité $x \mapsto ne^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$. On sait que Y admet une espérance et que $E(Y) = \frac{1}{n}$. Par définition de l'espérance, l'intégrale

$\int_0^{+\infty} x \cdot ne^{-nx} dx$ converge et vaut $\frac{1}{n}$. En divisant par $n > 0$, $\int_0^{+\infty} xe^{-nx} dx$ converge

et vaut $\frac{1}{n^2}$.

La méthode 1 est autonome ; la méthode 2 est plus rapide et entraîne à reconnaître les intégrales associées aux lois usuelles.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$ converge et vaut $\frac{1}{n^2}$.

13. On décompose $\frac{1}{1+e^{-x}}$ à l'aide d'une somme géométrique finie, puis on intègre.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $q = e^{-x} \in]0, 1]$, de sorte que $-q \neq 1$. La somme géométrique finie de raison $-q$ donne

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-q)^k = \frac{1 - (-q)^N}{1 + q}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1 + q} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k q^k + \frac{(-1)^N q^N}{1 + q}.$$

En multipliant par $xq = xe^{-x}$, et en posant $n = k + 1$:

$$\frac{xe^{-x}}{1 + e^{-x}} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} x e^{-nx} + (-1)^N \frac{xe^{-(N+1)x}}{1 + e^{-x}} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} x e^{-nx} + (-1)^N R_N(x).$$

Chacune des intégrales $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$ converge (question 12). L'intégrale

$\int_0^{+\infty} R_N(x) dx$ converge aussi, car R_N est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leq R_N(x) \leq x e^{-(N+1)x}$

(puisque $1 + e^{-x} \geq 1$), fonction dont l'intégrale converge d'après la question 12 avec l'entier $N + 1$. On intègre l'égalité sur $[0, A]$ puis on fait tendre A vers $+\infty$: par linéarité, sur une somme finie d'intégrales convergentes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} dx + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) dx.$$

Il reste à multiplier par 4 et à utiliser la question 11.

Conclusion

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$V(X) = 4 \left(\sum_{n=1}^N \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} dx \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right).$$

14. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On a $x \geq 0$, $e^{-(N+1)x} > 0$ et $1 + e^{-x} \geq 1$, donc $R_N(x) \geq 0$ et

$$|R_N(x)| = R_N(x) = \frac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}} \leq xe^{-(N+1)x}.$$

Conclusion

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_N(x)| \leq xe^{-(N+1)x}.$$

(b) Les intégrales $\int_0^{+\infty} R_N(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} xe^{-(N+1)x} dx$ convergent (question 13) ; par croissance de l'intégrale et la question 14(a), puis par la question 12 appliquée à l'entier $N+1$:

$$0 \leq \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \leq \int_0^{+\infty} xe^{-(N+1)x} dx = \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Comme $\frac{1}{(N+1)^2} \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement s'applique.

Conclusion

$$\int_0^{+\infty} R_N(x) \, dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

15. D'après les questions 13 et 12, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$V(X) = 4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + 4(-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) \, dx.$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, la somme partielle tend vers $\frac{\pi^2}{12}$ (résultat admis après la question 7),
et $\left| (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{(N+1)^2} \rightarrow 0$ (question 14(b)). Le membre de gauche ne dépend pas de N , donc par passage à la limite

$$V(X) = 4 \times \frac{\pi^2}{12}.$$

Conclusion

$$V(X) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Partie 3

16. On applique la loi faible des grands nombres à la suite (X_i^2) .

Vérification des hypothèses : les variables $X_1, X_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes, donc, par le lemme des coalitions, les variables $X_1^2, X_2^2, \dots$ le sont aussi. Elles ont toutes la loi de X^2 . La variable X^2 admet une espérance $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{\pi^2}{3}$ (questions 10(b) et 15) et une variance $V(X^2) = \frac{16\pi^4}{45}$ (résultat admis).

