



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2022

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

1. (a)

Il s'agit d'exprimer $t_k(x)$ à l'aide de $t_{k-1}(x)$; on utilise simplement $x^k = x \cdot x^{k-1}$ et $k! = k \times (k-1)!$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$t_k(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x \cdot x^{k-1}}{k \times (k-1)!} = \frac{x}{k} \cdot \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Conclusion

pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t_k(x) = \frac{x}{k} t_{k-1}(x)$.

(b)

Code adapté en Python.

On calcule

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n t_k(x)$$

en mettant à jour simultanément le terme courant $t_k(x)$ grâce à la question 1(a), et la somme partielle grâce à la relation $f_k(x) = f_{k-1}(x) + t_k(x)$.

Python

```
def f(n, x):
    t = 1 # t = t_0(x)
    S = 1 # S = f(0, x)
    for k in range(1, n + 1):
```

```
t = t * x / k    # t contient maintenant t_k(x)
S = S + t        # S contient maintenant f(k, x)
return S
```

Explication. Avant le premier passage dans la boucle, t vaut $t_0(x) = 1$ et S vaut $f_0(x) = 1$. L'instruction `range(1, n + 1)` fait parcourir à k les entiers $1, 2, \dots, n$ (la borne $n + 1$ est exclue). Si, au début du passage d'indice k , t contient $t_{k-1}(x)$ et S contient $f_{k-1}(x)$, alors après la mise à jour t contient $\frac{x}{k}t_{k-1}(x) = t_k(x)$ (question 1(a)) et S contient $f_{k-1}(x) + t_k(x) = f_k(x)$. Par récurrence, à la sortie de la boucle, S contient $f_n(x)$. Pour $n = 0$, la boucle n'est pas parcourue et la fonction renvoie $1 = f_0(x)$.

Ce code a été exécuté : par exemple $f(10, 1.0)$ renvoie $2,71828180 \dots$, valeur proche de $e \approx 2,71828183$, ce qui est cohérent avec la question 3(a) (simple vérification numérique, non une preuve).

Conclusion

les blancs se complètent par $t = t * x / k$ et $S = S + t$.

2.

Il faut montrer l'existence et l'unicité d'une solution positive de $f_n(x) = a$; on applique le théorème de la bijection à f_n sur $[0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = f_{n-1}(x).$$

Pour $x \geq 0$, tous les termes de $f_{n-1}(x)$ sont positifs et le premier vaut 1, donc $f'_n(x) = f_{n-1}(x) \geq 1 > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus $f_n(0) = 1$ et, pour $x \geq 0$, puisque $n \geq 1$ et que tous les termes sont positifs, $f_n(x) \geq 1 + x$. Comme $1 + x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f_n , continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[f_n(0), +\infty[= [1, +\infty[$. Comme $a > 1$, a appartient à cet intervalle et possède donc un unique antécédent $u_n \in [0, +\infty[$.

De plus $f_n(0) = 1 \neq a$, donc $u_n \neq 0$: on a $u_n > 0$ (ce point servira plusieurs fois).

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}_+$, et $u_n > 0$.

3. (a)

On étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, puis on reconnaît une somme partielle de la série exponentielle.

Soit $x \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

La suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est donc croissante.

Par ailleurs,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

est la somme partielle d'indice n de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^k}{k!},$$

qui converge pour tout réel x et a pour somme e^x .

Conclusion

$(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$.

(b)

On compare $f_{n+1}(u_n)$ à $a = f_{n+1}(u_{n+1})$ et on utilise la stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \geq 1$. Comme $u_n > 0$:

$$f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} > a = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Si l'on avait $u_n \leq u_{n+1}$, la croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}_+$ (question 2), avec $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, donnerait $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1}) = a$, ce qui est faux. Donc $u_{n+1} < u_n$.

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

(c)

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante (question 3(b)) et minorée par 0 (question 2). D'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion

$(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

4. (a)

On utilise que, pour $x \geq 0$, $f_n(x)$ est majoré par sa limite e^x .

Soit $x \geq 0$. La suite $(f_m(x))_{m \geq 1}$ est croissante et converge vers e^x (question 3(a)); une suite croissante convergente est majorée par sa limite, donc $f_m(x) \leq e^x$ pour tout $m \geq 1$.

Soit $n \geq 1$. En appliquant ceci à $x = u_n \geq 0$ et $m = n$:

$$a = f_n(u_n) \leq e^{u_n}.$$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $a > 0$, donc $\ln(a) \leq u_n$.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$.

(b)

On applique la croissance de f_n entre K et u_n , puis on passe à la limite en n .

Soit $K \geq 0$ tel que $K \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leq K \leq u_n$, donc :

$$f_n(K) \leq f_n(u_n) = a.$$

D'après la question 3(a) appliquée à $x = K \geq 0$, $f_n(K) \rightarrow e^K$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $e^K \leq a$.

Conclusion

$e^K \leq a$.

(c)

On montre que la limite ℓ de (u_n) est un minorant positif de la suite, ce qui permet d'appliquer 4(b), puis on encadre ℓ .

Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (question 3(c)).

D'une part, en passant à la limite dans l'inégalité de 4(a), $\ell \geq \ln(a)$; comme $a > 1$, $\ln(a) > 0$, donc $\ell > 0$.

D'autre part, ℓ minore la suite : pour $n \geq 1$ fixé et tout $m \geq n$, la décroissance donne $u_m \leq u_n$, et en faisant tendre m vers $+\infty$, $\ell \leq u_n$.

Ainsi ℓ est un réel positif minorant $(u_n)_{n \geq 1}$. La question 4(b) donne $e^\ell \leq a$, c'est-à-dire $\ell \leq \ln(a)$.

Conclusion

$$\ell = \ln(a), \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a).$$

5. (a)

D'après les questions 3(b) et 4(a), pour tout $n \geq 1$:

$$0 < \ln(a) \leq u_n \leq u_1.$$

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée ; on peut par exemple prendre $M = u_1 > 0$, qui vérifie $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (On peut aussi dire qu'une suite convergente est bornée.)

(b)

On majore l'intégrande sur le segment $[0, u_n]$ puis on intègre, en utilisant la positivité et la croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant car $u_n > 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, u_n]$, on a $(u_n - t)^n \geq 0$ et, par croissance de l'exponentielle, $0 < e^t \leq e^{u_n} \leq e^M$ car $u_n \leq |u_n| \leq M$. Donc :

$$0 \leq e^t \frac{(u_n - t)^n}{n!} \leq e^M \frac{(u_n - t)^n}{n!}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale sur le segment $[0, u_n]$:

$$0 \leq R_n(u_n) \leq e^M \int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} dt = e^M \left[-\frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^{u_n} = e^M \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin $0 < u_n \leq M$ donne $u_n^{n+1} \leq M^{n+1}$.

Remarquons aussi que l'intégrande est continu, positif et strictement positif sur $[0, u_n[$, donc $R_n(u_n) > 0$ (ce point sert en 6(b) et 7(d)).

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad |R_n(u_n)| = R_n(u_n) \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c)

Il faut montrer que $n^2 R_n(u_n) \rightarrow 0$; on encadre cette quantité et on utilise les croissances comparées.

Pour $n \geq 2$, posons $v_n = \frac{n^2 M^{n+1}}{(n+1)!}$. Comme $(n+1)! = (n+1)n(n-1)(n-2)!$:

$$v_n = M^3 \cdot \frac{n}{(n+1)(n-1)} \cdot \frac{M^{n-2}}{(n-2)!}.$$

On a $\frac{n}{(n+1)(n-1)} \rightarrow 0$ (ce quotient est équivalent à $\frac{1}{n}$) et, par croissances comparées, $\frac{M^k}{k!} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, donc $\frac{M^{n-2}}{(n-2)!} \rightarrow 0$. Ainsi $v_n \rightarrow 0$.

D'après 5(b), pour $n \geq 2$:

$$0 \leq n^2 R_n(u_n) \leq e^M v_n.$$

Par encadrement, $n^2 R_n(u_n) \rightarrow 0$.

