



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2019

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. Il s'agit de justifier l'existence de l'intégrale, puis de calculer trois intégrales simples.

Existence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (produit de fonctions continues ; pour $n = 0$, c'est la fonction constante égale à 1).

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe, donc I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul de I_0 et I_1 .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$$

Calcul de I_2 .

Méthode 1 — Linéarisation. La formule d'addition $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ avec $a = b = t$ donne $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$, puis avec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$:

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$, soit $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$. Donc :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 2 — Symétrie. Posons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$. Le changement de variable affine

$s = \frac{\pi}{2} - t$ (de classe C^1 , $ds = -dt$) et l'identité $\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos s$ donnent :

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right) (-ds) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \, ds = I_2.$$

Par linéarité et $\cos^2 + \sin^2 = 1$: $I_2 + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$, donc $2I_2 = \frac{\pi}{2}$ et $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

La première méthode est un calcul direct de primitive ; la seconde exploite une symétrie de l'intervalle d'intégration et évite toute formule de duplication, ce qui est utile dès que les puissances deviennent plus élevées.

Conclusion

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1, I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

2.(a) On compare I_{n+1} et I_n grâce à la positivité de l'intégrale.

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$. En multipliant l'inégalité $\cos t \leq 1$ par $(\cos t)^n \geq 0$, on obtient :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq (\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n.$$

Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion

(I_n) est décroissante, positive, donc convergente.

2.(b) On écrit $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)^{n+1} \cos t$ et on intègre par parties.

Posons, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur ce segment, avec $u'(t) = -(n+1) \sin t (\cos t)^n$ et $v'(t) = \cos t$. La formule d'intégration par parties donne :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t) dt = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\cos t)^n dt.$$

Le crochet est nul : en $\frac{\pi}{2}$, $(\cos \frac{\pi}{2})^{n+1} = 0$ car $n+1 \geq 1$; en 0, $\sin 0 = 0$.

Avec $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ et la linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos t)^n - (\cos t)^{n+2}) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$, c'est-à-dire $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

2.(c) On exploite la relation $I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m$ séparément sur les indices pairs et impairs.

Méthode 1 — Récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et

$$I_{2n+1} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+1)!} \pi \text{ »}.$$

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{0!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$ et $\frac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1 = I_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1) \cdot 2^n n! = (2n+2) 2^n n!.$$

Indices pairs : avec $m = 2n$,

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^2 (2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Indices impairs : avec $m = 2n+1$,

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Produit télescopique. Les termes I_m sont strictement positifs :

$t \mapsto (\cos t)^m$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (elle vaut 1 en 0). Pour $n \geq 1$, on peut donc écrire :

$$\frac{I_{2n}}{I_0} = \prod_{p=1}^n \frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \prod_{p=1}^n \frac{2p-1}{2p}.$$

On a

$$\prod_{p=1}^n (2p) = 2^n n!$$

et

$$\prod_{p=1}^n (2p-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{p=1}^n (2p)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Donc $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$

De même,

$$\frac{I_{2n+1}}{I_1} = \prod_{p=1}^n \frac{2p}{2p+1},$$

avec

$$\prod_{p=1}^n (2p+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!},$$

d'où $I_{2n+1} = \frac{2^n n! \cdot 2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$ Les formules restent vraies pour $n = 0$ (produits vides égaux à 1).

La récurrence demande de connaître la formule à l'avance ; le produit télescopique la fait apparaître, ce qui est la démarche à privilégier face à une relation $u_{m+2} = c_m u_m$ sans formule donnée.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

2.(d) Code adapté en Python.

Le vecteur doit contenir $I_0, \dots, I_{2n+1}$, soit $2n+2$ coefficients, d'indices Python 0 à $2n+1$ ($y[m]$ contient I_m). On initialise avec $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. À l'étape $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on calcule les deux nouveaux termes d'indices $2k$ et $2k+1$ grâce à la relation $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ (question 2.(b) avec $m = n+2$) :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}, \quad I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1}.$$

Les n passages dans la boucle remplissent les indices $2, 3, \dots, 2n+1$.