Méthode 1 — Loi faible des grands nombres. Pour une suite de variables mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance, la moyenne empirique converge en probabilité vers μ . Ici la moyenne empirique de $X_1^2, \dots, X_n^2$ est V_n et $\mu = \frac{\pi^2}{3}$.

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par linéarité,

$$E(V_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Par indépendance, la variance de la somme est la somme des variances, donc

$$V(V_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i^2) = \frac{16\pi^4}{45n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq P \left(\left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V(V_n)}{\varepsilon^2} = \frac{16\pi^4}{45n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La méthode 1 applique directement le théorème du cours ; la méthode 2 en refait la preuve et fournit en plus une majoration explicite de la probabilité d'erreur.

Conclusion

V_n converge en probabilité vers $\frac{\pi^2}{3}$.

17. Puisque $\pi = \sqrt{3 \times \frac{\pi^2}{3}}$, on pose $T_n = \sqrt{3V_n}$, bien défini car $V_n \geq 0$.

Méthode 1 — Composition par une fonction continue. La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{3|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $T_n = \varphi(V_n)$ puisque $V_n \geq 0$. D'après le théorème de composition de la convergence en probabilité par une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et la question 16, T_n converge en probabilité vers $\varphi\left(\frac{\pi^2}{3}\right) = \sqrt{\pi^2} = \pi$.

Méthode 2 — Majoration directe. Comme $T_n \geq 0$ et $\pi > 0$, on a $T_n + \pi \geq \pi > 0$ et

$$|T_n - \pi| = \frac{|T_n^2 - \pi^2|}{T_n + \pi} \leq \frac{|3V_n - \pi^2|}{\pi} = \frac{3}{\pi} \left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right|.$$

Pour $\varepsilon > 0$, l'événement $\{|T_n - \pi| \geq \varepsilon\}$ est donc inclus dans $\left\{ \left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \geq \frac{\pi\varepsilon}{3} \right\}$, d'où

$$0 \leq P(|T_n - \pi| \geq \varepsilon) \leq P\left(\left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \geq \frac{\pi\varepsilon}{3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 n'utilise que la définition et montre comment l'erreur sur V_n se transmet à T_n .

Conclusion

$$T_n = \sqrt{3V_n} = \sqrt{\frac{3}{n} (X_1^2 + \dots + X_n^2)} \text{ converge en probabilité vers } \pi.$$

18. On calcule la fonction de répartition de $Y = F^{-1}(U)$.

Comme U prend ses valeurs dans $]0, 1[$, la variable $Y = F^{-1}(U)$ est bien définie, à valeurs réelles. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction F est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, donc sa réciproque l'est aussi, et pour tout $s \in]0, 1[$:

$$F^{-1}(s) \leq t \iff s \leq F(t).$$

(Le sens direct s'obtient en appliquant F croissante, la réciproque en appliquant F^{-1} croissante.) Ainsi $\{Y \leq t\} = \{U \leq F(t)\}$ et, puisque $F(t) \in]0, 1[$ et que U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$,

$$P(Y \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t).$$

La fonction de répartition de Y est donc F , qui est celle de X . Comme la fonction de répartition caractérise la loi, Y et X ont la même loi.

Conclusion

$F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

- 19.** D'après les questions 6 et 18, si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ suit la loi de X : c'est la méthode d'inversion.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def realisation_X():
    u = rd.random()
    while u == 0:
        u = rd.random()
    return np.log(u / (1 - u))
```

La variable u contient une réalisation de la loi uniforme sur $[0, 1[$; la boucle `while` écarte la valeur 0, pour laquelle $\ln(0)$ n'est pas défini. Cet événement est de probabilité nulle pour une loi uniforme, et la valeur retenue suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, ce qui permet d'appliquer la question 18. La fonction renvoie alors $F^{-1}(u)$.

Code exécuté : sur 200 000 réalisations, la moyenne empirique obtenue est voisine de 0 et la variance empirique voisine de 3,28, cohérentes avec $E(X) = 0$ et $V(X) = \frac{\pi^2}{3} \approx 3,29$. Cette observation ne constitue pas une preuve.

20. D'après la question 17,

$$T_n = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

est une estimation de π ; on simule n réalisations indépendantes de X par des appels successifs à `realisation_X`.

Python