Conclusion

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. (a)

Il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral pour l'exponentielle. Deux méthodes classiques sont possibles : appliquer directement la formule du cours, ou la redémontrer par récurrence à l'aide d'intégrations par parties (ce qui prépare la question 7(a)).

Méthode 1 — Formule de Taylor avec reste intégral.

La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout k , d'où $\exp^{(k)}(0) = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x , valable pour une fonction de classe C^{n+1} , donne :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

C'est exactement $e^x = f_n(x) + R_n(x)$.

Méthode 2 — Récurrence et intégration par parties.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n) : e^x = f_n(x) + R_n(x)$.

Initialisation : $R_0(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$ et $f_0(x) = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On intègre $R_n(x)$ par parties sur le segment d'extrémités 0 et x , avec $u(t) = e^t$ et $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, fonctions de classe C^1

vérifiant $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$:

$$R_n(x) = \left[u(t)v(t) \right]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t) dt = 0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x).$$

Ainsi

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) + R_{n+1}(x),$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

La première méthode est immédiate dès que la formule de Taylor avec reste intégral est connue ; la seconde n'utilise que l'intégration par parties et met en évidence la relation

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x), \text{ utile pour estimer finement un reste.}$$

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $e^x = f_n(x) + R_n(x)$.

(b)

On écrit $e^{u_n} = a + R_n(u_n)$, on prend le logarithme et on contrôle $\ln \left(1 + \frac{R_n(u_n)}{a} \right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 6(a) avec $x = u_n$ et $f_n(u_n) = a$:

$$e^{u_n} = a + R_n(u_n), \quad \text{donc} \quad u_n = \ln(a + R_n(u_n)) = \ln(a) + \ln(1 + y_n), \quad \text{où } y_n = \frac{R_n(u_n)}{a} > 0.$$

Il s'agit donc de montrer que $n^2 \ln(1 + y_n) \rightarrow 0$.

Méthode 1 — Inégalité de concavité.

Pour tout $y > -1$, $\ln(1+y) \leq y$: en effet, la fonction $\varphi : y \mapsto y - \ln(1+y)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ avec $\varphi'(y) = \frac{y}{1+y}$, négative sur $] -1, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$, donc φ admet un minimum en 0 égal à $\varphi(0) = 0$. Comme de plus $y_n > 0$, on a $\ln(1+y_n) > 0$.
Donc :

$$0 \leq u_n - \ln(a) \leq \frac{R_n(u_n)}{a}, \quad \text{puis} \quad 0 \leq n^2(u_n - \ln(a)) \leq \frac{n^2 R_n(u_n)}{a}.$$

Le majorant tend vers 0 d'après 5(c) ; par encadrement, $n^2(u_n - \ln(a)) \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Équivalent usuel.

D'après 5(c), $R_n(u_n) \rightarrow 0$, donc $y_n \rightarrow 0$ avec $y_n \neq 0$. L'équivalent usuel $\ln(1+y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$ donne $\ln(1+y_n) \sim y_n$, puis, par produit d'équivalents :

$$n^2(u_n - \ln(a)) = n^2 \ln(1+y_n) \sim n^2 y_n = \frac{n^2 R_n(u_n)}{a}.$$

Le dernier terme tend vers 0 (question 5(c)) ; deux suites équivalentes ont la même limite, donc $n^2(u_n - \ln(a)) \rightarrow 0$.

La première méthode fournit en plus une majoration explicite de l'erreur ; la seconde est plus rapide et repose sur les équivalents usuels.

Conclusion

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. (a)

On applique la question 6(a) au rang $n + 1$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après 6(a) au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} e^x &= f_{n+1}(x) + R_{n+1}(x), \quad \text{avec} \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{et} \quad R_{n+1}(x) \\ &= \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt. \end{aligned}$$

Conclusion

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

(b)

On applique 7(a) en $x = u_n$ et on montre que le reste $R_{n+1}(u_n)$ est négligeable devant

$$w_n = \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $w_n = \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} > 0$. D'après 7(a) avec $x = u_n$:

$$e^{u_n} = a + w_n + R_{n+1}(u_n).$$

Comme en 5(b), pour $t \in [0, u_n]$, $0 \leq e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{u_n} \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où :

$$0 \leq R_{n+1}(u_n) \leq e^{u_n} \int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = e^{u_n} \frac{u_n^{n+2}}{(n+2)!}.$$

En divisant par $w_n > 0$:

$$0 \leq \frac{R_{n+1}(u_n)}{w_n} \leq e^{u_n} u_n \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{e^{u_n} u_n}{n+2} \leq \frac{e^M M}{n+2}.$$

Le majorant tend vers 0, donc $\frac{R_{n+1}(u_n)}{w_n} \rightarrow 0$, c'est-à-dire $R_{n+1}(u_n) = o(w_n)$.

Conclusion

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

(c)

Attention : on ne peut pas élever l'équivalence $u_n \sim \ln(a)$ à la puissance $n+1$, car l'exposant dépend de n . On étudie donc directement le quotient, en passant par le logarithme.

Comme $\ln(a) > 0$, posons $q_n = \frac{u_n}{\ln(a)} \geq 1$ (question 4(a)) et

$\varepsilon_n = q_n - 1 = \frac{u_n - \ln(a)}{\ln(a)} \geq 0$. On a :

$$\frac{u_n^{n+1}/(n+1)!}{(\ln(a))^{n+1}/(n+1)!} = q_n^{n+1} = \exp((n+1) \ln(1 + \varepsilon_n)).$$

D'après l'inégalité $\ln(1+y) \leq y$ (établie en 6(b)) et $\varepsilon_n \geq 0$:

$$0 \leq (n+1) \ln(1 + \varepsilon_n) \leq (n+1) \varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \cdot \frac{n^2(u_n - \ln(a))}{\ln(a)}.$$

D'après 6(b), $n^2(u_n - \ln(a)) \rightarrow 0$, et $\frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$; donc le majorant tend vers 0 et, par encadrement, $(n+1) \ln(1 + \varepsilon_n) \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle en 0, $q_n^{n+1} \rightarrow e^0 = 1$.

Ainsi $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ensuite, par croissances comparées, $\frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$; deux suites équivalentes ayant la même limite, $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

(d)

On passe de $e^{u_n} - a$ à $u_n - \ln(a)$ grâce à l'équivalent $\ln(1+y) \sim y$, en vérifiant que la quantité concernée tend vers 0 et ne s'annule pas.

Avec $w_n = \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$, la question 7(b) s'écrit $e^{u_n} - a = w_n + o(w_n)$, donc $\frac{e^{u_n} - a}{w_n} \rightarrow 1$: $e^{u_n} - a \sim w_n$.

Posons $y_n = \frac{e^{u_n} - a}{a} = \frac{R_n(u_n)}{a}$ (question 6(a)). On a $y_n > 0$ (question 5(b)) et $y_n \sim \frac{w_n}{a} \rightarrow 0$ (question 7(c)). Alors :

$$u_n - \ln(a) = \ln\left(\frac{e^{u_n}}{a}\right) = \ln(1 + y_n) \sim y_n,$$

d'après l'équivalent usuel $\ln(1+y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$. Par transitivité des équivalents et produit par la constante $\frac{1}{a}$, en utilisant 7(c) :

$$u_n - \ln(a) \sim y_n \sim \frac{w_n}{a} \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Conclusion

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Exercice 2

1. (a)

Pour montrer que λ est valeur propre de f , on résout le système $(A - \lambda I_3)X = 0$ et on vérifie qu'il admet une solution non nulle ; l'ensemble des solutions donne le sous-espace propre.

Valeur -1 . On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y = 0 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x. \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}((1, 0, 1)) \neq \{0\}$: -1 est valeur propre de f et $E_{-1}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1))$, de dimension 1.

Valeur 2. On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)X = 0 &\iff \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z - 4y \\ -8z + 8y + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}((0, 1, 1)) \neq \{0\}$: 2 est valeur propre de f et

$E_2(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$, de dimension 1.