Python

```
import numpy as np

def I(n):
    u = np.zeros(2 * n + 2)
    u[0] = np.pi / 2
    u[1] = 1
    for k in range(1, n + 1):
        u[2 * k] = (2 * k - 1) / (2 * k) * u[2 * k - 2]
        u[2 * k + 1] = (2 * k) / (2 * k + 1) * u[2 * k - 1]
    y = u
    return y
```

Code exécuté : $I(3)$ renvoie un tableau dont les valeurs coïncident avec $\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3\pi}{16}, \frac{8}{15}, \frac{5\pi}{32}, \frac{16}{35}$, conformément à la question 2.(c). Pour $n = 0$, la boucle n'est pas exécutée et la fonction renvoie (I_0, I_1) .

3.(a) On rappelle les développements limités usuels en 0 : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\ln(1+u) = u + o(u)$.

Conclusion

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

3.(b) On compose ces équivalents avec des suites tendant vers 0, en justifiant chaque étape par un quotient de limite 1.

Pour $n \geq 1$, posons $x_n = n^{-1/4} \in]0, 1]$ et $u_n = \cos(x_n) - 1$. Comme $0 < x_n \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \cos x_n < 1$, donc $u_n \in]-1, 0[$; en particulier $u_n \neq 0$ et $\ln(\cos x_n) = \ln(1 + u_n)$ est bien défini.

Étape 1. $x_n \rightarrow 0$ et, par 3.(a), $\frac{\cos(x) - 1}{-x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$; par composition d'une limite de fonction avec une suite, $\frac{u_n}{-x_n^2/2} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $u_n \sim -\frac{x_n^2}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}}$. En particulier $u_n \rightarrow 0$.

Étape 2. Comme $u_n \rightarrow 0$ avec $u_n \neq 0$ et $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$, on obtient $\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} \rightarrow 1$, donc $\ln(\cos x_n) \sim u_n$.

Étape 3. Par transitivité, $\ln(\cos x_n) \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}$, puis par compatibilité des équivalents avec le produit (par n) :

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{2\sqrt{n}} = -\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Limite. Comme $\cos(x_n) > 0$, $(\cos(n^{-1/4}))^n = \exp(n \ln \cos(n^{-1/4}))$. Deux suites équivalentes ont la même limite et $-\frac{1}{2}\sqrt{n} \rightarrow -\infty$, donc $n \ln \cos(n^{-1/4}) \rightarrow -\infty$.

Comme $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$:

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n = 0.$$

3.(c) Même méthode avec $y_n = n^{-2/3} \in]0, 1]$ pour $n \geq 1$. Les étapes 1 à 3 de la question précédente s'appliquent mot pour mot (car $y_n \rightarrow 0$ et $0 < \cos y_n < 1$) et donnent :

$$n \ln(\cos(n^{-2/3})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \left(-\frac{y_n^2}{2}\right) = -\frac{n \cdot n^{-4/3}}{2} = -\frac{1}{2}n^{-1/3}.$$

Comme $-\frac{1}{2}n^{-1/3} \rightarrow 0$, on a $n \ln \cos(n^{-2/3}) \rightarrow 0$, puis, par continuité de l'exponentielle en 0 :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = e^0 = 1.$$

4.(a) On majore l'intégrande par 1 sur un intervalle de longueur $n^{-1/4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < n^{-1/4} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, donc $[0, n^{-1/4}] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, où $0 \leq \cos t \leq 1$, d'où $0 \leq (\cos t)^n \leq 1$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} 1 dt = n^{-1/4}.$$

Conclusion

l'inégalité demandée est établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.(b) On utilise la décroissance de $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n^{-1/4}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $0 \leq \cos t \leq \cos(n^{-1/4})$. La fonction $y \mapsto y^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient $0 \leq (\cos t)^n \leq (\cos(n^{-1/4}))^n$.

Par croissance de l'intégrale (les bornes vérifient $n^{-1/4} \leq \frac{\pi}{2}$) :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \right) (\cos(n^{-1/4}))^n \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n,$$

la dernière inégalité venant de $n^{-1/4} \geq 0$ et $(\cos(n^{-1/4}))^n \geq 0$.

Conclusion

l'inégalité demandée est établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.(c) On encadre I_n .

Méthode 1 — Découpage de l'intégrale. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de Chasles et les questions 4.(a) et 4.(b) donnent :

$$0 \leq I_n = \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt + \int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4} + \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

Le majorant tend vers 0 : $n^{-1/4} \rightarrow 0$ et $(\cos(n^{-1/4}))^n \rightarrow 0$ d'après 3.(b). Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Relation de Wallis. Posons $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$. D'après 2.(b),

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \text{ donc :}$$

$$J_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} I_n = J_n.$$

La suite (J_n) est constante, égale à $J_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $0 < I_{n+1} \leq I_n$ (question 2.(a) et positivité stricte vue en 2.(c)) :

$$0 < I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Donc $0 < I_{n+1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \rightarrow 0$, et par encadrement $I_n \rightarrow 0$.

La première méthode, imposée par la structure de l'énoncé, repose sur une concentration de l'intégrale près de 0 ; la seconde n'utilise que la relation de récurrence et donne de plus un ordre de grandeur, $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

5.(a) On minore l'intégrale, puis on compare la série à une série de Riemann.

Minoration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < n^{-2/3} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Par Chasles,

$I_n = \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt + \int_{n^{-2/3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$, et la seconde intégrale est positive (intégrande positive, bornes croissantes), d'où la première inégalité.

Pour $t \in [0, n^{-2/3}]$, la décroissance de $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donne $\cos t \geq \cos(n^{-2/3}) > 0$, puis $(\cos t)^n \geq (\cos(n^{-2/3}))^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

Nature de la série.

Méthode 1 — Comparaison avec la minoration obtenue. Posons

$v_n = n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n > 0$ pour $n \geq 1$. D'après 3.(c), $(\cos(n^{-2/3}))^n \rightarrow 1$, donc

$v_n \sim \frac{1}{n^{2/3}}$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{2/3}}$$

diverge car $\frac{2}{3} \leq 1$; les termes étant positifs, le critère d'équivalence montre que

$$\sum v_n$$

diverge. Enfin $0 \leq v_n \leq I_n$ pour $n \geq 1$: par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum I_n$$

diverge.

Méthode 2 — Relation de Wallis. On a vu en 4.(c) (méthode 2) que $nI_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2}$

pour $n \geq 1$. Comme $0 < I_n \leq I_{n-1}$, on obtient $I_{n-1}^2 \geq I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$, donc pour $n \geq 1$:

$$I_{n-1} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$), donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} I_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n \geq 0} I_n,$$

diverge.

La première méthode suit l'énoncé et repose sur une minoration locale de l'intégrale; la seconde montre que la divergence est même « de l'ordre de

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

», ce qui est plus précis que

$$\sum \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Conclusion

la série de terme général I_n diverge (vers $+\infty$, ses termes étant positifs).

5.(b) Code adapté en Python.

Le terme de rang n de la suite des sommes partielles est

$$S_n = \sum_{k=0}^n I_k.$$

Méthode 1 — Réutilisation de la fonction I. Le vecteur $I(n)$ contient $I_0, \dots, I_{2n+1}$, donc en particulier $I_0, \dots, I_n$ (car $n \leq 2n+1$), d'indices Python 0 à n . La tranche $u[0:n+1]$ contient exactement ces $n+1$ termes.

Python

```
import numpy as np

def somme_I(n):
    u = I(n)
    return np.sum(u[0:n + 1])
```

Méthode 2 — Calcul direct par la récurrence. On conserve deux termes consécutifs : au début du passage d'indice k , a contient I_k et b contient I_{k+1} ; on ajoute a à la somme, puis on calcule $I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}I_k$ et on décale.

Python

```
import numpy as np

def somme_I2(n):
    a = np.pi / 2
    b = 1
    S = 0
    for k in range(n + 1):
        S = S + a
        c = (k + 1) / (k + 2) * a
        a = b
        b = c
    return S
```

La première version est la plus courte mais calcule des termes inutiles ; la seconde n'utilise aucun tableau, ce qui est préférable pour de grandes valeurs de n .

Codes exécutés : les deux fonctions renvoient la même valeur (par exemple environ 5.1452 pour $n = 5$ et $\frac{\pi}{2}$ pour $n = 0$). La croissance des valeurs obtenues pour n grand est une illustration numérique, non une preuve, de la divergence établie en 5.(a).

6.(a) On exprime $\cos t$ en fonction de $\cos \frac{t}{2}$, puis on utilise $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Alors $\frac{t}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \frac{t}{2} > 0$ et $\tan \frac{t}{2} = \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)}$ est défini.

D'une part, avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$1 + \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2)} = \frac{1}{\cos^2(t/2)}.$$

D'autre part, la formule d'addition avec $a = b = \frac{t}{2}$ donne

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1, \text{ donc } \cos t + 1 = 2 \cos^2 \frac{t}{2}.$$

Conclusion

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \cos(t) + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{2}{1 + \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

6.(b) L'intégrale existe : $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos t}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où $1 + \cos t \geq 1 > 0$.

Méthode 1 — Changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$. La fonction $u \mapsto \tan \frac{t}{2}$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, de réciproque $\psi : u \mapsto 2 \arctan u$. La fonction ψ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $\psi'(u) = \frac{2}{1 + u^2}$. La formule de changement de variable donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t} = \int_0^1 \frac{\psi'(u)}{1 + \cos(\psi(u))} du.$$

Pour $u \in [0, 1]$, $\psi(u) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset]-\pi, \pi[$ et $\tan \frac{\psi(u)}{2} = \tan(\arctan u) = u$, donc d'après 6.(a), $\frac{1}{1 + \cos(\psi(u))} = \frac{1 + u^2}{2}$. Ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t} = \int_0^1 \frac{1 + u^2}{2} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du = \int_0^1 1 du = 1.$$

Méthode 2 — Reconnaissance d'une primitive. La fonction $h : t \mapsto \tan \frac{t}{2}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $h'(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{t}{2}\right)$, qui vaut $\frac{1}{1 + \cos t}$ d'après 6.(a). Donc h est une primitive de l'intégrande et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$$

Le changement de variable, imposé, est la méthode systématique pour les fractions rationnelles en cos et sin ; la seconde méthode montre qu'ici le calcul se réduit à repérer une dérivée, ce qui est plus rapide une fois l'identité 6.(a) connue.

Conclusion

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1.$$

6.(c) On écrit $(-1)^k I_k$ comme intégrale d'une puissance de $-\cos t$ et on somme une progression géométrique finie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale (somme finie) :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n (-\cos t)^k dt.$$

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la raison $q = -\cos t$ vérifie $1 - q = 1 + \cos t \geq 1 \neq 0$, donc :

$$\sum_{k=0}^n (-\cos t)^k = \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}.$$

Les deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos t}$ et $t \mapsto \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}$ sont continues sur le segment, donc par linéarité :

Conclusion

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

6.(d) On majore la valeur absolue de l'intégrale par l'intégrale de la valeur absolue (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt.$$

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 + \cos t \geq 1$ et $(\cos t)^{n+1} \geq 0$, donc $\frac{(\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} \leq (\cos t)^{n+1}$. Par croissance de l'intégrale, le majorant est inférieur à I_{n+1} .

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

6.(e) On étudie la suite des sommes partielles

$$T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k.$$

D'après 6.(b) et 6.(c), $T_n = 1 - R_n$ avec $R_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt$. D'après 6.(d), $|R_n| \leq I_{n+1}$, et $I_{n+1} \rightarrow 0$ d'après 4.(c). Par encadrement, $R_n \rightarrow 0$, donc $T_n \rightarrow 1$.

Conclusion

la série

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$$

converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k = 1.$$

Remarque : la convergence est seulement « alternée » ; la série

$$\sum I_k$$

diverge (question 5.(a)), donc la série n'est pas absolument convergente.

EXERCICE 2

Partie A

1. On calcule S^2 , puis on utilise le polynôme annulateur obtenu.

Les lignes de S sont $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Multiplier à gauche par S échange les lignes 1 et 3 : S^2 est la matrice S dont on a échangé les lignes 1 et 3, soit

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est donc annulateur de S . Toute valeur propre de S est racine de tout polynôme annulateur, donc $\text{Sp}(S) \subset \{-1, 1\}$.

Réciproquement, avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$:

$$SV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1, \quad SV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -V_2.$$

Donc 1 et -1 sont valeurs propres de S .

Conclusion

$$S^2 = I_3 \text{ et } \text{Sp}(S) = \{-1, 1\}.$$

2. On traduit les conditions de symétrie en équations linéaires.

Pour $n = 3$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $x_1 = x_3, x_2 = x_2, x_3 = x_1$,

c'est-à-dire $x_1 = x_3$. Donc :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Cette famille est génératrice de F et libre (si

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

alors $a = b = 0$) : c'est une base de F , et $\dim F = 2$.

X est antisymétrique si et seulement si $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -x_2$, c'est-à-dire $x_3 = -x_1$ et

$x_2 = 0$. Donc

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) ;$$

ce vecteur étant non nul, il forme une base de G , et $\dim G = 1$.

Sous-espaces propres. Pour tout X , $SX = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$SX = X \iff x_3 = x_1 \iff X \in F, \quad SX = -X \iff (x_3 = -x_1 \text{ et } x_2 = 0) \iff X \in G.$$

Conclusion

$F = E_1(S)$ et $G = E_{-1}(S)$; une base de F est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

et une base de G est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

3. Méthode 1 — Espaces propres et dimensions. F et G sont des sous-espaces propres de S associés aux valeurs propres distinctes 1 et -1 ; la somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe, donc la somme $F + G$ est directe. Alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Un sous-espace de même dimension (finie) que l'espace ambiant lui est égal.

Méthode 2 — Décomposition explicite. Pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, posons $Y = \frac{X + SX}{2}$ et $Z = \frac{X - SX}{2}$. Comme $S^2 = I_3$, $SY = \frac{SX + X}{2} = Y$ et $SZ = \frac{SX - X}{2} = -Z$, donc $Y \in F$ et $Z \in G$ d'après la question 2, et $X = Y + Z$: ainsi $F + G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus, si $X \in F \cap G$, alors $X = SX = -X$, donc $X = 0$: la somme est directe.

La première méthode utilise le cours de réduction et un argument de dimension ; la seconde, purement algébrique, fournit explicitement la décomposition et se généralise telle quelle à tout n (c'est la question 5.(a)).

Conclusion

$$F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Partie B

- 4.(a) La matrice S a des coefficients égaux à 1 exactement sur l'antidiagonale :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S est symétrique : pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i = n + 1 - j \iff j = n + 1 - i$, donc $s_{j,i} = s_{i,j}$.

S est une matrice symétrique réelle ; d'après le théorème spectral (admis au programme), elle est diagonalisable, avec de plus une matrice de passage orthogonale.

Conclusion

S est diagonalisable. On retrouvera ce résultat de façon élémentaire en 5.(b).

4.(b) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(SX)_i = \sum_{j=1}^n s_{i,j} x_j.$$

Le seul indice j tel que $s_{i,j} \neq 0$ est $j = n + 1 - i$, pour lequel $s_{i,j} = 1$. Donc $(SX)_i = x_{n+1-i}$.

Conclusion

$$SX = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (S \text{ « retourne » le vecteur}).$$

4.(c) Méthode 1 — Calcul des coefficients. Par définition du produit matriciel, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$(S^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k} s_{k,j}.$$

Le seul terme éventuellement non nul est celui d'indice $k = n + 1 - i$ (seul k tel que $s_{i,k} \neq 0$), donc $(S^2)_{i,j} = s_{n+1-i,j}$. Or $s_{n+1-i,j} = 1 \iff n + 1 - i = n + 1 - j \iff i = j$. Donc $(S^2)_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Méthode 2 — Par l'action sur les vecteurs. D'après 4.(b), S retourne l'ordre des coordonnées; retourner deux fois redonne le vecteur initial : pour tout X , $S^2X = S(SX) = X$, puisque la coordonnée i de $S(SX)$ est la coordonnée $n + 1 - i$ de SX , c'est-à-dire $x_{n+1-(n+1-i)} = x_i$. En appliquant ceci aux vecteurs de la base canonique, les colonnes de S^2 sont celles de I_n .

La première méthode répond à la consigne (expression en fonction des $s_{k,\ell}$) ; la seconde est souvent plus rapide pour les matrices décrites par leur action.

Conclusion

$$S^2 = I_n.$$

5.(a) On procède par analyse-synthèse. On remarque d'abord, d'après 4.(b), que $X \in F \iff SX = X$ et $X \in G \iff SX = -X$.

Analyse. Supposons $X = Y + Z$ avec $Y \in F$ et $Z \in G$. Alors $SX = SY + SZ = Y - Z$. En combinant avec $X = Y + Z$, on obtient nécessairement :

$$Y = \frac{X + SX}{2}, \quad Z = \frac{X - SX}{2}.$$

Cela prouve l'unicité.

Synthèse. Posons $Y = \frac{X + SX}{2}$ et $Z = \frac{X - SX}{2}$. On a bien $Y + Z = X$. Avec $S^2 = I_n$ (question 4.(c)) : $SY = \frac{SX + S^2X}{2} = \frac{SX + X}{2} = Y$, donc $Y \in F$;
 $SZ = \frac{SX - X}{2} = -Z$, donc $Z \in G$. Cela prouve l'existence.

Conclusion

il existe un unique couple $(Y, Z) \in F \times G$ tel que $X = Y + Z$, à savoir $Y = \frac{X + SX}{2}$,
 $Z = \frac{X - SX}{2}$. Autrement dit, $F \oplus G = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

5.(b) On montre que 1 et -1 sont les seules valeurs propres et que leurs sous-espaces propres sont F et G .

Valeurs propres possibles. Comme $S^2 = I_n$, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de S ; toute valeur propre de S en est racine, donc $\text{Sp}(S) \subset \{-1, 1\}$.

Sous-espaces associés. D'après la remarque de 5.(a), $\text{Ker}(S - I_n) = F$ et $\text{Ker}(S + I_n) = G$.

Ces espaces sont non nuls. Le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 est symétrique et non nul, donc $F \neq \{0\}$. Le vecteur $E_1 - E_n$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique, a pour coordonnées $x_1 = 1$, $x_n = -1$ et $x_i = 0$ sinon ; comme $n \geq 2$, on a $1 \neq n$, ce vecteur est non nul, et il vérifie $x_i = -x_{n+1-i}$ pour tout i , donc $G \neq \{0\}$.

Ainsi 1 et -1 sont valeurs propres de S , $\text{Sp}(S) = \{-1, 1\}$, $E_1(S) = F$ et $E_{-1}(S) = G$.

Remarque : comme $F \oplus G = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (question 5.(a)), la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n , ce qui redonne la diagonalisabilité de S sans le théorème spectral.

Conclusion

les sous-espaces propres de S sont F , associé à la valeur propre 1, et G , associé à la valeur propre -1 .

6.(a) On compare les coefficients des deux produits. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$(AS)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,j} = a_{i,n+1-j},$$

car le seul k tel que $s_{k,j} \neq 0$ est $k = n + 1 - j$. De même :

$$(SA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k} a_{k,j} = a_{n+1-i,j},$$

car le seul k tel que $s_{i,k} \neq 0$ est $k = n + 1 - i$. L'hypothèse sur A donne l'égalité de ces coefficients pour tout (i, j) .

Conclusion

$$AS = SA.$$

6.(b) Par hypothèse $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Avec 6.(a) :

$$A(SX) = (AS)X = (SA)X = S(AX) = \lambda SX.$$

De plus $SX \neq 0$: S est inversible (car $S^2 = I_n$, donc $S^{-1} = S$), et si l'on avait $SX = 0$, on aurait $X = S(SX) = 0$, ce qui est exclu.

Conclusion

SX est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ .

6.(c) Par linéarité et d'après 6.(b) :

$$AY = AX + A(SX) = \lambda X + \lambda SX = \lambda Y.$$

Conclusion

$$AY = \lambda Y.$$

6.(d) On distingue deux cas selon que $Y = X + SX$ est nul ou non.

Le vecteur Y est symétrique : $SY = SX + S^2X = SX + X = Y$, donc $Y \in F$ d'après

5.(b). De plus $AY = \lambda Y$ d'après 6.(c), donc $Y \in E_\lambda(A)$.

Premier cas : $Y \neq 0$. Alors Y est un vecteur symétrique non nul de $E_\lambda(A)$.

Second cas : $Y = 0$. Alors $SX = -X$, donc $X \in G$: X est un vecteur antisymétrique, non nul (c'est un vecteur propre), et il appartient à $E_\lambda(A)$.

Conclusion

$E_\lambda(A)$ contient un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.

PROBLÈME

Notations et remarques préliminaires. On note B_m (resp. N_m) l'événement « le m -ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) ». Chaque tirage ajoute exactement une boule, donc juste avant le $(k+1)$ -ième tirage, l'urne contient $k+2$ boules. Un tirage blanc ajoute une boule noire et ne change pas le nombre de boules blanches ; un tirage noir ajoute une boule blanche. Ainsi :

$$X_k = 1 + (\text{nombre de boules noires tirées lors des } k \text{ premiers tirages}).$$

En particulier, il y a toujours au moins une boule de chaque couleur dans l'urne.

Partie A

1. Avant le premier tirage, l'urne contient 1 blanche et 1 noire. Si la boule tirée est blanche (probabilité $\frac{1}{2}$), on ajoute une noire et $X_1 = 1$; si elle est noire (probabilité $\frac{1}{2}$), on ajoute une blanche et $X_1 = 2$.

Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P([X_1 = 1]) = P([X_1 = 2]) = \frac{1}{2}$. La variable $X_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc (variable finie, espérance et variance existent) :

$$E(X_1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad V(X_1) = V(X_1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion

X_1 suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$, $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{1}{4}$.

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$, de probabilités non nulles.

Sachant $[X_1 = 1]$, l'urne contient 1 blanche et 2 noires : on obtient $X_2 = 1$ en tirant une blanche (probabilité $\frac{1}{3}$) et $X_2 = 2$ en tirant une noire (probabilité $\frac{2}{3}$).

Sachant $[X_1 = 2]$, l'urne contient 2 blanches et 1 noire : on obtient $X_2 = 2$ en tirant une blanche (probabilité $\frac{2}{3}$) et $X_2 = 3$ en tirant une noire (probabilité $\frac{1}{3}$).

Ainsi $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et :

$$P([X_2 = 1]) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad P([X_2 = 2]) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad P([X_2 = 3]) = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion

la loi de X_2 est bien celle annoncée (et $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1$).

3. D'après la remarque préliminaire, $X_k = 1 + N$ où N est le nombre de boules noires tirées parmi k tirages, avec $0 \leq N \leq k$. Donc $X_k(\Omega) \subset \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Réciproquement, soit $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$. Considérons l'événement «les $i-1$ premiers tirages donnent une boule noire et les $k-i+1$ suivants une boule blanche». À chaque tirage, l'urne contient au moins une boule de chaque couleur, donc chaque tirage, conditionnellement aux précédents, a une probabilité strictement positive ; par la formule des probabilités composées, cet événement a une probabilité strictement positive, et il est inclus dans $[X_k = i]$. Donc $P([X_k = i]) > 0$.

Conclusion

$X_k(\Omega) = \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, et chaque valeur est prise avec une probabilité strictement positive.

4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$; d'après 3, $P([X_k = j]) > 0$, donc la probabilité conditionnelle est définie.

Sachant $[X_k = j]$, l'urne contient, juste avant le $(k+1)$ -ième tirage, $k+2$ boules dont j blanches et $k+2-j$ noires. Si l'on tire une blanche (probabilité $\frac{j}{k+2}$), on ajoute une noire et $X_{k+1} = j$; si l'on tire une noire (probabilité $\frac{k+2-j}{k+2}$), on ajoute une blanche et $X_{k+1} = j+1$.

Conclusion

$$P_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = \frac{j}{k+2} \text{ si } i = j, \quad \frac{k+2-j}{k+2} \text{ si } i = j+1, \quad 0 \text{ si } i \notin \{j, j+1\}.$$

5. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet

d'événements $([X_k = j])_{j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket}$, de probabilités non nulles. On convient que

$P([X_k = j]) = 0$ pour $j \notin \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ (événement impossible). Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P([X_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^{k+1} P([X_k = j]) P_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]).$$

D'après la question 4, seuls peuvent être non nuls les termes d'indices $j = i$ et $j = i - 1$ (lorsqu'ils appartiennent à $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$). Le terme $j = i$ vaut $\frac{i}{k+2} P([X_k = i])$; le terme $j = i - 1$ vaut

$$\frac{k+2-(i-1)}{k+2} P([X_k = i-1]) = \frac{3+k-i}{k+2} P([X_k = i-1]).$$

Si i (resp. $i - 1$) n'appartient pas à $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$, le terme correspondant est absent de la somme, mais aussi nul dans la formule (*) puisque $P([X_k = i]) = 0$ (resp.

$P([X_k = i-1]) = 0$) ; la formule reste donc valable dans tous les cas.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, la formule (*) est vérifiée.

6. On applique (*) avec $k = 2$, de sorte que $\frac{i}{k+2} = \frac{i}{4}$ et $\frac{3+k-i}{k+2} = \frac{5-i}{4}$, et la loi de X_2 :

$$P([X_3 = 1]) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{4} \cdot 0 = \frac{1}{24},$$

$$P([X_3 = 2]) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24},$$

$$P([X_3 = 3]) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24},$$

$$P([X_3 = 4]) = \frac{4}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

Conclusion

$X_3(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et sa loi est $\left(\frac{1}{24}, \frac{11}{24}, \frac{11}{24}, \frac{1}{24}\right)$; la somme vaut bien 1.

7.(a) Méthode 1 — Récurrence à l'aide de (*). Avec $i = 1$, $P([X_k = 0]) = 0$, donc (*) donne $P([X_{k+1} = 1]) = \frac{1}{k+2} P([X_k = 1])$.

Initialisation : $P([X_0 = 1]) = 1 = \frac{1}{1!}$. Hérédité : si $P([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$, alors

$$P([X_{k+1} = 1]) = \frac{1}{k+2} \cdot \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}.$$

Méthode 2 — Probabilités composées. Pour $k \geq 1$, $[X_k = 1]$ est l'événement « les k premiers tirages donnent une boule blanche », c'est-à-dire $B_1 \cap \dots \cap B_k$. Sachant que les $m-1$ premiers tirages ont donné une blanche, l'urne contient avant le m -ième tirage $m+1$ boules dont une seule blanche (aucune blanche n'a été ajoutée), donc $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{m-1}}(B_m) = \frac{1}{m+1}$. La formule des probabilités composées donne :

$$P([X_k = 1]) = \prod_{m=1}^k \frac{1}{m+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Le cas $k = 0$ est immédiat. La première méthode utilise le résultat général (*); la seconde revient à l'expérience et met en évidence l'événement concerné.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, P([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

7.(b) Méthode 1 — Récurrence à l'aide de (*). