



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2020

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Rectification de l'énoncé. Dans le texte original, la relation de récurrence

$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est écrite «pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». Pour $n = 0$, elle ferait intervenir T_{-1} , qui n'est pas défini. La relation est donc énoncée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; c'est bien ainsi qu'elle est utilisée dans toute la suite.

1. (a) On applique la relation de récurrence avec $n = 1$, puis $n = 2$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 2X \cdot T_1 - T_0 = 2X \cdot X - 1$, donc

$$T_2 = 2X^2 - 1.$$

Avec $n = 2$: $T_3 = 2X \cdot T_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 2X - X$, donc

$$T_3 = 4X^3 - 3X.$$

(b) On montre par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: « T_n et T_{n+1} sont de degrés respectifs n et $n + 1$, de coefficients dominants respectifs 2^{n-1} et 2^n ».

Initialisation. $T_1 = X$ est de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$; $T_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (relation de récurrence au rang $n + 1 \geq 1$). Le polynôme $2XT_{n+1}$ est de degré $n + 2$, de coefficient dominant $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, et T_n est de degré $n < n + 2$. Le terme de degré $n + 2$ de T_{n+2} est donc celui de $2XT_{n+1}$: T_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} . Avec l'hypothèse sur T_{n+1} , $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$, et le coefficient dominant de T_n vaut 2^{n-1} . Par ailleurs $T_0 = 1$ est de degré 0, de sorte que $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (b), pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(T_k) = k \leq n$, donc $T_k \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ compte $n + 1$ vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre, ou qu'elle est génératrice.

Méthode 1 — Liberté d'une famille de degrés échelonnés.

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k T_k = 0.$$

Supposons par l'absurde que les a_k ne soient pas tous nuls, et notons $m = \max\{k \in \{0, \dots, n\}, a_k \neq 0\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n a_k T_k = \sum_{k=0}^m a_k T_k.$$

Pour $k < m$, $\deg(T_k) = k < m$, donc le coefficient de X^m dans cette somme est celui de $a_m T_m$, c'est-à-dire $a_m 2^{m-1}$ si $m \geq 1$, et a_0 si $m = 0$. Il est non nul, ce qui contredit la nullité du polynôme. Donc $a_0 = \dots = a_n = 0$: la famille est libre.

Méthode 2 — La famille engendre la base canonique.

Montrons par récurrence forte que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $X^k \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_k)$. Pour $k = 0$, $X^0 = T_0$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $X^j \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_j)$ pour tout $j < k$. D'après (b), $T_k = 2^{k-1} X^k + R_k$ avec $R_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Comme R_k est combinaison linéaire de

$1, X, \dots, X^{k-1}$, l'hypothèse de récurrence donne $R_k \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_{k-1})$. Alors $X^k = 2^{1-k}(T_k - R_k) \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_k)$.

Ainsi $\text{Vect}(T_0, \dots, T_n)$ contient la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$: la famille est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comparaison. La méthode 1 utilise seulement les degrés ; la méthode 2 exprime concrètement chaque X^k à l'aide des T_j , ce qui resservira à la question 4.

Conclusion

$(T_0, \dots, T_n)$ est une famille libre (ou génératrice) de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n + 1$; c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule rappelée avec $a = x$ et $b = (n + 1)x$:

$$\cos(x) \cos((n + 1)x) = \frac{1}{2} \left(\cos((n + 2)x) + \cos(-nx) \right).$$

La fonction cosinus étant paire, $\cos(-nx) = \cos(nx)$. En multipliant par 2 :

$$\cos((n + 2)x) + \cos(nx) = 2 \cos(x) \cos((n + 1)x).$$

(b) On procède par récurrence double. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}(n)$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ et $T_{n+1}(\cos x) = \cos((n + 1)x)$ ».

Initialisation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0 \cdot x)$ et $T_1(\cos x) = \cos x$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, et soit $x \in \mathbb{R}$. La relation

$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (rang $n + 1 \geq 1$) est une égalité de polynômes ; en l'évaluant en $\cos x$, puis en utilisant $\mathcal{Q}(n)$ et la question (a) :

$$T_{n+2}(\cos x) = 2 \cos(x) T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) = 2 \cos(x) \cos((n + 1)x) - \cos(nx)$$

$$= \cos((n+2)x).$$

Avec la seconde partie de $\mathcal{Q}(n)$, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

3. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $f : t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1, 1[$; l'intégrale est impropre en -1 et en 1 . On étudie séparément $[0, 1[$ et $] -1, 0]$, et on montre la convergence absolue.

La fonction polynomiale PQ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|P(t)Q(t)| \leq M$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Étude en 1. Pour $t \in [0, 1[$, on a $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t) \geq 1 - t > 0$, d'où

$$0 \leq |f(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}}.$$

Pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 2$, donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 |f(t)| dt$ converge.

Étude en -1 . Pour $t \in] -1, 0]$, $1 - t^2 \geq 1 + t > 0$, d'où $0 \leq |f(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{1+t}}$. Pour $x \in] -1, 0]$, $\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2 - 2\sqrt{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 2$. Par comparaison, $\int_{-1}^0 |f(t)| dt$ converge.

Conclusion

$\int_{-1}^1 f(t) dt$ est absolument convergente, donc convergente.

- (b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, bien défini d'après (a).

Symétrie. Pour tous P, Q , $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, donc $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.

Linéarité à gauche. Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $t \in]-1, 1[$,

$$\frac{(\mu P_1 + P_2)(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \mu \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Les deux intégrales de droite convergent d'après (a) ; par linéarité des intégrales convergentes, $\varphi(\mu P_1 + P_2, Q) = \mu \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$. Avec la symétrie, φ est bilinéaire.

Positivité. Pour tout P , la fonction $g : t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive sur $] -1, 1[$; l'intégrale convergente d'une fonction positive, avec des bornes dans l'ordre croissant, est positive : $\varphi(P, P) \geq 0$.

Caractère défini. Soit P tel que $\varphi(P, P) = 0$. Soit $a \in]0, 1[$. Par la relation de Chasles pour les intégrales convergentes,

$$0 = \int_{-1}^1 g = \int_{-1}^{-a} g + \int_{-a}^a g + \int_a^1 g,$$

et les trois termes sont positifs ($g \geq 0$). Donc $\int_{-a}^a g = 0$. La fonction g est continue et positive sur le segment $[-a, a]$, d'intégrale nulle : elle est nulle sur $[-a, a]$. Ceci valant pour tout $a \in]0, 1[$, $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines : $P = 0$.