Conclusion

-1 et 2 sont valeurs propres de f , avec $E_{-1}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1))$ et $E_2(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

(b)

On raisonne par l'absurde : si f était diagonalisable, A serait semblable à une matrice diagonale dont on peut déterminer la trace de deux façons.

Supposons f diagonalisable. Alors la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3. Les sous-espaces propres associés à -1 et 2 sont de dimension 1 chacun, donc f possède au moins une autre valeur propre $\lambda \notin \{-1, 2\}$; chaque sous-espace propre étant de dimension au moins 1 et la somme des dimensions valant 3, il y en a exactement une, et $\dim E_\lambda(f) = 1$.

Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale, de coefficients diagonaux $-1, 2$ et λ (dans un certain ordre) : A est semblable à $D = \text{diag}(-1, 2, \lambda)$. La trace est invariante par similitude, donc :

$$\text{Tr}(A) = 0 + 2 + (-2) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(D) = -1 + 2 + \lambda = 1 + \lambda.$$

On obtient $\lambda = -1$, ce qui contredit $\lambda \notin \{-1, 2\}$.

Conclusion

L'hypothèse est absurde ; f n'est pas diagonalisable.

2.

L'inclusion découle directement de la définition des noyaux ; pour la différence, on calcule $\text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ et on compare les dimensions.

Inclusion. Soit $x \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. Alors

$$(f + \text{Id})^2(x) = (f + \text{Id})((f + \text{Id})(x)) = (f + \text{Id})(0) = 0,$$

donc $x \in \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$.

Différence. La matrice de $(f + \text{Id})^2$ dans la base canonique est :

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient d'indice $(1, 2)$ vaut $1 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times 4 = 0$ et celui d'indice $(3, 2)$ vaut $1 \times 1 + 4 \times 3 + (-1) \times 4 = 9$. Ainsi $(A + I_3)^2 X = 0 \iff 9y = 0 \iff y = 0$, et :

$$\text{Ker}((f + \text{Id})^2) = \{(x, 0, z) ; x, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_1, e_3),$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique. Ce sous-espace est de dimension 2, alors que $\text{Ker}(f + \text{Id})$ est de dimension 1 (question 1(a)). Concrètement, $e_1 \in \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ mais $(f + \text{Id})(e_1) = (1, 0, 1) \neq 0$.

Conclusion

$$\text{Ker}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}((f + \text{Id})^2) \text{ et } \text{Ker}(f + \text{Id}) \neq \text{Ker}((f + \text{Id})^2).$$

3.

On dispose de bases explicites : $F_0 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0, 1, 1)$ et $G_0 = \text{Ker}((f + \text{Id})^2) = \text{Vect}(e_1, e_3)$. Deux méthodes classiques permettent de conclure.

Méthode 1 — Intersection et dimensions.

Soit $x \in F_0 \cap G_0$. Comme $x \in F_0$, $x = \lambda(0, 1, 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$; comme $x \in G_0$, sa deuxième coordonnée est nulle, donc $\lambda = 0$ et $x = 0$. Ainsi $F_0 \cap G_0 = \{0\}$: la somme $F_0 + G_0$ est directe. De plus

$$\dim(F_0 \oplus G_0) = \dim F_0 + \dim G_0 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc $F_0 \oplus G_0 = \mathbb{R}^3$.

Méthode 2 — Concaténation de bases.

Il suffit de montrer que la famille (v_1, e_1, e_3) , obtenue en concaténant une base de F_0 et une base de G_0 , est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $\alpha v_1 + \beta e_1 + \delta e_3 = 0$, alors $(\beta, \alpha, \alpha + \delta) = (0, 0, 0)$, donc $\alpha = \beta = \delta = 0$: la famille est libre, et comme elle compte $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base. La concaténation d'une base de F_0 et d'une base de G_0 étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a $\mathbb{R}^3 = F_0 \oplus G_0$.

La première méthode est la plus rapide lorsqu'on connaît les dimensions ; la seconde fournit en plus une base adaptée à la décomposition, qui resservira à la question 13.

Conclusion

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}((f + \text{Id})^2).$$

4.

Méthode 1 — Commutation.

Si u est un endomorphisme qui commute avec f , alors $\text{Ker}(u)$ est stable par f : pour

$x \in \text{Ker}(u)$, $u(f(x)) = f(u(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \text{Ker}(u)$. Or $f - 2\text{Id}$ et $(f + \text{Id})^2 = f^2 + 2f + \text{Id}$ sont des polynômes en f , donc commutent avec f . Ainsi $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ sont stables par f .

Méthode 2 — Calcul sur les bases.

On a $f(v_1) = 2v_1 \in F$, donc $F = \text{Vect}(v_1)$ est stable par f . Les première et troisième colonnes de A donnent $f(e_1) = (0, 0, 1) = e_3 \in G$ et $f(e_3) = (-1, 0, -2) = -e_1 - 2e_3 \in G$; par linéarité, $f(G) \subset G$.

La première méthode est générale (tout noyau d'un polynôme en f est stable par f); la seconde est une vérification directe.

Conclusion

F et G sont stables par f .

5.

Méthode 1 — Calcul matriciel.

La matrice de $P(f) = (f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id})$ dans la base canonique est $(A + I_3)^2(A - 2I_3)$. D'après la question 2, $(A + I_3)^2$ n'a de coefficients non nuls que dans sa deuxième colonne; donc chaque ligne du produit est un multiple de la deuxième ligne de $A - 2I_3$, qui est nulle :

$$(A + I_3)^2(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Méthode 2 — Utilisation de la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Les polynômes en f commutent entre eux. Soit $x \in \mathbb{R}^3$, que l'on écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ (question 3). Alors :

$$P(f)(x_F) = (f + \text{Id})^2((f - 2\text{Id})(x_F)) = 0 \quad \text{et} \quad P(f)(x_G) = (f - 2\text{Id})((f + \text{Id})^2(x_G)) = 0.$$

Par linéarité, $P(f)(x) = 0$.

La première méthode est un calcul direct ; la seconde explique pourquoi le résultat est vrai et se généralise.

Conclusion

$P(f)$ est l'endomorphisme nul.

6.

Deux polynômes d'un même endomorphisme commutent : si Q et R sont des polynômes, $Q(f) \circ R(f) = (QR)(f) = (RQ)(f) = R(f) \circ Q(f)$. Or $\pi_1 = Q_1(f)$ et $\pi_2 = Q_2(f)$ avec $Q_1 = \frac{1}{9}(X+1)^2$ et $Q_2 = -\frac{1}{9}(X+4)(X-2)$.

Conclusion

$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$.

7. (a)

On calcule le polynôme correspondant et on fait apparaître P .

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (Q_2 Q_1)(f) = -\frac{1}{81}((X+4)(X-2)(X+1)^2)(f) = -\frac{1}{81}(f+4\text{Id}) \circ P(f) = 0,$$

d'après la question 5.

Conclusion

$\pi_2 \circ \pi_1$ est l'endomorphisme nul.

(b)

Soit $y \in \text{Im}(\pi_1)$: il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \pi_1(x)$. Alors $\pi_2(y) = \pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$, donc $y \in \text{Ker}(\pi_2)$.

Conclusion

$\text{Im}(\pi_1) \subset \text{Ker}(\pi_2)$.

8. (a)

On calcule le polynôme $Q_1 + Q_2$:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{1}{9} \left((X+1)^2 - (X+4)(X-2) \right) = \frac{1}{9} \left(X^2 + 2X + 1 - X^2 - 2X + 8 \right) = \frac{9}{9} = 1.$$

Donc $\pi_1 + \pi_2 = (Q_1 + Q_2)(f) = \text{Id}$.

Conclusion

$\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$.

(b)

Soit $x \in \text{Ker}(\pi_2)$. D'après 8(a), $x = \pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_1(x)$, donc $x \in \text{Im}(\pi_1)$.

Conclusion

$$\text{Ker}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1).$$

9.

Les questions 7(b) et 8(b) donnent la double inclusion, donc $\text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$.

Pour la seconde égalité, on raisonne de même en échangeant les rôles. D'après les questions 6 et 7(a), $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$, donc pour tout x , $\pi_1(\pi_2(x)) = 0$:

$\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Ker}(\pi_1)$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(\pi_1)$, alors

$$x = \pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_2(x) \in \text{Im}(\pi_2).$$

Conclusion

$$\text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1) \text{ et } \text{Ker}(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2).$$

10.

On utilise la caractérisation des projecteurs : un endomorphisme p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

En composant l'égalité de 8(a) à gauche par π_1 et en utilisant $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$ (questions 6 et 7(a)) :

$$\pi_1 = \pi_1 \circ (\pi_1 + \pi_2) = \pi_1 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1 \circ \pi_1.$$

$$\text{De même, } \pi_2 = \pi_2 \circ (\pi_1 + \pi_2) = \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_2.$$

Conclusion

π_1 et π_2 sont des projecteurs.

11.

Méthode 1 — Calcul direct sur F et G .

Soit $x \in G$: $\pi_1(x) = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2(x) = 0$, donc $\pi_2(x) = x - \pi_1(x) = x$ (question 8(a)).

Soit $x \in F$:

$$\pi_2(x) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id})((f - 2\text{Id})(x)) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id})(0) = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (question 3), pour $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on a par linéarité $\pi_2(x) = x_G$: c'est la définition du projecteur sur G parallèlement à F .

Méthode 2 — Noyau et image.

Comme π_2 est un projecteur (question 10), c'est le projecteur sur $\text{Im}(\pi_2)$ parallèlement à $\text{Ker}(\pi_2)$, et $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(\pi_2) \oplus \text{Ker}(\pi_2)$. D'après la question 9, $\text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) = \text{Ker}\left(\frac{1}{9}(f + \text{Id})^2\right) = G$. Ensuite $F \subset \text{Ker}(\pi_2)$ (calcul de la méthode 1), et $\dim \text{Ker}(\pi_2) = 3 - \dim \text{Im}(\pi_2) = 3 - 2 = 1 = \dim F$, donc $\text{Ker}(\pi_2) = F$.

La première méthode utilise la définition d'un projecteur associé à une somme directe ; la seconde exploite les questions 9 et 10 et un argument de dimension.

Identification de π_1 . Pour $x = x_F + x_G$, $\pi_1(x) = x - \pi_2(x) = x_F$. Donc $\pi_1 = \text{Id} - \pi_2$ est le projecteur sur F parallèlement à G .

À titre de vérification, les matrices dans la base canonique sont

$$\frac{1}{9}(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour π_1 (qui envoie (x, y, z) sur $y(0, 1, 1)$) et

$$I_3 - \frac{1}{9}(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour π_2 .

Conclusion

π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F , et π_1 est le projecteur sur F parallèlement à G .

12.

Comme $\pi_1 = Q_1(f)$ et $\pi_2 = Q_2(f)$, on a $g = (2Q_1 - Q_2)(f)$ et $h = (X - 2Q_1 + Q_2)(f)$, ce qui suffit. Explicitons ces polynômes :

$$\begin{aligned} 2Q_1 - Q_2 &= \frac{2}{9}(X+1)^2 + \frac{1}{9}(X+4)(X-2) = \frac{1}{9}(2X^2 + 4X + 2 + X^2 + 2X - 8) \\ &= \frac{1}{3}(X^2 + 2X - 2), \end{aligned}$$

$$X - \frac{1}{3}(X^2 + 2X - 2) = -\frac{1}{3}(X^2 - X - 2) = -\frac{1}{3}(X-2)(X+1).$$

Ainsi $g = \frac{1}{3}(f^2 + 2f - 2\text{Id})$ et $h = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})$. Les matrices

correspondantes dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ pour g et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

pour h .

Conclusion

g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f .

13.

On se place dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, sur laquelle les projecteurs π_1 et π_2 agissent simplement.

D'après la question 3 (méthode 2), $\mathcal{B}' = (v_1, e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec $v_1 = (0, 1, 1) \in F$ et $e_1, e_3 \in G$. D'après la question 11 :

$$\pi_1(v_1) = v_1, \pi_2(v_1) = 0 \quad \text{et, pour } x \in \{e_1, e_3\}, \quad \pi_1(x) = 0, \pi_2(x) = x.$$

Donc $g(v_1) = 2v_1 - 0 = 2v_1$, $g(e_1) = 0 - e_1 = -e_1$ et $g(e_3) = -e_3$.

Conclusion

la matrice de g dans la base $\mathcal{B}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; en particulier g est diagonalisable.

14.

Égalité. En utilisant $\text{Id} = \pi_1 + \pi_2$:

$$\begin{aligned} h &= f - g = f \circ (\pi_1 + \pi_2) - 2\pi_1 + \pi_2 = (f \circ \pi_1 - 2\pi_1) + (f \circ \pi_2 + \pi_2) = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 \\ &\quad + (f + \text{Id}) \circ \pi_2. \end{aligned}$$

Calcul de h^2 . Tous les endomorphismes qui interviennent sont des polynômes en f , donc commutent deux à deux.

Méthode 1 — Développement.

Posons $u = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1$ et $v = (f + \text{Id}) \circ \pi_2$, qui commutent ; on a $h^2 = (u + v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2$. En utilisant $\pi_1^2 = \pi_1$, $\pi_2^2 = \pi_2$ et $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$:

$$\begin{aligned} u^2 &= (f - 2\text{Id})^2 \circ \pi_1, & u \circ v &= (f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) \circ \pi_1 \circ \pi_2 = 0, & v^2 &= (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 5 :

$$(f - 2\text{Id})^2 \circ \pi_1 = \frac{1}{9}(f - 2\text{Id}) \circ \left((f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) \right) = \frac{1}{9}(f - 2\text{Id}) \circ P(f) = 0,$$

$$(f + \text{Id})^2 \circ \pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ \left((f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) \right) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ P(f) = 0.$$

Donc $h^2 = 0$.

Méthode 2 — Interprétation géométrique.

L'image de π_1 est $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ (question 11), donc $(f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 = 0$ et $h = (f + \text{Id}) \circ \pi_2$. Par commutation et $\pi_2^2 = \pi_2$:

$$h^2 = (f + \text{Id}) \circ \pi_2 \circ (f + \text{Id}) \circ \pi_2 = (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2.$$

L'image de π_2 est $G = \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$, donc $(f + \text{Id})^2 \circ \pi_2 = 0$, d'où $h^2 = 0$.

La première méthode est purement algébrique (elle n'utilise que $P(f) = 0$ et les relations entre π_1 et π_2) ; la seconde utilise l'interprétation de π_1 et π_2 comme projecteurs et montre que h n'agit que sur G . On peut aussi le vérifier avec l'expression de la question 12 : $h^2 = \frac{1}{9}(f - 2\text{Id}) \circ P(f) = 0$.

Conclusion

$$h = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2 \text{ et } h^2 = 0.$$

15.

On a $f = g + h$ par définition de h , avec :

g diagonalisable (question 13) ;

h nilpotent, puisque $h^2 = 0$ (question 14) ;

$g \circ h = h \circ g$, car g et h sont des polynômes en f (questions 12 et 6).

De plus $h \neq 0$: sinon $f = g$ serait diagonalisable, ce qui contredit la question 1(b).

Conclusion

f est la somme de l'endomorphisme diagonalisable g et de l'endomorphisme nilpotent non nul h (avec $h^2 = 0$), qui commutent ; c'est l'objectif annoncé.

Problème

Partie I

1. (a)

La fonction est une composée de fonctions usuelles de classe C^∞ ; on dérive en posant une fonction auxiliaire.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right) > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{\mu - x}{a}$ est affine, donc de classe C^∞ , et $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; par composition, E puis $F_{\mu,a} = \exp \circ (-E)$

sont de classe C^∞ , donc a fortiori de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On a $E'(x) = -\frac{1}{a}E(x)$.

Dérivée : $F'_{\mu,a}(x) = -E'(x) e^{-E(x)} = \frac{1}{a}E(x) e^{-E(x)}$, soit :

$$f_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).$$

Dérivée seconde : en dérivant le produit $E e^{-E}$,

$$\begin{aligned} f'_{\mu,a}(x) &= \frac{1}{a} \left(E'(x) e^{-E(x)} - E(x) E'(x) e^{-E(x)} \right) = \frac{1}{a} E'(x) e^{-E(x)} (1 - E(x)) \\ &= \frac{1}{a^2} E(x) e^{-E(x)} (E(x) - 1). \end{aligned}$$

Conclusion

$F_{\mu,a}$ est de classe C^2 , $f_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a}E(x)e^{-E(x)}$ et $f'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a^2}E(x)e^{-E(x)}(E(x)-1)$, où $E(x) = \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)$.

(b)

Variations. Pour tout réel x , $f_{\mu,a}(x) > 0$ (produit de termes strictement positifs) : $F_{\mu,a}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

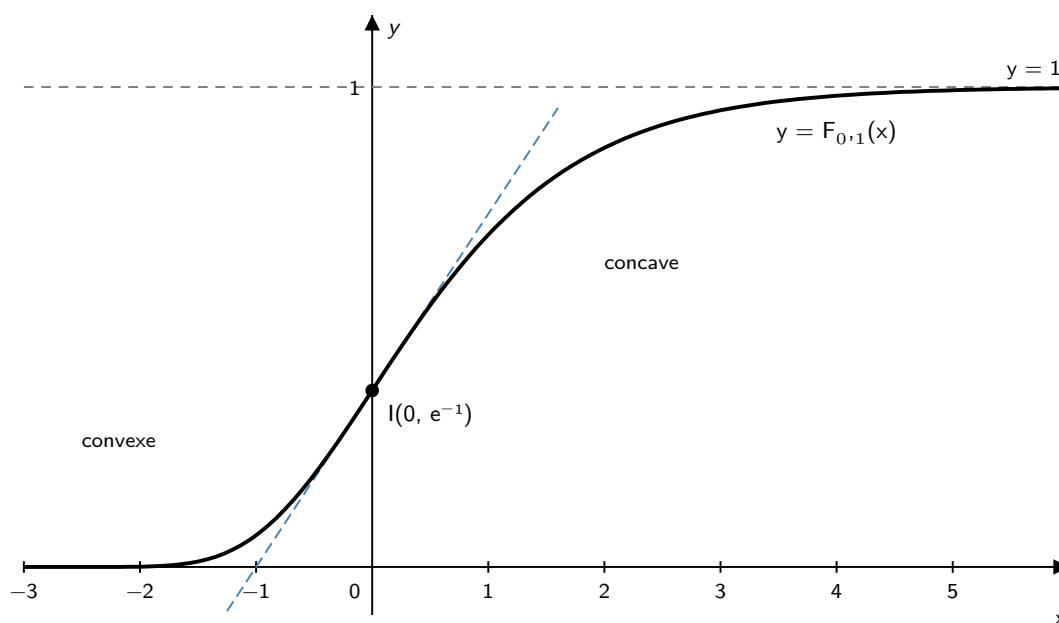
Convexité. Le signe de $f'_{\mu,a}(x)$ est celui de $E(x) - 1$. Comme $\exp$ est strictement croissante et $a > 0$:

$$E(x) \geq 1 \iff \frac{\mu-x}{a} \geq 0 \iff x \leq \mu.$$

Donc $F''_{\mu,a} \geq 0$ sur $] -\infty, \mu]$ et $F''_{\mu,a} \leq 0$ sur $[\mu, +\infty[$: $F_{\mu,a}$ est convexe sur $] -\infty, \mu]$ et concave sur $[\mu, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en μ : le point $I_{\mu,a} = (\mu, F_{\mu,a}(\mu)) = (\mu, e^{-1})$ est un point d'inflexion, où la tangente a pour pente $f_{\mu,a}(\mu) = \frac{1}{ae}$.

Limites. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\mu - x}{a} \rightarrow -\infty$, donc $E(x) \rightarrow 0$ et $F_{\mu,a}(x) \rightarrow e^0 = 1$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $E(x) \rightarrow +\infty$, donc $-E(x) \rightarrow -\infty$ et $F_{\mu,a}(x) \rightarrow 0$. La courbe admet donc les asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

Allure. Comme $F_{\mu,a}(x) = F_{0,1}\left(\frac{x - \mu}{a}\right)$, toutes les courbes se déduisent de celle de $F_{0,1}$ par une transformation affine de l'abscisse; voici celle de $F_{0,1}$, avec son point d'inflexion $I(0, e^{-1})$ et sa tangente de pente e^{-1} .



Conclusion

$F_{\mu,a}$ est strictement croissante, convexe sur $] -\infty, \mu]$, concave sur $[\mu, +\infty[$, avec un point d'inflexion en (μ, e^{-1}) , $\lim_{-\infty} F_{\mu,a} = 0$ et $\lim_{+\infty} F_{\mu,a} = 1$.

(c)

$F_{\mu,a}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $\left] \lim_{-\infty} F_{\mu,a}, \lim_{+\infty} F_{\mu,a} \right[=]0, 1[$.

Réciproque de $F_{0,1}$. Soient $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $\ln y < 0$, on a $-\ln y > 0$ et :

$$F_{0,1}(x) = y \iff -e^{-x} = \ln y \iff e^{-x} = -\ln y \iff -x = \ln(-\ln y) \iff x = -\ln(-\ln y).$$

Conclusion

$$I =]0, 1[\text{ et } G :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, G(y) = -\ln(-\ln(y)).$$

2.

On vérifie les conditions d'une densité (positivité, continuité, intégrale égale à 1), puis

on calcule $\int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) dt$ à l'aide de la primitive $F_{\mu,a}$.

La fonction $f_{\mu,a}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A < x$, $F_{\mu,a}$ étant une primitive de $f_{\mu,a}$:

$$\int_A^x f_{\mu,a}(t) dt = F_{\mu,a}(x) - F_{\mu,a}(A) \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} F_{\mu,a}(x) - 0 = F_{\mu,a}(x).$$

Donc $\int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) dt$ converge et vaut $F_{\mu,a}(x)$. En faisant ensuite tendre x vers $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt \text{ converge et vaut } \lim_{+\infty} F_{\mu,a} = 1.$$

Conclusion

$$f_{\mu,a} \text{ est une densité de probabilité, et la fonction de répartition associée est } x \mapsto \int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) dt = F_{\mu,a}(x).$$

3.

Méthode 1 — Fonction de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(aZ + \mu \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{a}\right) = F_{0,1}\left(\frac{x - \mu}{a}\right) \\ &= \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{a}\right)\right) = F_{\mu,a}(x). \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donc $F_{\mu,a}$, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: X est une variable à densité, de densité $F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$.

Méthode 2 — Transformation affine d'une variable à densité.

Z admet la densité $f_{0,1}$ et $a \neq 0$; d'après le résultat du cours sur les transformations affines, $X = aZ + \mu$ est à densité, de densité $x \mapsto \frac{1}{|a|} f_{0,1}\left(\frac{x - \mu}{a}\right)$. Or, pour tout réel x :

$$\frac{1}{a} f_{0,1}\left(\frac{x - \mu}{a}\right) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right) = f_{\mu,a}(x).$$

La première méthode repart de la définition et identifie la fonction de répartition ; la seconde applique directement la formule du cours pour les densités.

Conclusion

$X = aZ + \mu$ est une variable à densité et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$.

4. (a)

On calcule la fonction de répartition de Y en résolvant l'inéquation $Y \leq y$ par des fonctions strictement monotones.

La variable U prend ses valeurs dans $]0, 1[$, donc $-\ln(U) > 0$ et $Y = -\ln(-\ln(U))$ est bien définie ; on remarque que $Y = G(U)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $\exp$ et $\ln$ sont strictement croissantes :

$$[Y \leq y] = [\ln(-\ln U) \geq -y] = [-\ln U \geq e^{-y}] = [\ln U \leq -e^{-y}] = [U \leq \exp(-e^{-y})].$$

Comme $\exp(-e^{-y}) \in]0, 1[$ et que la fonction de répartition de U vaut $s \mapsto s$ sur $[0, 1]$:

$$P(Y \leq y) = \exp(-e^{-y}) = F_{0,1}(y).$$

Y a donc la même fonction de répartition que la loi de densité $f_{0,1}$ (question 2) ; la fonction de répartition caractérisant la loi, Y suit cette loi.

Conclusion

$Y = -\ln(-\ln(U)) \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$; c'est la méthode de simulation par inversion, puisque $Y = G(U)$ où $G = F_{0,1}^{-1}$.

(b)

Code adapté en Python.

On simule U de loi uniforme, on en déduit $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$ par la question 4(a), puis $aY + \mu \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$ par la question 3.

Python

```
import numpy as np

def gumbel(mu, a):
    U = np.random.random()          # réalisation de la loi uniforme sur [0,1[
    while U == 0:                    # cas de probabilité nulle, exclu par précaution
        U = np.random.random()
    Y = -np.log(-np.log(U))          # réalisation de la loi de Gumbel (0,1), question 4(a)
    return a * Y + mu                # réalisation de la loi de Gumbel (mu,a), question 3
```

La commande `np.random.random()` renvoie un réel de $[0, 1[$; la valeur 0, pour laquelle $\ln(0)$ n'est pas défini, est d'une probabilité négligeable et est écartée par la boucle `while`. Ce code a été exécuté : sur 100 000 réalisations avec $\mu = 2$ et $a = 1$, on a obtenu une moyenne empirique d'environ 2,574 et une variance empirique d'environ 1,646, cohérentes avec $E(X) = \mu + a\gamma \approx 2,577$ (question 5(d)) et $V(X) = a^2c \approx 1,645$ (cette simulation illustre les résultats, elle ne les démontre pas).

Conclusion

la fonction gumbel ci-dessus renvoie une réalisation de la loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

5. (a)

L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$; on étudie séparément $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$, par comparaison à des intégrales de référence, en raisonnant en convergence absolue.

La fonction $h : u \mapsto \ln(u)e^{-u}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0 : pour $u \in]0, 1]$, $|h(u)| = -\ln(u)e^{-u} \leq -\ln(u)$. Or, pour $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$\int_{\varepsilon}^1 (-\ln u) \, du = [u - u \ln u]_{\varepsilon}^1 = 1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 1 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ (croissances comparées).}$$

Donc $\int_0^1 (-\ln u) \, du$ converge et, par comparaison de fonctions positives,

$$\int_0^1 |h(u)| \, du \text{ converge.}$$

En $+\infty$: par croissances comparées, $u^2 \ln(u)e^{-u} \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow +\infty$, donc

$$h(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right). \text{ Comme } h \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[\text{ et que l'intégrale de Riemann } \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$

converge ($2 > 1$), $\int_1^{+\infty} h(u) \, du$ converge.

Conclusion

$\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} \, du$ est absolument convergente, donc convergente.

(b)

Le changement de variable $t = e^{-u}$ est effectué sur des segments, puis on passe à la limite aux deux bornes, en séparant les deux extrémités impropres.

La fonction $\varphi : t \mapsto \ln(-\ln t)$ est continue sur $]0, 1]$. Soient $0 < \alpha < \beta$. La fonction $u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$, de dérivée $-e^{-u}$, et pour $u > 0$, $\varphi(e^{-u}) = \ln(u)$. Le changement de variable $t = e^{-u}$ donne :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln(u) e^{-u} \, du = - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(e^{-u}) (-e^{-u}) \, du = - \int_{e^{-\alpha}}^{e^{-\beta}} \varphi(t) \, dt = \int_{e^{-\beta}}^{e^{-\alpha}} \varphi(t) \, dt.$$

Borne 0. Pour $x \in]0, e^{-1}[$, en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = -\ln x > 1$:

$$\int_x^{e^{-1}} \varphi(t) \, dt = \int_1^{-\ln x} \ln(u) e^{-u} \, du \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \ln(u) e^{-u} \, du,$$

car $-\ln x \rightarrow +\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} h$ converge (question 5(a)).

Borne 1. Pour $y \in]e^{-1}, 1[$, en prenant $\alpha = -\ln y \in]0, 1[$ et $\beta = 1$:

$$\int_{e^{-1}}^y \varphi(t) \, dt = \int_{-\ln y}^1 \ln(u) e^{-u} \, du \xrightarrow{y \rightarrow 1^-} \int_0^1 \ln(u) e^{-u} \, du,$$

car $-\ln y \rightarrow 0^+$ et l'intégrale $\int_0^1 h$ converge.

Les intégrales $\int_0^{e^{-1}} \varphi$ et $\int_{e^{-1}}^1 \varphi$ convergent donc, et en ajoutant :

$$\int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt = \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} \, du.$$

Conclusion

$\int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt$ converge et $\gamma = - \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} \, du$; cette relation sert dans la méthode 2 de la question suivante.

(c)

$Z \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$ admet la densité $f_{0,1}(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$. Il faut montrer la convergence

absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x) dx$. Comme $x f_{0,1}(x)$ est positif sur $[0, +\infty[$ et négatif sur $] -\infty, 0]$, il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} x f_{0,1}(x) dx$ et de $\int_{-\infty}^0 x f_{0,1}(x) dx$: sur chacun de ces intervalles, l'intégrande est de signe constant, donc convergence et convergence absolue coïncident. Les changements de variable sont faits sur des segments.

Méthode 1 — Changement de variable $u = \exp(-\exp(-x)) = F_{0,1}(x)$ (indiqué par l'énoncé).

La fonction $F_{0,1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_{0,1}$, à valeurs dans $]0, 1[$, et $G(F_{0,1}(x)) = x$ pour tout réel x (question 1(c)). Pour $B > 0$:

$$\int_0^B x f_{0,1}(x) dx = \int_0^B G(F_{0,1}(x)) F'_{0,1}(x) dx = \int_{F_{0,1}(0)}^{F_{0,1}(B)} G(u) du = \int_{e^{-1}}^{F_{0,1}(B)} G(u) du.$$

Comme $G(u) = -\ln(-\ln u)$, l'intégrale $\int_{e^{-1}}^1 G(u) du$ converge (question 5(b)),

c'est-à-dire que $s \mapsto \int_{e^{-1}}^s G(u) du$ admet une limite en 1^- . Puisque $F_{0,1}(B) \rightarrow 1$ avec $F_{0,1}(B) < 1$ quand $B \rightarrow +\infty$, par composition des limites :

$$\int_0^B x f_{0,1}(x) dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 G(u) du.$$

De même, pour $A < 0$, $\int_A^0 x f_{0,1}(x) dx = \int_{F_{0,1}(A)}^{e^{-1}} G(u) du \rightarrow \int_0^{e^{-1}} G(u) du$ quand $A \rightarrow -\infty$, car $F_{0,1}(A) \rightarrow 0^+$.

Ainsi Z admet une espérance et $E(Z) = \int_0^1 G(u) du = -\int_0^1 \ln(-\ln u) du = \gamma$.

Méthode 2 — Changement de variable $v = e^{-x}$ et retour à l'intégrale de la question 5(a).

Posons $\psi(x) = e^{-x}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\psi'(x) = -e^{-x}$ et $x = -\ln \psi(x)$. Alors :

$$x f_{0,1}(x) = (-\ln \psi(x)) e^{-\psi(x)} (-\psi'(x)) = \ln(\psi(x)) e^{-\psi(x)} \psi'(x).$$

Pour $A < B$, le changement de variable $v = \psi(x)$ donne :

$$\int_A^B x f_{0,1}(x) dx = \int_{e^{-A}}^{e^{-B}} \ln(v) e^{-v} dv = - \int_{e^{-B}}^{e^{-A}} \ln(v) e^{-v} dv.$$

Avec $A = 0$ et $B \rightarrow +\infty$ ($e^{-B} \rightarrow 0^+$) : $\int_0^B x f_{0,1}(x) dx \rightarrow - \int_0^1 \ln(v) e^{-v} dv$. Avec $B = 0$ et $A \rightarrow -\infty$ ($e^{-A} \rightarrow +\infty$) : $\int_A^0 x f_{0,1}(x) dx \rightarrow - \int_1^{+\infty} \ln(v) e^{-v} dv$. Ces limites existent d'après la question 5(a). Donc Z admet une espérance et, d'après 5(b) :

$$E(Z) = - \int_0^{+\infty} \ln(v) e^{-v} dv = \gamma.$$

La première méthode utilise la réciproque G et la définition de γ ; la seconde ramène à l'intégrale de la question 5(a) et utilise la relation établie en 5(b). Numériquement, une méthode des rectangles (milieux, 2×10^6 subdivisions) donne $\gamma \approx 0,57722$ (calcul exécuté, à titre indicatif).

Conclusion

Z admet une espérance et $E(Z) = \gamma$.

(d)

D'après le résultat admis, $Z = \frac{X - \mu}{a} \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$, donc Z admet une espérance égale à γ (question 5(c)). Comme $X = aZ + \mu$, par linéarité de l'espérance, X admet une espérance et $E(X) = aE(Z) + \mu$.

Conclusion

$E(X) = \mu + a\gamma$.

6. (a)

On calcule la fonction de répartition de $-Z$ et on vérifie qu'elle est de classe C^1 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme Z est à densité, $P(Z = -x) = 0$, donc :

$$P(-Z \leq x) = P(Z \geq -x) = 1 - P(Z < -x) = 1 - F_{0,1}(-x) = 1 - \exp(-e^x).$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $-Z$ est à densité, et une densité est obtenue en dérivant : $g(x) = e^x \exp(-e^x)$. On remarque que $g(t) = f_{0,1}(-t)$.

Conclusion

$-Z$ est à densité, de densité $g : x \mapsto e^x \exp(-e^x)$.

(b)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $\lambda = e^{-x} + 1$, de sorte que $\lambda \geq 1 > 0$.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment.

Pour $B > 0$, avec $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}$, de classe C^1 sur $[0, B]$:

$$\int_0^B u e^{-\lambda u} du = \left[-\frac{u}{\lambda} e^{-\lambda u} \right]_0^B + \frac{1}{\lambda} \int_0^B e^{-\lambda u} du = -\frac{B}{\lambda} e^{-\lambda B} + \frac{1 - e^{-\lambda B}}{\lambda^2}.$$

Quand $B \rightarrow +\infty$, $B e^{-\lambda B} \rightarrow 0$ (croissances comparées, $\lambda > 0$) et $e^{-\lambda B} \rightarrow 0$, donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.

Méthode 2 — Espérance d'une loi exponentielle.

La fonction $u \mapsto \lambda e^{-\lambda u}$ sur $[0, +\infty[$ (et 0 ailleurs) est la densité de la loi exponentielle de paramètre λ , dont l'espérance existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$. Donc $\int_0^{+\infty} u \lambda e^{-\lambda u} du$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$; en divisant par $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} u e^{-\lambda u} du$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.

La première méthode est autonome; la seconde, plus rapide, consiste à reconnaître un moment d'une loi usuelle.

Conclusion

pour tout réel x , $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et vaut $\frac{1}{(1 + e^{-x})^2}$.

(c)

On simplifie l'intégrande, puis on effectue le changement de variable $u = e^t$ sur des segments.

Soient $x, t \in \mathbb{R}$. Comme

$$f_{0,1}(x-t) = e^{-(x-t)} \exp(-e^{-(x-t)}) = e^{-x} e^t \exp(-e^{-x} e^t) :$$

$$f_{0,1}(x-t) g(t) = e^{-x} e^t \exp(-e^{-x} e^t) e^t \exp(-e^t) = e^{-x} e^t e^t \exp(-(e^{-x} + 1)e^t).$$

Avec $\lambda = e^{-x} + 1$, et pour $A < B$, le changement de variable $u = e^t$ (de classe C^1 , $du = e^t dt$) donne :

$$\int_A^B f_{0,1}(x-t) g(t) dt = e^{-x} \int_A^B e^t \exp(-\lambda e^t) e^t dt = e^{-x} \int_{e^A}^{e^B} u e^{-\lambda u} du.$$

En prenant $A = 0$ et $B \rightarrow +\infty$ ($e^B \rightarrow +\infty$), puis $B = 0$ et $A \rightarrow -\infty$ ($e^A \rightarrow 0^+$), et puisque $\int_0^{+\infty} u e^{-\lambda u} du$ converge (question 6(b)), les intégrales $\int_0^{+\infty}$ et $\int_{-\infty}^0$ de $t \mapsto f_{0,1}(x-t)g(t)$ convergent, avec pour somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} u e^{-\lambda u} du = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

Conclusion

pour tout réel x , $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t) dt$ converge et vaut $\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

(d)

On écrit $Y - Z = Y + (-Z)$ et on applique le théorème du produit de convolution, dont on vérifie les hypothèses.

Les variables Y et Z sont indépendantes, donc Y et $-Z$, fonction de Z seule, sont indépendantes. La variable Y admet la densité $f_{0,1}$ et $-Z$ la densité g (question 6(a)).

D'après la question 6(c), la fonction :

$$\eta : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

est définie en tout réel x , et elle est continue sur $\mathbb{R}$ d'après son expression. Le théorème de convolution du cours (somme de deux variables à densité indépendantes, lorsque la fonction ainsi définie est définie et continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points) assure alors que $Y + (-Z)$ est à densité, de densité η .

Ce résultat a été illustré par simulation (code exécuté, avec la fonction gumbel de 4(b)) : sur 100 000 réalisations de $Y - Z$, la fréquence de l'événement $[Y - Z \leq 1]$ vaut environ 0,731, proche de $\int_{-\infty}^1 \eta = \frac{1}{1+e^{-1}} \approx 0,731$.

Conclusion

$Y - Z$ est une variable à densité, de densité $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Partie II

7. (a)

On revient à la définition quantifiée : (T_n) converge en probabilité vers T si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|T_n - T| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ (le raisonnement est identique avec l'inégalité stricte). On majore la probabilité de l'écart par une inclusion d'événements.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout n , par l'inégalité triangulaire :

$$|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \leq |\alpha| |V_n - V| + |\beta| |W_n - W|.$$

Si $|\alpha| |V_n - V| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|\beta| |W_n - W| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors le membre de gauche est strictement inférieur à ε . Par contraposée :

$$[|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \geq \varepsilon] \subset \left[|\alpha| |V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|\beta| |W_n - W| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Si $\alpha = 0$, le premier événement est vide ; si $\alpha \neq 0$, sa probabilité vaut

$P\left(|V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right)$, qui tend vers 0 par convergence en probabilité de (V_n) vers V .

Dans les deux cas, sa probabilité tend vers 0 ; de même pour le second événement. Par croissance de P et la majoration $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\alpha| |V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &+ P\left(|\beta| |W_n - W| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Conclusion

$(\alpha V_n + \beta W_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.

(b)

On applique la loi faible des grands nombres aux suites (X_n) et (X_n^2) , après avoir vérifié l'existence des moments nécessaires.

Les variables X_n sont indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(\mu, a)$. D'après le résultat admis, X_1 admet un moment d'ordre 4 ; l'existence d'un moment d'ordre 4 entraîne celle d'un moment d'ordre 2 par domination, puisque $x^2 \leq 1 + x^4$ pour tout réel x . Ainsi X_1 admet une variance.

Loi faible des grands nombres pour (X_n) : variables indépendantes, de même loi, admettant une variance, donc M_n converge en probabilité vers $E(X_1)$.

Loi faible des grands nombres pour (X_n^2) : les variables X_n^2 sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes, lemme des coalitions), de même loi (celle de X_1^2), et admettent une variance puisque $E((X_1^2)^2) = E(X_1^4)$ existe. Donc C_n converge en probabilité vers $E(X_1^2)$.

Conclusion

$M_n \rightarrow E(X_1)$ et $C_n \rightarrow E((X_1)^2)$ en probabilité.

