



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2022

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par :

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. (a) En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k , $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .

(b) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x , renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Python

```
def f(n, x):
    t = 1 # t = t_0(x)
    S = 1 # S = f(0, x)
    for k in range(1, n + 1):
        t = t * .....
        S = .....
    return S
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n .

3. (a) Soit x un réel positif.

Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.

(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

4. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$.

(b) Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.

(c) Dédurre des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

5. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq M.$$

(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire que :

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + R_n(x).$$

(b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

(b) En déduire que :

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

(c) Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

(d) En déduire finalement que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.

(b) On suppose que f est diagonalisable.

En étudiant la trace de A , aboutir à une contradiction.

Que peut-on en déduire sur f ?

2. Montrer que $\text{Ker}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ et que $\text{Ker}(f + \text{Id}) \neq \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$.

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}) \oplus \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$.

Pour simplifier les notations, on note dorénavant :

$$F = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}((f + \text{Id})^2).$$

4. Montrer que F et G sont stables par f .

5. On note $P = (X + 1)^2(X - 2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2$ et $\pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4 \text{Id}) \circ (f - 2 \text{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.

7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?

(b) En déduire une inclusion entre $\text{Ker}(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.

8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$.
- (b) En déduire une inclusion entre $\text{Ker}(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$ et que $\text{Ker}(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7a et 8a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F . Identifier π_1 .

On pose maintenant :

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \quad \text{et} \quad h = f - g.$$

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f .
13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Montrer que $h = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2$.

En déduire que $h^2 = 0$.

15. Conclure.

Problème

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a , et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp \left(- \exp \left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right).$$

Partie I

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

(a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.

(b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.

(c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G .

2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

Soit μ un réel et a un réel strictement positif.

Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) .

On admet que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , alors $Z = \frac{X - \mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. (a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

(b) On suppose que la bibliothèque numpy a été importée par l'instruction `import numpy as np`. Écrire une fonction Python d'en-tête `def gumbel(mu, a) :` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X - \mu}{a}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ converge.

(b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = - \int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt.$$

(c) Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

(d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ , μ et a .

On admet que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X , notée σ^2 , est égale à a^2c où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ .

6. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

(a) Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.

(b) Montrer que pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et déterminer sa valeur.

(c) À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt$ converge.

(d) Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

Partie II

Soient μ et a deux réels tels que $a > 0$.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) .

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad C_n = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}.$$

7. Méthode des moments

(a) Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires V et W , alors pour tous réels α et β , la suite de variables aléatoires $(\alpha V_n + \beta W_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.

(b) Montrer que les variables aléatoires M_n et C_n convergent en probabilité respectivement vers $E(X_1)$ et $E((X_1)^2)$.

(c) Montrer que $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de a .

(d) Montrer alors que $S_n = M_n - A_n \gamma$ est un estimateur convergent de μ .

8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script Python des valeurs approchées de γ et de c , dans des variables notées `gamma` et `c`, et que la bibliothèque `numpy` a été importée par l'instruction `import numpy as np`.

(a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def estimateur_a(X)` : renvoyant la valeur de l'estimateur A_n étudié précédemment, lorsque `X` est un tableau `numpy` à une dimension, de longueur n , dont les coefficients sont des réalisations de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

(b) On a tracé sur la figure 1 l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur A_n , pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$.

Commenter ce graphique.

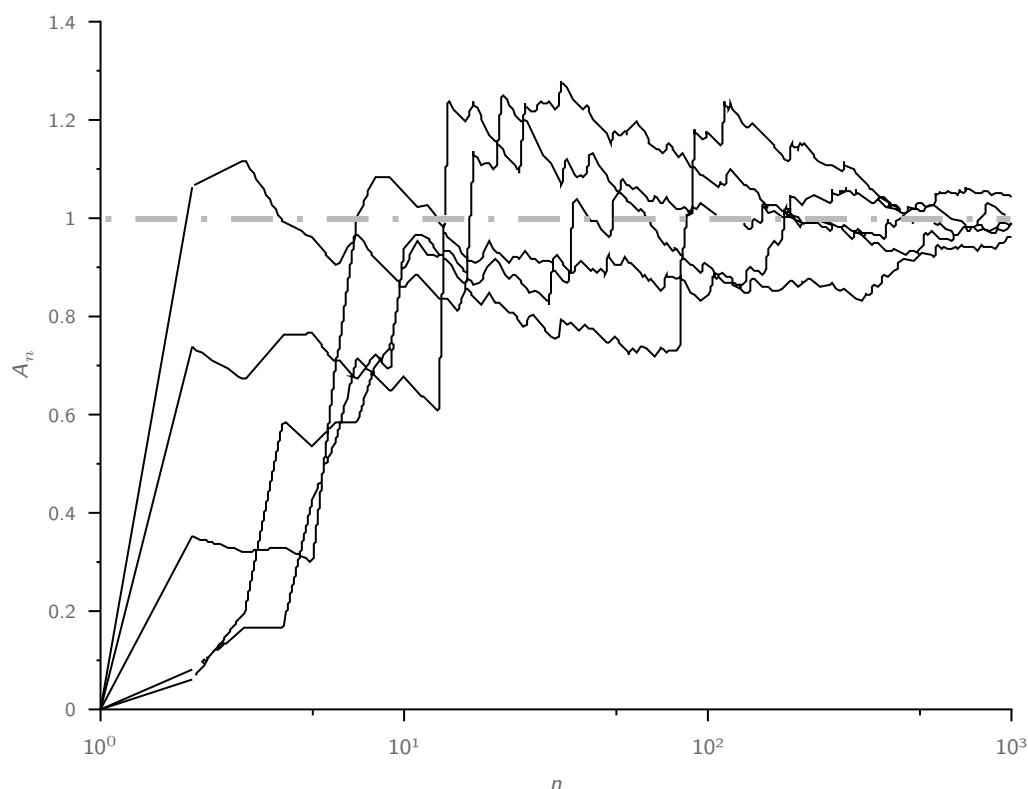


Figure 1 – Évolutions de A_n pour $\mu = 2$ et $a = 1$

Sur la figure 1, l'axe des abscisses porte n en échelle logarithmique, de $10^0 = 1$ à $10^3 = 1000$; l'axe des ordonnées porte A_n , de 0 à 1,4. La ligne grise en tirets et points est la droite d'équation $A_n = 1$. Les cinq trajectoires partent toutes de la valeur 0 pour $n = 1$; pour $n = 2$ elles valent environ 1,06, 0,74, 0,35, 0,08 et 0,06. Pour $n \geq 100$, toutes les valeurs lues sont comprises entre environ 0,83 et 1,24, et pour $n \geq 500$ entre environ 0,92 et 1,06; pour $n = 1000$, les cinq valeurs sont comprises entre environ 0,96 et 1,05.