Conclusion

φ est une forme bilinéaire symétrique, positive et définie : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Soient $n \neq m$ deux entiers naturels. La formule rappelée avec $a = nx$ et $b = mx$ donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} \left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) \right).$$

Pour tout entier relatif $k \neq 0$,
$$\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = \frac{\sin(k\pi)}{k} = 0.$$

Ici $n - m \neq 0$ car $n \neq m$, et $n + m \neq 0$ car deux entiers naturels distincts ne sont pas tous deux nuls. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)x) dx = 0.$$

(d) On établit d'abord un lemme valable pour tous polynômes, puis on l'applique.

Lemme. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, en notant $g = PQ$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi g(\cos x) dx.$$

Preuve. Notons $f(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ pour $t \in]-1, 1[$. L'intégrale $\int_{-1}^1 f$ étant impropre, on effectue le changement de variable sur un segment, puis on passe à la limite.

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$, à valeurs dans $[0, \cos \alpha] \subset [0, 1[$, intervalle sur lequel f est continue. La formule de changement de variable sur un segment donne

$$\int_{\cos \alpha}^{\cos(\pi/2)} f(t) dt = \int_\alpha^{\pi/2} f(\cos x) (-\sin x) dx, \text{ soit } \int_0^{\cos \alpha} f(t) dt = \int_\alpha^{\pi/2} f(\cos x) \sin x dx.$$

Pour $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$, donc $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$ et $f(\cos x) \sin x = g(\cos x)$. D'où :

$$\int_0^{\cos \alpha} f(t) dt = \int_\alpha^{\pi/2} g(\cos x) dx.$$

Faisons tendre α vers 0^+ . D'une part, $\cos \alpha \rightarrow 1$ avec $\cos \alpha < 1$, et $y \mapsto \int_0^y f$ tend vers $\int_0^1 f$ quand $y \rightarrow 1^-$ (convergence établie en 3.(a)) ; par composition des limites, le membre de gauche tend vers $\int_0^1 f$. D'autre part, $x \mapsto g(\cos x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\alpha \mapsto \int_\alpha^{\pi/2} g(\cos x) dx$ est continue en 0 (théorème fondamental) et tend vers $\int_0^{\pi/2} g(\cos x) dx$. Ainsi $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\pi/2} g(\cos x) dx$.

De même, pour $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, le changement de variable sur $[\frac{\pi}{2}, \beta]$ donne $\int_{\cos \beta}^0 f(t) dt = \int_{\pi/2}^\beta g(\cos x) dx$, et le passage à la limite $\beta \rightarrow \pi^-$ (alors $\cos \beta \rightarrow -1^+$) donne $\int_{-1}^0 f(t) dt = \int_{\pi/2}^\pi g(\cos x) dx$.

En sommant (relation de Chasles), on obtient le lemme.

Application. Soient $n \neq m$ deux entiers naturels. Avec $P = T_n$, $Q = T_m$ et la question 2.(b), $g(\cos x) = T_n(\cos x)T_m(\cos x) = \cos(nx)\cos(mx)$, donc d'après (c) :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

(e) D'après le lemme de (d) et la question 2.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi \cos^2(nx) dx.$$

Si $n = 0$: $\|T_0\|^2 = \int_0^\pi 1 dx = \pi$.

Si $n \geq 1$: la formule rappelée avec $a = b = nx$ donne $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2nx))$, d'où, comme $2n \neq 0$ et d'après le calcul de (c),

$$\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2nx) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

$$\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } \|T_0\|^2 = \pi.$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1.(c), $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$; d'après (d), elle est orthogonale; d'après (e), ses vecteurs sont non nuls. En divisant chaque vecteur par sa norme, on obtient une famille orthonormale de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base orthonormée (famille orthonormale, donc libre, de cardinal égal à la dimension) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \right).$$

4. (a) Notons $(e_0, \dots, e_n)$ la base orthonormée de 3.(f), c'est-à-dire $e_k = \frac{T_k}{\|T_k\|}$. Muni de la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace euclidien, et les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée sont les $\langle x, e_k \rangle$. Comme $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$X^n = \sum_{k=0}^n \langle X^n, e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^n \left\langle X^n, \frac{T_k}{\|T_k\|} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k,$$

par bilinéarité du produit scalaire.

(b) Notons $c_k = \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, et

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k.$$

D'après 1.(c) appliqué à $n - 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$; en particulier $P_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après (a), $X^n - P_0 = c_n T_n$.

Méthode 1 — Calcul direct par le théorème de Pythagore.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On écrit $X^n - P = c_n T_n + (P_0 - P)$, avec $P_0 - P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$. D'après 3.(d), T_n est orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$, donc à $P_0 - P$. Le théorème de Pythagore donne

$$\|X^n - P\|^2 = c_n^2 \|T_n\|^2 + \|P_0 - P\|^2 \geq c_n^2 \|T_n\|^2,$$

avec égalité pour $P = P_0$. Ainsi $|c_n| \|T_n\|$ minore l'ensemble $\{\|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$ et appartient à cet ensemble : c'en est le minimum, donc la borne inférieure.

Méthode 2 — Caractérisation de la projection orthogonale.

Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, de base orthonormée $(e_0, \dots, e_{n-1})$. D'après le cours, pour tout $x \in E$, la distance $\inf\{\|x - y\|, y \in F\}$ est atteinte en $y = p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur F , et

$$p_F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Pour $x = X^n$, ce projeté est

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k = P_0$$

(même calcul qu'en (a)). Donc $d_n = \|X^n - P_0\| = \|c_n T_n\|$.

Comparaison. La méthode 1 redémontre, dans ce cas particulier, la propriété de minimisation ; la méthode 2 l'utilise comme résultat du cours et se concentre sur l'expression du projeté.

Conclusion

dans les deux cas, $d_n = |c_n| \|T_n\| = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|^2} \|T_n\|$, soit

$$d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}.$$

(c) Méthode 1 — Calcul direct pour $n = 2$.

Comme $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_0 = 1$, on a $X^2 = \frac{1}{2}(T_2 + T_0)$. Par bilinéarité, et puisque $\langle T_0, T_2 \rangle = 0$ et $\|T_2\|^2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\langle X^2, T_2 \rangle = \frac{1}{2}\|T_2\|^2 + \frac{1}{2}\langle T_0, T_2 \rangle = \frac{\pi}{4}.$$

D'après (b) : $d_2 = \frac{\pi/4}{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$

Méthode 2 — Formule générale pour d_n .

Soit $n \geq 1$. D'après 1.(b), $T_n = 2^{n-1}X^n + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$, donc $X^n = 2^{1-n}(T_n - R)$ et, T_n étant orthogonal à R , $\langle X^n, T_n \rangle = 2^{1-n}\|T_n\|^2$. Ainsi

$$d_n = \frac{2^{1-n}\|T_n\|^2}{\|T_n\|} = \frac{\|T_n\|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Pour $n = 2$: $d_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$

Comparaison. La méthode 1 est immédiate pour $n = 2$; la méthode 2 fournit d_n pour tout n en utilisant seulement le coefficient dominant de T_n .