```
def estimation_pi(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        x = realisation_X()
        s = s + x**2
    return np.sqrt(3 * s / n)
```

La variable `s` accumule la somme des carrés $X_1^2 + \dots + X_n^2$; la boucle `for` est parcourue n fois (indices 0 à $n - 1$) ; la fonction renvoie $\sqrt{3 \times \frac{s}{n}} = T_n$.

Code exécuté : avec $n = 10^5$, on obtient des valeurs de l'ordre de 3,14 à 3,15, ce qui illustre la convergence établie à la question 17 sans la démontrer.

21. (a) La fonction Φ est la primitive de la densité continue et strictement positive $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$; elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Comme $0,975 \in]0, 1[$, il existe un unique réel z tel que $\Phi(z) = 0,975$.

Enfin, par parité de la densité, $\Phi(0) = \frac{1}{2} < 0,975 = \Phi(z)$, et la stricte croissance de Φ donne $z > 0$.

Conclusion

il existe un (unique) réel $z > 0$ tel que $\Phi(z) = 0,975$.

(b) On applique le théorème limite central à la suite (X_i^2) , puis on calcule la probabilité d'un intervalle symétrique.

Hypothèses : les variables X_i^2 sont mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance $\frac{\pi^2}{3}$ et de variance $\sigma^2 = \frac{16\pi^4}{45} > 0$ (question 16). On a $\sigma = \frac{4\pi^2}{\sqrt{45}} = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{5}}$. La variable centrée réduite associée à V_n est

$$Z_n = \frac{V_n - \frac{\pi^2}{3}}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3\sqrt{5}\sqrt{n}}{4\pi^2} \left(V_n - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left(V_n - \frac{\pi^2}{3} \right).$$

D'après le théorème limite central, Z_n converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite : comme Φ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout réel t , $P(Z_n \leq t) \rightarrow \Phi(t)$.

L'événement étudié est $\{|Z_n| \leq z\}$ et $P(|Z_n| \leq z) = P(Z_n \leq z) - P(Z_n < -z)$. On a $P(Z_n \leq z) \rightarrow \Phi(z)$. Montrons que $P(Z_n < -z) \rightarrow \Phi(-z)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de Φ en $-z$, il existe $\eta > 0$ tel que $\Phi(-z - \eta) \geq \Phi(-z) - \varepsilon$. Comme $P(Z_n \leq -z - \eta) \rightarrow \Phi(-z - \eta)$ et $P(Z_n \leq -z) \rightarrow \Phi(-z)$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $P(Z_n \leq -z - \eta) \geq \Phi(-z - \eta) - \varepsilon$ et $P(Z_n \leq -z) \leq \Phi(-z) + \varepsilon$. Par croissance de la probabilité, pour $n \geq n_0$:

$$\Phi(-z) - 2\varepsilon \leq P(Z_n \leq -z - \eta) \leq P(Z_n < -z) \leq P(Z_n \leq -z) \leq \Phi(-z) + \varepsilon.$$

Donc $P(Z_n < -z) \rightarrow \Phi(-z)$. Enfin, par parité de la densité de la loi normale centrée réduite, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. D'où

$$P(|Z_n| \leq z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 2 \times 0,975 - 1 = 0,95.$$

Conclusion

$$P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leq z\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,95.$$

(c) On élargit l'intervalle à l'aide des majorations admises $z \leq 2$ et $\pi \leq 4$.

Définition utilisée : un intervalle $[U_n, W_n]$, dont les bornes sont des variables aléatoires fonctions de $X_1, \dots, X_n$, est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ s'il existe une suite (α_n) de réels de $[0, 1]$, de limite α , telle que, pour tout n , $P(U_n \leq \theta \leq W_n) \geq 1 - \alpha_n$.

Notons $A_n = \{|Z_n| \leq z\} = \left\{\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leq \frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}}\right\}$. Comme $0 < \pi \leq 4$ et $0 < z \leq 2$, on a $4\pi^2 z \leq 4 \times 16 \times 2 = 128$, donc $A_n \subset B_n$ avec

$$B_n = \left\{\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leq \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right\} = \left\{V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}} \leq \frac{\pi^2}{3} \leq V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right\}.$$

Posons $\alpha_n = 1 - P(A_n) \in [0, 1]$. D'après la question 21(b), $\alpha_n \rightarrow 1 - 0,95 = 0,05$, et pour tout n , $P(B_n) \geq P(A_n) = 1 - \alpha_n$.

Conclusion

$\left[V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}, V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95%; ses bornes ne dépendent ni de π ni de z .

(d) On transforme l'événement B_n par la fonction croissante $s \mapsto \sqrt{3s}$, en tenant compte du fait que la borne inférieure peut être négative.

Notons $c_n = \frac{128}{3\sqrt{5n}}$, de sorte que $3c_n = \frac{128}{\sqrt{5n}}$. Comme $\pi > 0$:

$$\frac{\pi^2}{3} \leq V_n + c_n \iff \pi^2 \leq 3V_n + 3c_n \iff \pi \leq \sqrt{3V_n + 3c_n},$$

le radicande étant positif car $V_n \geq 0$. De même, si $3V_n - 3c_n \geq 0$, l'inégalité $\pi^2 \geq 3V_n - 3c_n$ équivaut à $\pi \geq \sqrt{3V_n - 3c_n}$; si $3V_n - 3c_n < 0$, elle est toujours vraie, de même que $\pi \geq 0$. Dans tous les cas,

$$\frac{\pi^2}{3} \geq V_n - c_n \iff \pi \geq \sqrt{\max(3V_n - 3c_n, 0)}.$$

Ainsi $B_n = \{\pi \in J_n\}$ avec $J_n = \left[\sqrt{\max\left(3V_n - \frac{128}{\sqrt{5n}}, 0\right)}, \sqrt{3V_n + \frac{128}{\sqrt{5n}}} \right]$, et la même suite (α_n) qu'en (c) donne $P(\pi \in J_n) = P(B_n) \geq 1 - \alpha_n$ avec $\alpha_n \rightarrow 0,05$.

En notant $T_n = \sqrt{3V_n}$ l'estimateur de la question 17, on peut aussi écrire

$$J_n = \left[\sqrt{\max\left(T_n^2 - \frac{128}{\sqrt{5n}}, 0\right)}, \sqrt{T_n^2 + \frac{128}{\sqrt{5n}}} \right].$$

Conclusion

$J_n = \left[\sqrt{\max\left(3V_n - \frac{128}{\sqrt{5n}}, 0\right)}, \sqrt{3V_n + \frac{128}{\sqrt{5n}}} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de π au niveau de confiance 95%.

22. On confronte la figure 2 aux résultats des questions 17 et 21.

Estimateur : pour les petites valeurs de n , l'estimateur T_n fluctue fortement (environ 2,4 pour $n = 1$, 1,8 pour $n = 3$, près de 3,9 vers $n = 12$), car il repose sur très peu de réalisations; il se rapproche ensuite de la droite d'ordonnée π et en est très proche pour n voisin de 10^4 . Ce comportement illustre, sur une seule trajectoire simulée, la convergence en probabilité de T_n vers π établie à la question 17; il ne la démontre pas.

Intervalle : sur toute la plage représentée, la droite d'ordonnée π reste comprise entre les deux bornes. La largeur de l'intervalle diminue quand n augmente : l'écart entre les carrés des bornes vaut au plus $\frac{256}{\sqrt{5n}}$, qui décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour $n = 1$, la borne

supérieure vaut $\sqrt{T_1^2 + \frac{128}{\sqrt{5}}} \approx \sqrt{2,4^2 + 57,2} \approx 7,9$, ce qui correspond à la valeur

voisine de 8 lue sur la figure. La borne inférieure est nulle tant que $T_n^2 < \frac{128}{\sqrt{5n}}$,

c'est-à-dire ici jusqu'à n voisin de 33 : c'est l'effet du maximum avec 0 dans l'expression de J_n (question 21(d)).

Précision : l'intervalle est large. Pour $n = 10^4$, $\frac{128}{\sqrt{5n}} \approx 0,57$ et l'intervalle va environ de 3,0 à 3,2 : l'estimation n'est précise qu'au dixième près. Cette largeur provient en partie des majorations grossières $z \leq 2$ (au lieu de $z \approx 1,96$) et surtout $\pi^2 \leq 16$ (au lieu de $\pi^2 \approx 9,87$), utilisées pour obtenir des bornes calculables.

Conclusion

la figure est cohérente avec la convergence de T_n vers π et avec l'intervalle de confiance construit, qui contient π sur toute la simulation mais reste assez large, la convergence étant lente (de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

23. On compare les proportions observées au niveau 0,95 visé.

Observation : pour toutes les valeurs de n représentées, la proportion d'intervalles contenant π reste comprise entre environ 0,97 et 1, toujours au-dessus de la limite 0,95, y compris pour de petites valeurs de n pour lesquelles la question 21 ne fournit aucune garantie, le résultat étant seulement asymptotique.

Interprétation : l'intervalle est conservatif. En effet, l'événement B_n s'écrit

$$\left\{ |Z_n| \leq \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \times \frac{128}{3\sqrt{5n}} \right\} = \left\{ |Z_n| \leq \frac{32}{\pi^2} \right\}, \text{ avec } \frac{32}{\pi^2} \approx 3,24 \text{ au lieu de } z \approx 1,96. \text{ Par le}$$

même raisonnement qu'à la question 21(b), $P(B_n) \rightarrow 2\Phi\left(\frac{32}{\pi^2}\right) - 1 \approx 0,999$, valeur nettement supérieure à 0,95. Le niveau réel de l'intervalle est donc supérieur au niveau annoncé, au prix d'une largeur plus grande (question 22).

Enfin, chaque proportion est calculée sur seulement 100 répétitions : elle ne prend que des valeurs multiples de 0,01 et fluctue aléatoirement d'une valeur de n à l'autre, ce qui explique les petites oscillations de la courbe.

Conclusion

la figure 3 confirme expérimentalement que l'intervalle J_n contient π avec une fréquence au moins égale à 95% ; elle montre même que cet intervalle est prudent, son niveau de confiance asymptotique effectif étant proche de 99,9%.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité d'adaptation mathématique au programme : toutes les questions sont conservées telles quelles et traitées avec les outils du programme (le théorème spectral est utilisé comme résultat admis du programme à la question 2(c) de l'exercice 2, et la question 6 de l'exercice 2 est traitée sans aucun critère d'extremum hors programme).

Exercice 2, question 10 (figure 1) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Le point de départ $m_0 = (-1, -1)$, lu sur la figure, a permis de recalculer exactement les points tracés, qui coïncident avec les mesures ; une description des valeurs lues a été ajoutée sous la figure.

Problème, question 22 (figure 2) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées ; une description des valeurs lues a été ajoutée sous la figure.

Problème, question 23 (figure 3) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées ; une description des valeurs lues a été ajoutée sous la figure.

Problème, question 5 : le schéma de la courbe de F demandé est fourni dans le corrigé sous forme de SVG calculé exactement à partir de l'expression de F .