(c)

On combine 7(a), 7(b) et la composition de la convergence en probabilité par une fonction continue sur $\mathbb{R}$; on veille à ce que cette fonction soit définie sur tout $\mathbb{R}$.

Étape 1. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $M_n^2 \rightarrow (E(X_1))^2$ en probabilité (une constante étant vue comme une variable certaine).

Étape 2. D'après 7(a) avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$:

$$C_n - M_n^2 \rightarrow E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = V(X_1) = a^2c \quad \text{en probabilité,}$$

d'après la formule de Koenig-Huygens et le résultat admis.

Étape 3. On a $C_n - M_n^2 \geq 0$, car :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2M_n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + M_n^2 = C_n - M_n^2.$$

Soit $\psi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{|x|}$, continue sur $\mathbb{R}$. Comme $C_n - M_n^2 \geq 0$, $A_n = \psi(C_n - M_n^2)$. Par composition par la fonction continue ψ :

$$A_n \rightarrow \psi(a^2c) = \frac{\sqrt{a^2c}}{\sqrt{c}} = a \quad \text{en probabilité,}$$

car $a > 0$.

Enfin A_n est bien un estimateur de a : c'est une fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et de la constante connue c , qui ne dépend pas des paramètres inconnus a et μ .

Conclusion

(A_n) est un estimateur convergent de a .

(d)

D'après 7(b) et 5(d), $M_n \rightarrow E(X_1) = \mu + a\gamma$ en probabilité ; d'après 7(c), $A_n \rightarrow a$ en probabilité. La question 7(a), avec $\alpha = 1$ et $\beta = -\gamma$, donne :

$$S_n = M_n - \gamma A_n \rightarrow (\mu + a\gamma) - \gamma a = \mu \quad \text{en probabilité.}$$

S_n est une fonction de l'échantillon et de la constante connue γ : c'est un estimateur de μ .

Conclusion

(S_n) est un estimateur convergent de μ .

8. (a)

Code adapté en Python.

On calcule M_n et C_n à partir du tableau X , puis $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{C_n - M_n^2}$. Deux écritures naturelles sont possibles.

Méthode 1 — Calcul direct de M_n et C_n .

Python

```
import numpy as np

def estimateur_a(X):
    n = len(X)                # taille de l'échantillon
    M = np.sum(X) / n         # moyenne empirique M_n
```

```
C = np.sum(X ** 2) / n      # moyenne des carrés C_n (carrés coefficient par coeffici
ent)

return np.sqrt(np.abs(C - M ** 2)) / np.sqrt(c)
```

L'élévation au carré de X dans le code élève chaque coefficient au carré (ce n'est pas un produit matriciel). La valeur absolue ne modifie pas le résultat mathématique puisque $C_n - M_n^2 \geq 0$; elle évite seulement qu'une erreur d'arrondi rende cette différence légèrement négative et provoque une racine carrée non définie. La variable c est celle définie au préalable dans le script.

Méthode 2 — Utilisation de la variance empirique.

D'après 7(c),

$$C_n - M_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

est la variance empirique avec la convention de division par n , qui est celle de la commande `np.var` par défaut.

Python

```
import numpy as np

def estimateur_a(X):
    return np.sqrt(np.var(X) / c)  # np.var divise par n (convention 1/n)
```

La première version suit la définition de l'énoncé; la seconde est plus concise mais demande de connaître la convention de `np.var` (division par n et non par $n - 1$).

Ces deux codes ont été exécutés : sur un échantillon de 100 000 réalisations simulées avec `gumbel(2, 1)`, et avec `gamma = 0.5772156649` et `c = 1.6449340668`, ils renvoient tous deux environ 1,0003, proche de $a = 1$; l'estimateur S_n associé vaut environ 1,997, proche de $\mu = 2$. Pour un échantillon de taille 1, ils renvoient 0.

Conclusion

l'une ou l'autre de ces fonctions renvoie la valeur de A_n associée aux observations contenues dans X .

(b)

Commentaire de la figure 1, dont les valeurs ont été relevées sur le graphique.

Valeur en $n = 1$. Les cinq trajectoires partent de $A_1 = 0$: avec une seule observation, $C_1 - M_1^2 = X_1^2 - X_1^2 = 0$. C'est cohérent avec le code de 8(a).

Petites valeurs de n . Pour $n \leq 10$, la dispersion est très grande : en $n = 2$, les cinq valeurs sont environ 1,06, 0,74, 0,35, 0,08 et 0,06. Avec si peu d'observations, l'estimation de $a = 1$ n'est pas fiable.

Grandes valeurs de n . Les trajectoires se resserrent autour de la droite grise d'équation $A_n = 1 = a$: pour $n \geq 100$, les valeurs lues restent entre environ 0,83 et 1,24, et pour $n \geq 500$ entre environ 0,92 et 1,06. Ce comportement illustre la convergence en probabilité de A_n vers a établie en 7(c) : pour $\varepsilon > 0$ fixé, la probabilité d'un écart $|A_n - a| \geq \varepsilon$ devient petite quand n est grand. Le resserrement est lent, comme le montre l'échelle logarithmique des abscisses : même pour $n = 1000$, des écarts de l'ordre de 0,05 subsistent. Il s'agit d'une observation expérimentale sur cinq réalisations, qui illustre le résultat mais ne le démontre pas.

Forme des trajectoires. On observe des sauts brusques vers le haut (par exemple, entre $n = 13$ et $n = 14$, une trajectoire passe d'environ 0,60 à environ 1,24; entre $n = 16$ et $n = 17$, une autre passe d'environ 0,87 à environ 1,14; d'autres sauts apparaissent vers $n \approx 35$ et vers $n \approx 80$ à 90), suivis de lentes décroissances, mais jamais de chute brutale. Cela s'explique par une relation exacte. Notons $V_n = C_n - M_n^2$ et $x = X_{n+1}$. Comme $(n+1)C_{n+1} = nC_n + x^2$ et $(n+1)M_{n+1} = nM_n + x$:

$$(n+1)^2 V_{n+1} = (n+1)(nC_n + x^2) - (nM_n + x)^2 = n(n+1)(C_n - M_n^2) + n(x - M_n)^2,$$

d'où :

$$V_{n+1} = \frac{n}{n+1} V_n + \frac{n}{(n+1)^2} (X_{n+1} - M_n)^2 \geq \frac{n}{n+1} V_n.$$

Ainsi $A_{n+1} \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}} A_n$: d'un rang au suivant, A_n ne peut diminuer que d'une proportion faible, alors qu'une observation X_{n+1} très éloignée de M_n peut le faire augmenter brutalement. De plus, la loi de Gumbel est dissymétrique : sa densité décroît comme e^{-x} en $+\infty$ mais comme $e^{-x} \exp(-e^{-x})$, beaucoup plus vite, en $-\infty$; les observations exceptionnellement éloignées de la moyenne sont donc presque toujours de grandes valeurs, à l'origine de ces sauts.

Conclusion

la figure illustre la convergence de l'estimateur A_n vers $a = 1$, une forte variabilité pour les petites tailles d'échantillon, et une convergence assez lente, perturbée par des sauts vers le haut dus aux grandes valeurs de la loi de Gumbel.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 1(b) : Code adapté en Python. La fonction Scilab à compléter est remplacée par une fonction Python `def f(n, x)` de même structure (initialisations, boucle `for k in range(1, n + 1)`, commentaires, `return S`), avec les mêmes blancs à compléter. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème, question 4(b) : Code adapté en Python. L'en-tête Scilab est remplacé par `def gumbel(mu, a) :`, avec la précision de l'importation de `numpy` sous le nom `np`. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème, question 8 (préambule) et 8(a) : Code adapté en Python. Le script Scilab devient un script Python (variables `gamma` et `c`, importation de `numpy`), l'en-tête devient `def estimateur_a(X) :` et le « vecteur-ligne » devient un « tableau numpy à une dimension ». Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème, question 8(b) : La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Une description des principales valeurs lues est ajoutée sous la figure.