Conclusion

$$d_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \approx 0,627, \text{ distance atteinte pour } P = \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire que } X^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}T_2 \text{ réalise le minimum.}$$

EXERCICE 2

1. (a) D'après le critère de Riemann, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans la suite de la question, on suppose $\alpha > 1$.

(b) La fonction $\phi : t \mapsto t^{-\alpha}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $t \mapsto -\alpha t^{-\alpha-1} < 0$ (car $\alpha > 1 > 0$) : elle est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Soit $k \geq 2$. Pour $t \in [k, k+1]$, $\phi(t) \leq \phi(k) = \frac{1}{k^\alpha}$; par croissance de l'intégrale sur un intervalle de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Pour $t \in [k-1, k] \subset [1, +\infty[$ (car $k-1 \geq 1$), $\phi(t) \geq \phi(k)$, d'où $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$.

Conclusion

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \text{ pour tout } k \geq 2.$$

- (c) Soit $n \geq 1$ et soit $N \geq n + 1$. Pour tout $k \in \{n + 1, \dots, N\}$, on a $k \geq 2$; en sommant les inégalités de (b) et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour $0 < a \leq b$, $\int_a^b t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^b = \frac{1}{\alpha-1} (a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha})$. Comme $1-\alpha < 0$, $(N+1)^{1-\alpha} \rightarrow 0$ et $N^{1-\alpha} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. La somme du milieu tend vers $R_{1,n}$ car la série converge. Par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

- (d) Soit $n \geq 1$. En multipliant l'encadrement de (c) par $(\alpha-1)n^{\alpha-1} > 0$:

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1} R_{1,n} \leq 1.$$

Or $\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \exp \left((\alpha-1) \ln \frac{n}{n+1} \right)$ et $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, donc par continuité de $\ln$ en 1 et de $\exp$ en 0, ce terme tend vers $e^0 = 1$. Par le théorème d'encadrement, $(\alpha-1)n^{\alpha-1} R_{1,n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(e) Les $R_{1,n}$ sont positifs (restes d'une série à termes positifs) et, d'après (d), équivalents au terme général positif $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Par le critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs,

$$\sum R_{1,n}$$

converge si et seulement si

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

converge, c'est-à-dire, par le critère de Riemann, si et seulement si $\alpha - 1 > 1$. (Le terme $R_{1,0}$ ne modifie pas la nature de la série.)

Conclusion

sous l'hypothèse $\alpha > 1$, la série converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

(f) Les questions (c) à (e) montrent que passer de $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ à $R_{1,n}$ revient, à un facteur multiplicatif près, à remplacer l'exposant α par $\alpha - 1$. En itérant ce raisonnement, on s'attend à avoir, tant que les séries convergent,

$$R_{p,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - p) n^{\alpha-p}}.$$

Conjecture : pour tout entier $p \geq 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge à l'ordre p si et seulement si $\alpha > p$. Elle converge donc exactement aux ordres p entiers tels que $1 \leq p < \alpha$: l'ordre maximal de convergence est le plus grand entier strictement inférieur à α (égal à $\lfloor \alpha \rfloor$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et à $\alpha - 1$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Il s'agit d'une conjecture : sa preuve demanderait de contrôler les restes de séries à partir d'équivalents, ce que l'énoncé ne demande pas.

2. (a) Pour $n \geq 2$, $n^n \geq 2^n > 0$, donc $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La série géométrique de raison

$\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

(b) Soit $k \geq 3$. La fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $k^k \geq 3^k > 0$ et $u_k = \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{3^k}$.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \geq n+1$, on a $k \geq 3$, donc pour tout $N \geq n+1$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{3^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ (la série converge d'après (a)) :

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(c) Pour $n \geq 2$, $0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 2} R_{1,n}$$

converge, donc

$$\sum_{n \geq 0} R_{1,n}$$

aussi : la série converge à l'ordre 2.

Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \geq n+1$, on a $k \geq 2$, donc $0 \leq R_{1,k} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^k}$, et par passage à la limite dans les sommes partielles :

$$0 \leq R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

(d) Rectification de l'énoncé. Le texte original demande l'inégalité pour tout $n \geq 1$.

Pour $p = 1$ et $n = 1$, elle est fausse :

$$R_{1,1} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^k} \geq u_2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

L'énoncé adapté demande donc l'inégalité pour tout $n \geq 2$, ce qui suffit pour la question (e). On remarquera que, pour $p \geq 2$, la preuve ci-dessous donne en fait l'inégalité dès $n \geq 1$ (comme en (c)).

Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}(p)$: « la série converge à l'ordre p , et pour tout $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ ».

Initialisation. $\mathcal{H}(1)$ résulte de (a) et (b).

Hérédité. Soit $p \geq 1$ tel que $\mathcal{H}(p)$ soit vraie. Pour $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{3}\right)^n$; par comparaison avec une série géométrique convergente,

$$\sum_{n \geq 2} R_{p,n}$$

converge, donc la série de terme général $R_{p,n}$ converge : la série

$$\sum u_n$$

converge à l'ordre $p+1$. Soit $n \geq 2$: pour tout $k \geq n+1 \geq 3$, $0 \leq R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p 3^k}$, donc

$$0 \leq R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} \cdot 3^n}.$$

Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $p \geq 1$, la série converge à l'ordre p , et pour tout $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$.

(e) D'après (d), $R_{n,n}$ est défini pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 2$, en appliquant (d) avec $p = n$:

$$0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n \cdot 3^n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

La série géométrique de raison $\frac{1}{6}$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$$

converge.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, $1+t \geq 1$, donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 (-t)^k dt$. Par linéarité de l'intégrale (somme finie), puis par la formule de la somme géométrique de raison $-t \neq 1$ (car $t \geq 0$) :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-t)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

(c) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt$, qui tend vers 0 d'après (a).

D'après (b), les sommes partielles convergent vers $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$: la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge, de somme $\ln 2$.

Pour tout $n \geq 0$, d'après (b) avec $N = n$:

$$R_{1,n} = \ln 2 - \sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

(d) Pour $p \geq 1$, notons $\mathcal{R}(p)$: « la série converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$,

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt ».$$

Initialisation. $\mathcal{R}(1)$ est la question (c).

Hérédité. Soit $p \geq 1$ tel que $\mathcal{R}(p)$ soit vraie, et soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale et somme géométrique de raison $-t \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^N R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{n=0}^N (-t)^n dt = \int_0^1 \frac{(-t)^p (1 - (-t)^{N+1})}{(1+t)^{p+1}} dt = A_p - B_N,$$

avec $A_p = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt$ et $B_N = \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt$.

Comme $(1+t)^{p+1} \geq 1$ sur $[0, 1]$, $|B_N| \leq \int_0^1 t^{N+p+1} dt = \frac{1}{N+p+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série de terme général $R_{p,n}$ converge, de somme A_p : la série

$$\sum u_n$$

converge à l'ordre $p+1$. De plus, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p+1,n} = A_p - \sum_{k=0}^n R_{p,k} = B_n = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt.$$

Donc $\mathcal{R}(p+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $p \geq 1$, la série converge à l'ordre p , et pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$.

PROBLÈME

Partie A - Définition par $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Remarque préliminaire. Les variables X_k suivant une loi exponentielle, on les considère, comme d'usage, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = X_{n+1} \geq 0$: la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Fixons $t > 0$ et $\omega \in \Omega$, et notons $E_t = \{n \in \mathbb{N}, S_n(\omega) \leq t\}$. On a $0 \in E_t$ car $S_0 = 0 \leq t$, et si $n \in E_t$ et $m \leq n$, alors $S_m(\omega) \leq S_n(\omega) \leq t$, donc $m \in E_t$. Par conséquent :

- soit E_t est fini, et $E_t = \{0, 1, \dots, m\}$ avec $m = \max E_t = N_t(\omega)$;
- soit E_t est infini, et alors $E_t = \mathbb{N}$ (pour tout n , il existe $n' \geq n$ dans E_t , donc $n \in E_t$), et $N_t(\omega) = -1$.

Cette description est utilisée dans les questions 1 à 5.

1. Soit $t > 0$. Montrons que $[N_t = 0] = [S_1 > t]$.

Si $S_1(\omega) > t$, alors pour tout $n \geq 1$, $S_n(\omega) \geq S_1(\omega) > t$; donc $E_t = \{0\}$ et $N_t(\omega) = 0$.

Réciproquement, si $N_t(\omega) = 0$, alors E_t est fini de maximum 0, donc $1 \notin E_t$, c'est-à-dire $S_1(\omega) > t$.

Ainsi $[N_t = 0] = [S_1 > t] = [X_1 > t]$, et comme X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ et $t > 0$:

$$P(N_t = 0) = P(X_1 > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

2. On rappelle que la loi γ de paramètre 1 (loi gamma de forme 1 et de taux 1) admet pour densité $x \mapsto \frac{x^0 e^{-x}}{\Gamma(1)} = e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$, nulle sur $] -\infty, 0]$. Sa fonction de répartition est $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-x}$ si $x \geq 0$: c'est la loi exponentielle de paramètre 1.

Méthode 1 — Par les fonctions de répartition.

Soit X une variable aléatoire et $Y = \lambda X$. Comme $\lambda > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[Y \leq x] = [X \leq x/\lambda]$, donc $F_Y(x) = F_X(x/\lambda)$, et de même $F_X(y) = F_Y(\lambda y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ : pour $x < 0$, $F_Y(x) = F_X(x/\lambda) = 0$; pour $x \geq 0$, $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda(x/\lambda)} = 1 - e^{-x}$. Donc $F_Y = F$ et, la fonction de répartition caractérisant la loi, λX suit la loi $\gamma(1)$.

Si λX suit la loi $\gamma(1)$: pour $y < 0$, $F_X(y) = F(\lambda y) = 0$; pour $y \geq 0$, $F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}$.
C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ .

Méthode 2 — Par le théorème de transformation affine des densités.

D'après le cours, si Z admet une densité f et si $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, alors $aZ + b$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , de densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et 0 sinon, alors λX admet la densité $x \mapsto \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, égale à e^{-x} pour $x \geq 0$ et à 0 sinon : c'est une densité de la loi $\gamma(1)$ (elle ne diffère de la précédente qu'en 0).

Si λX suit la loi $\gamma(1)$, alors $X = \frac{1}{\lambda}(\lambda X)$ admet la densité $x \mapsto \lambda f_\gamma(\lambda x)$, égale à $\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$ et à 0 pour $x \leq 0$: X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Comparaison. La méthode 1 n'utilise que la définition par la fonction de répartition et s'applique à toute variable ; la méthode 2 est plus rapide quand une densité est connue, mais repose sur un théorème du cours.

Conclusion

X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi $\gamma(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \geq 1$, posons $Y_k = \lambda X_k$. D'après la question 2, les Y_k suivent la loi $\gamma(1)$; comme fonctions respectives des variables mutuellement indépendantes X_k , elles sont mutuellement indépendantes. De plus

$$\lambda S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

On utilise le résultat du cours : si A et B sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$, alors $A + B$ suit la loi $\gamma(a + b)$.

Montrons par récurrence que λS_n suit la loi $\gamma(n)$. Pour $n = 1$, $\lambda S_1 = Y_1$ suit la loi $\gamma(1)$. Si

λS_n suit la loi $\gamma(n)$, comme λS_n est fonction de $(Y_1, \dots, Y_n)$, le lemme des coalitions assure que λS_n et Y_{n+1} sont indépendantes, donc $\lambda S_{n+1} = \lambda S_n + Y_{n+1}$ suit la loi $\gamma(n+1)$.

Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, une densité de λS_n est :

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \text{ si } x > 0, \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

4. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On utilise la description de E_t donnée dans la remarque préliminaire.

Inclusion $[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t]$. Si $N_t(\omega) \geq n$, alors $N_t(\omega) \neq -1$, donc E_t est fini et $E_t = \{0, \dots, N_t(\omega)\}$ contient $n : S_n(\omega) \leq t$.

Réciproque partielle. Si $S_n(\omega) \leq t$, alors $n \in E_t$. Si E_t est fini, $N_t(\omega) = \max E_t \geq n$. Si E_t est infini, $N_t(\omega) = -1$. Réciproquement, si $N_t(\omega) = -1$, alors $E_t = \mathbb{N}$ et $S_n(\omega) \leq t$.

Conclusion

$$[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t] \text{ et } [S_n \leq t] = [N_t \geq n] \cup [N_t = -1],$$

la réunion étant disjointe puisque $n \geq 0 > -1$. Les deux événements diffèrent donc exactement de l'événement $[N_t = -1]$; on montre à la question suivante qu'il est négligeable, de sorte que $P(N_t \geq n) = P(S_n \leq t)$.

5. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Étape 1 : l'événement $[N_t = -1]$ est négligeable. D'après la remarque préliminaire,

$$[N_t = -1] = [E_t = \mathbb{N}] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leq t]. \text{ La suite } (S_k) \text{ étant croissante, } [S_{k+1} \leq t] \subset [S_k \leq t] :$$

la suite d'événements est décroissante. Par continuité monotone,

$$P(N_t = -1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(S_k \leq t). \text{ Or, pour } k \geq 1, \text{ d'après la question 3 :}$$

$$P(S_k \leq t) = P(\lambda S_k \leq \lambda t) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} e^{-u} du \leq \int_0^{\lambda t} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} du = \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

car $e^{-u} \leq 1$ pour $u \geq 0$. Par croissances comparées, $\frac{(\lambda t)^k}{k!} \rightarrow 0$. Donc $P(N_t = -1) = 0$, et d'après la question 4, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(N_t \geq m) = P(S_m \leq t)$.

Étape 2 : calcul. Comme N_t est à valeurs entières, $[N_t \geq n]$ est la réunion disjointe de $[N_t = n]$ et de $[N_t \geq n + 1]$. Donc

$$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n + 1) = P(\lambda S_n \leq \lambda t) - P(\lambda S_{n+1} \leq \lambda t).$$

La densité f_m de λS_m étant nulle sur $] -\infty, 0]$, $P(\lambda S_m \leq \lambda t) = \int_0^{\lambda t} f_m(u) du$, d'où :

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

Rectification de l'énoncé. Le texte original écrit « $t \in \mathbb{R}_+$ » alors que N_t n'est défini que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$; l'énoncé adapté précise $t \in \mathbb{R}_+^*$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $a = \lambda t > 0$.

Méthode 1 — Intégration par parties.

Les fonctions $u \mapsto \frac{u^n}{n!}$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, a]$, de dérivées $u \mapsto \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}$ et $u \mapsto e^{-u}$. Par intégration par parties :

$$\int_0^a \frac{u^n}{n!} e^{-u} du = \left[-\frac{u^n}{n!} e^{-u} \right]_0^a + \int_0^a \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du = -\frac{a^n}{n!} e^{-a} + \int_0^a \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du,$$

le crochet étant nul en 0 car $n \geq 1$. En reportant dans la formule de la question 5 :

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Méthode 2 — Vérification par dérivation.

Pour $x \geq 0$, posons $G(x) = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^x \frac{u^n}{n!} e^{-u} du - \frac{x^n}{n!} e^{-x}$. Les intégrandes étant continus, G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (théorème fondamental) et

$$G'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} - \left(\frac{nx^{n-1}}{n!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} \right) = 0.$$

Donc G est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, égale à $G(0) = 0$. En particulier $G(\lambda t) = 0$, ce qui est la formule annoncée.

Comparaison. L'intégration par parties calcule la différence sans connaître le résultat ; la dérivation vérifie un résultat déjà connu ou conjecturé.

Loi de N_t . On a $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{-1\}$ avec $P(N_t = -1) = 0$ (question 5), $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ (question 1) et $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ pour $n \geq 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$: la variable N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt (elle prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$). On vérifie la cohérence :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1.$$

- Code adapté en Python. Les instructions Scilab de l'énoncé original sont remplacées par leurs équivalents Python (`rd.exponential` pour `grand`, `plt.plot` pour `plot2d`), le paramètre `lambda` est renommé `lam` (mot réservé en Python), les indices sont décalés (Python numérote à partir de 0) et une coquille de l'original (appel `evolution_S(T; lambda)` dans une fonction dont le paramètre est `t`) est rectifiée.

Tous les codes ci-dessous ont été exécutés avec les importations suivantes :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

import matplotlib.pyplot as plt
```

(a) S_n est la somme de n réalisations indépendantes de la loi exponentielle de paramètre λ . L'instruction `rd.exponential(1/lam, n)` fournit un tableau de ces n réalisations (le premier argument est l'échelle $1/\lambda$, et non λ) ; `np.sum` en fait la somme.

Python

```
def simulation_S(n, lam):

    X = rd.exponential(1/lam, n)    # n réalisations indépendantes de loi E(lam)

    U = np.sum(X)                   # réalisation de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ 

    return U
```

Contrôle expérimental (code exécuté) : sur 20 000 appels `simulation_S(5, 2)`, la moyenne observée vaut environ 2,50, en accord avec $E(S_5) = \frac{5}{\lambda} = 2,5$. Cette observation ne constitue pas une preuve.

(b) D'après la remarque préliminaire, N_t est le nombre d'indices $k \geq 1$ tels que $S_k \leq t$. On construit $S_1, S_2, \dots$ successivement et on compte les termes inférieurs ou égaux à t ; on s'arrête au premier $S_k > t$, ce qui est légitime car la suite (S_k) est croissante.

Python

```
def simulation_N(t, lam):

    V = 0                                # nombre de  $S_k \leq t$  déjà trouvés

    S = rd.exponential(1/lam)            # S contient  $S_1$ 

    while S <= t:

        V = V + 1

        S = S + rd.exponential(1/lam)    # passage de  $S_k$  à  $S_{k+1}$ 

    return V
```

Justification. Au moment de chaque test de la boucle, S contient S_{V+1} . La boucle s'arrête au premier passage où $S_{V+1} > t$; on a alors $S_V \leq t < S_{V+1}$ (avec $S_0 = 0 \leq t$), donc $V = N_t$. La boucle se termine presque sûrement, puisque $P(N_t = -1) = 0$ (question 5).

Remarque. Une fois la fonction `evolution_S` de la question (c) écrite, on peut aussi renvoyer `len(evolution_S(t, lam))`, qui est le nombre de termes $S_k \leq t$.

Contrôle expérimental (code exécuté) : sur 20 000 appels `simulation_N(2, 1.5)`, la moyenne et la variance empiriques valent environ 2,99 et 2,97, et la fréquence de la valeur 0 vaut environ 0,051, en accord avec la loi de Poisson de paramètre $\lambda t = 3$ (espérance et variance 3, $P(N_t = 0) = e^{-3} \approx 0,050$).

- (c) La boucle doit se poursuivre tant que la valeur courante S vérifie $S \leq t$, et la mise à jour consiste à ajouter une nouvelle réalisation de loi exponentielle.

Python

```
def evolution_S(t, lam):
    L = []
    S = rd.exponential(1/lam)
    while S <= t:
        L = L + [S]
        S = S + rd.exponential(1/lam)
    return L
```

À la sortie, `L` contient exactement $S_1, \dots, S_{N_t}$, c'est-à-dire tous les S_k inférieurs ou égaux à t (liste vide si $S_1 > t$).

- (d) Sur la figure 1, N_t vaut i sur l'intervalle $[S_i, S_{i+1}[$. Le premier tracé représente le palier de hauteur 0 sur $[0, S_1]$. Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il faut tracer le segment horizontal joignant les points (S_i, i) et (S_{i+1}, i) . Comme `S[i-1]` contient S_i et `S[i]` contient S_{i+1} , la bonne instruction est `i)` :

Python

```
def trace_N(t, lam):
    S = evolution_S(t, lam)
    n = len(S)
    plt.plot([0, S[0]], [0, 0])
    for i in range(1, n):
        plt.plot([S[i-1], S[i]], [i, i])
```

```
plt.show()
return S
```

Les autres propositions sont incorrectes : ii) échange les rôles des abscisses (temps) et des ordonnées (valeurs de N_t) ; iii) trace à la hauteur i l'intervalle $[S_{i-1}, S_i]$, sur lequel N_t vaut $i - 1$ (et, pour $i = 1$, $S[-1]$ désigne en Python le dernier élément de la liste) ; iv) mélange un indice i et un temps S_{i+1} en abscisse.

Remarques. La fonction trace la trajectoire jusqu'au temps S_n seulement : le dernier palier, de hauteur n sur $[S_n, t]$, n'est pas tracé. Elle suppose aussi la liste S non vide ; si $S_1 > t$, l'accès à $S[0]$ provoque une erreur (pour $t = 7$ et $\lambda = 1$, cela arrive avec la probabilité $e^{-7} \approx 9 \cdot 10^{-4}$). La fonction a été exécutée.

(e) Lecture de la figure. Les extrémités des paliers ont été mesurées sur la figure originale (précision de lecture de l'ordre de 0,05) :

Hauteur du palier	Intervalle lu
0	$[0 ; 0,50]$
1	$[0,50 ; 2,10]$
2	$[2,10 ; 2,70]$
3	$[2,70 ; 3,50]$
4	$[3,50 ; 4,10]$
5	$[4,10 ; 6,99]$

D'après (d), le palier de hauteur i commence en S_i et le dernier segment tracé est $[S_{n-1}, S_n]$ à la hauteur $n - 1 = 5$. On lit donc $n = 6$ et

$S_1 \approx 0,5, S_2 \approx 2,1, S_3 \approx 2,7, S_4 \approx 3,5, S_5 \approx 4,1, S_6 \approx 7,0$ (avec $S_6 \leq 7$).

Valeurs de N_t . Comme $S_3 \leq 3,2 < S_4$, on a $N_{3,2} = 3$. Comme $S_5 \leq 5,5 < S_6$, on a $N_{5,5} = 5$. Ces deux valeurs sont lues sans ambiguïté, les instants 3,2 et 5,5 étant loin des extrémités des paliers.

Valeurs approchées. $S_2 \approx 2,1$ et $X_4 = S_4 - S_3 \approx 3,5 - 2,7 = 0,8$.

Partie B - Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

8. Propriétés élémentaires.

(a) D'après (H_1) , $N_0 = 0$, donc $[N_0 = 0] = \Omega$ et

$$p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1.$$

(b) Soient $t, h \in \mathbb{R}_+$ et $D = N_{t+h} - N_t$. C'est une différence de variables à valeurs entières, donc D est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. D'après (H_3) , D a la même loi que N_h , donc

$$P(D \geq 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(D = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k) = P(N_h \geq 0) = 1,$$

la dernière égalité venant de $N_h(\Omega) \subset \mathbb{N} ((H_1))$. Ainsi $P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1$.

9. Détermination de p_0 .

(a) Soient $t, h \in \mathbb{R}_+$ et $D = N_{t+h} - N_t$, de sorte que $N_{t+h} = N_t + D$.

Si $N_t = 0$ et $D = 0$, alors $N_{t+h} = 0 : [N_t = 0] \cap [D = 0] \subset [N_{t+h} = 0]$.

Si $N_{t+h} = 0$ et $D \geq 0$, alors $N_t = -D \leq 0$; comme $N_t \geq 0 ((H_1))$, $N_t = 0$ et $D = 0$. Donc $[N_{t+h} = 0] \subset ([N_t = 0] \cap [D = 0]) \cup [D < 0]$.

Comme $P(D < 0) = 0$ d'après 8.(b), on obtient

$$P([N_t = 0] \cap [D = 0]) \leq p_0(t+h) \leq P([N_t = 0] \cap [D = 0]) + 0.$$

D'après (H_3) , D est indépendante de N_t et de même loi que N_h , donc

$$p_0(t+h) = P(N_t=0)P(D=0) = p_0(t)P(N_h=0) = p_0(t)p_0(h).$$

(b) On montre d'abord que p_0 ne s'annule pas, puis on conclut.

Étape 1 : pour tous $s \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $p_0(ns) = p_0(s)^n$. Pour $n=0$, $p_0(0) = 1 = p_0(s)^0$. Si $p_0(ns) = p_0(s)^n$, alors d'après (a), $p_0((n+1)s) = p_0(ns+s) = p_0(ns)p_0(s) = p_0(s)^{n+1}$. (C'est la première partie de la question (c).)

Étape 2 : pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $p_0(s) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $s \geq 0$ tel que $p_0(s) = 0$; nécessairement $s > 0$ car $p_0(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $h_n = \frac{s}{n} > 0$. D'après l'étape 1, $p_0(h_n)^n = p_0(s) = 0$, donc $p_0(h_n) = 0$, c'est-à-dire $P(N_{h_n} \geq 1) = 1$.

Notons $D_n = N_{2h_n} - N_{h_n}$. D'après (H_3) (avec $t = h = h_n$), D_n est indépendante de N_{h_n} et de même loi que N_{h_n} . Comme $N_{2h_n} = N_{h_n} + D_n$, on a $[N_{h_n} \geq 1] \cap [D_n \geq 1] \subset [N_{2h_n} \geq 2]$, donc

$$P(N_{2h_n} \geq 2) \geq P(N_{h_n} \geq 1) P(D_n \geq 1) = P(N_{h_n} \geq 1)^2 = 1.$$

Ainsi $\frac{P(N_{2h_n} \geq 2)}{2h_n} \geq \frac{n}{2s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or $2h_n \rightarrow 0$ par valeurs positives, et d'après (H_4) , $\frac{P(N_h \geq 2)}{h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0^+$; par composition avec la suite $(2h_n)$, $\frac{P(N_{2h_n} \geq 2)}{2h_n} \rightarrow 0$. C'est une contradiction. Donc $p_0(s) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$.

Étape 3 : conclusion. Soient $0 \leq t < t'$ et $h = t' - t > 0$. D'après (a), $p_0(t') = p_0(t)p_0(h)$. D'après (H_2) , $p_0(h) < 1$, et d'après l'étape 2, $p_0(t) > 0$; donc $p_0(t') < p_0(t)$.

Conclusion

p_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque. La stricte positivité de p_0 est indispensable : sans elle, $p_0(t)p_0(h) < p_0(t)$ ne serait pas acquis.

- (c) La relation $p_0(ns) = p_0(s)^n$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$, a été démontrée par récurrence à l'étape 1 de (b) : $p_0(0) = 1 = p_0(s)^0$, et $p_0((n+1)s) = p_0(ns)p_0(s)$ d'après (a).

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et $s = \frac{m}{n}$. D'une part $p_0(m) = p_0(ns) = p_0\left(\frac{m}{n}\right)^n$; d'autre part $p_0(m) = p_0(m \cdot 1) = p_0(1)^m$. Donc $p_0\left(\frac{m}{n}\right)^n = p_0(1)^m$. Les réels $p_0\left(\frac{m}{n}\right)$ et $p_0(1)$ sont strictement positifs d'après 9.(b); en prenant le logarithme :

$$n \ln p_0\left(\frac{m}{n}\right) = m \ln p_0(1), \text{ donc } p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{m}{n} \ln p_0(1)\right) = p_0(1)^{m/n}.$$

- (d) Existence de λ . D'après 9.(b) et (H_2) , $0 < p_0(1) < 1$, donc $\lambda = -\ln p_0(1)$ est un réel strictement positif, et c'est l'unique réel tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$.

D'après (c), pour tout rationnel positif $r = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$) : $p_0(r) = p_0(1)^r = e^{-\lambda r}$.

Soit $t > 0$, et soient $(u_n), (v_n)$ les suites de rationnels données. Comme $v_n \geq t > 0$, les v_n sont des rationnels positifs. Comme $u_n \rightarrow t > 0$, il existe un rang n_0 tel que $u_n > \frac{t}{2} > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, $0 < u_n \leq t \leq v_n$ et, p_0 étant décroissante :

$$e^{-\lambda v_n} = p_0(v_n) \leq p_0(t) \leq p_0(u_n) = e^{-\lambda u_n}.$$

Par continuité de l'exponentielle, les deux membres extrêmes tendent vers $e^{-\lambda t}$. Par passage à la limite dans les inégalités larges (le terme central ne dépend pas de n) :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Cette formule vaut aussi pour $t = 0$ d'après 8.(a). Donc $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

10. Loi de N_t .

- (a) D'après 9.(d), $p_0(h) = e^{-\lambda h}$. Le développement limité usuel $e^x = 1 + x + o(x)$ en 0, appliqué à $x = -\lambda h$, donne

$$p_0(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \lambda h + o(h).$$

(b) Comme $N_h(\Omega) \subset \mathbb{N}$, tout $\omega \in \Omega$ vérifie exactement une des trois conditions $N_h(\omega) = 0$, $N_h(\omega) = 1$, $N_h(\omega) \geq 2$: les trois événements sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω . C'est un système complet d'événements, donc

$$p_0(h) + p_1(h) + P(N_h \geq 2) = 1.$$

Avec (a) et (H_4) :

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) - P(N_h \geq 2) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda h + o(h) - o(h) = \lambda h + o(h).$$

(c) Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. Notons $D = N_{t+h} - N_h$. D'après (H_3) , appliqué au couple de réels (h, t) , la variable $D = N_{h+t} - N_h$ est indépendante de N_h et a la même loi que N_t .

Par la formule des probabilités totales avec le système complet de (b) :

$$p_n(t+h) = P([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 0]) + P([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 1]) + r_n(t, h),$$

où $r_n(t, h) = P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geq 2])$ vérifie $0 \leq r_n(t, h) \leq P(N_h \geq 2)$.

Sur $[N_h = 0]$, $N_{t+h} = D$; sur $[N_h = 1]$, $N_{t+h} = 1 + D$. Donc, par indépendance de D et N_h , et comme D a la loi de N_t :

$$P([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 0]) = P([D = n] \cap [N_h = 0]) = p_n(t)p_0(h),$$

$$P([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 1]) = P([D = n-1] \cap [N_h = 1]) = p_{n-1}(t)p_1(h)$$

(avec $n - 1 \geq 0$).

On obtient, pour tous $t \geq 0$, $h > 0$ et $n \geq 1$:

$$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + r_n(t, h), \quad 0 \leq r_n(t, h) \leq P(N_h \geq 2). \quad (\star)$$

D'après (H_4) , $r_n(t, h) = o(h)$ quand $h \rightarrow 0^+$; c'est l'égalité demandée. On retiendra que la majoration de $r_n(t, h)$ ne dépend pas de t .

(d) Développement. D'après $(\star)$, (a) et (b), t étant fixé et $p_n(t)$, $p_{n-1}(t)$ étant des constantes de $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} p_n(t+h) - p_n(t) &= (p_0(h) - 1)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + r_n(t, h) \underset{h \rightarrow 0}{=} -\lambda h p_n(t) \\ &\quad + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

En divisant par $h > 0$:

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + o(1).$$

Ceci montre que p_n est dérivable à droite en tout $t \in \mathbb{R}_+$, de dérivée à droite $\lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$. Pour conclure à la dérivabilité en $t > 0$, il faut aussi étudier le taux d'accroissement à gauche ; on le fait à l'aide de $(\star)$ appliqué en $t - h$.

Continuité des p_k . Soient $s \geq 0$ et $h > 0$. Pour $k \geq 1$, d'après $(\star)$ et (b) :

$$\begin{aligned} |p_k(s+h) - p_k(s)| &\leq (1 - p_0(h))p_k(s) + p_1(h)p_{k-1}(s) + r_k(s, h) \leq (1 - p_0(h)) + p_1(h) \\ &\quad + P(N_h \geq 2) = 2(1 - p_0(h)). \end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $|p_0(s+h) - p_0(s)| = e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda h}) \leq 1 - p_0(h)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|p_k(s+h) - p_k(s)| \leq 2(1 - e^{-\lambda h}).$$

Pour $t > 0$ et $0 < h \leq t$, en prenant $s = t - h$, on obtient

$$|p_k(t) - p_k(t-h)| \leq 2(1 - e^{-\lambda h}) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0^+ : p_k(t-h) \rightarrow p_k(t).$$

Dérivée à gauche. Soit $t > 0$ et $0 < h \leq t$. D'après $(\star)$ en $s = t - h$:

$$\frac{p_n(t) - p_n(t-h)}{h} = \frac{p_0(h) - 1}{h} p_n(t-h) + \frac{p_1(h)}{h} p_{n-1}(t-h) + \frac{r_n(t-h, h)}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0^+$: $\frac{p_0(h) - 1}{h} \rightarrow -\lambda$ d'après (a), $\frac{p_1(h)}{h} \rightarrow \lambda$ d'après (b),

$0 \leq \frac{r_n(t-h, h)}{h} \leq \frac{P(N_h \geq 2)}{h} \rightarrow 0$ d'après (H_4) , et $p_n(t-h) \rightarrow p_n(t)$,

$p_{n-1}(t-h) \rightarrow p_{n-1}(t)$ d'après l'étape précédente. Le taux d'accroissement à gauche tend donc vers $\lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$.

Conclusion

les dérivées à gauche et à droite existent et coïncident en tout $t > 0$, et la dérivée à droite existe en 0. Donc p_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p'_n(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)).$$

(e) Pour $n = 0$, $q_0(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1$: q_0 est dérivable. Pour $n \geq 1$, q_n est le produit des fonctions dérivables $t \mapsto e^{\lambda t}$ et p_n (question (d)) : elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} q'_n(t) &= \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t} p'_n(t) = \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + \lambda e^{\lambda t} (p_{n-1}(t) - p_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \\ &= \lambda q_{n-1}(t). \end{aligned}$$

(f) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}(n)$: « pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ ».

Initialisation. $q_0(t) = 1 = \frac{(\lambda t)^0}{0!}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F}(n)$ soit vraie. Posons $g(t) = q_{n+1}(t) - \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ pour $t \geq 0$. D'après (e) et $\mathcal{F}(n)$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$g'(t) = \lambda q_n(t) - \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 0.$$

La fonction g , de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, est constante, égale à $g(0) = q_{n+1}(0) = p_{n+1}(0) = P(N_0 = n+1) = 0$, car $N_0 = 0$ et $n+1 \geq 1$. Donc $\mathcal{F}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}_+, \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_t = n) = p_n(t) = e^{-\lambda t} q_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Comme $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$, pour $t > 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt ; pour $t = 0$, $N_0 = 0$ est certaine. On retrouve la loi obtenue dans la partie A.

11. Question adaptée au programme actuel. Les hypothèses (H_1) à (H_4) ne portent que sur des lois et ne disent rien des trajectoires $t \mapsto N_t(\omega)$: sans hypothèse supplémentaire, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}$ peut être vide et l'égalité $[S_1 > t] = [N_t = 0]$ ne peut pas être établie. L'énoncé adapté admet donc que chaque trajectoire est croissante, continue à droite, ne saute aucune valeur entière et n'est pas majorée.

Dans toute la question, on fixe $\omega \in \Omega$ et on écrit N_t pour $N_t(\omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $A_n = \{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}$, de sorte que $S_n = \inf A_n$.

Préliminaire : A_n est non vide. La trajectoire n'étant pas majorée, il existe $t \geq 0$ tel que $N_t \geq n$; comme elle ne saute aucune valeur entière, il existe $s \in [0, t]$ tel que $N_s = n$. Donc $A_n \neq \emptyset$, et A_n est minoré par 0 : S_n est un réel positif.

(a) D'après (H_1) , $N_0 = 0$, donc $0 \in A_0$. Comme $A_0 \subset \mathbb{R}_+$, 0 est un minorant de A_0 qui appartient à A_0 : c'est le minimum de A_0 , donc sa borne inférieure. Ainsi $S_0 = 0$.

(b) On établit un lemme valable pour tout n , qui servira aussi en (e).

Lemme. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$: $S_n \leq t \iff N_t \geq n$.

Étape 1 : $N_{S_n} = n$. La fonction $s \mapsto N_s$ est continue à droite en S_n et à valeurs entières : il existe $\delta > 0$ tel que $|N_s - N_{S_n}| < \frac{1}{2}$, donc $N_s = N_{S_n}$, pour tout $s \in [S_n, S_n + \delta[$. Par définition de la borne inférieure, il existe $s \in A_n$ tel que $S_n \leq s < S_n + \delta$. Alors $N_{S_n} = N_s = n$.

Étape 2 : si $s < S_n$, alors $N_s < n$. Sinon, il existerait $s < S_n$ avec $N_s \geq n$; comme la trajectoire ne saute aucune valeur entière, il existerait $s' \in [0, s]$ tel que $N_{s'} = n$, donc $s' \in A_n$ et $s' < S_n$, ce qui contredit la définition de S_n .

Preuve du lemme. Si $S_n \leq t$, par croissance et d'après l'étape 1, $N_t \geq N_{S_n} = n$. Si $S_n > t$, d'après l'étape 2, $N_t < n$. D'où l'équivalence.

Application. Avec $n = 1$: $S_1 > t \iff N_t < 1 \iff N_t = 0$ (car $N_t \in \mathbb{N}$). Ceci valant pour tout ω :

$$[S_1 > t] = [N_t = 0].$$

(c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après (b) et 9.(d) :

$$P(S_1 \leq t) = 1 - P(S_1 > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

(d) Comme S_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition est nulle sur $] -\infty, 0[$, et elle vaut $1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ d'après (c). C'est la fonction de répartition de la loi

exponentielle de paramètre λ ; la fonction de répartition caractérisant la loi, S_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ .

On retrouve que le premier instant de saut suit la même loi que $S_1 = X_1$ dans la partie A.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}_+$ (et ω fixé). D'après le lemme de (b),

$$\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N_t\} = \{0, 1, \dots, N_t\}.$$

C'est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, de plus grand élément N_t . Donc, pour tout ω :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$

On retrouve exactement la définition de la partie A : les deux définitions du processus de Poisson sont cohérentes.

Relevé des adaptations

Exercice 1, préambule : la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est énoncée pour $n \in \mathbb{N}^*$ au lieu de $n \in \mathbb{N}$; pour $n = 0$, elle ferait intervenir T_{-1} , non défini.

Exercice 2, question 2.(d) : l'inégalité $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ est demandée pour $n \geq 2$ au lieu de $n \geq 1$; l'énoncé original est faux pour $p = 1, n = 1$, car $R_{1,1} \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$. La question 2.(e) n'est pas affectée.

Problème, question 5 : « $t \in \mathbb{R}_+$ » est remplacé par « $t \in \mathbb{R}_+^*$ », car N_t n'est défini que pour $t > 0$.

Problème, question 7 : code adapté en Python. Les commandes Scilab `grand` et `plot2d` sont remplacées par `rd.exponential` (avec l'échelle $1/\lambda$) et `plt.plot`, dont la syntaxe est rappelée ; le paramètre `lambda` est renommé `lam` (mot réservé en Python) ; les en-têtes fonction sont remplacés par `def` ; les indices des propositions de 7.(d) sont décalés pour la numérotation Python à partir de 0 ; `plt.show()` est ajouté ; la coquille `evolution_S(T; lambda)` est rectifiée en `evolution_S(t, lam)`, et «pour $T = 7$ » devient l'appel `trace_N(7, 1)`.

Problème, question 11 : question adaptée au programme actuel par l'ajout d'hypothèses admises sur les trajectoires (croissance, continuité à droite, absence de saut de valeur entière, non-majoration). Sans elles, S_n peut ne pas être défini et la question 11.(b) n'est pas démontrable avec les hypothèses (H_1) à (H_4) , qui ne portent que sur des lois.

Figures : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées (figure 1 de la partie A, et figure de la question 7.(e)).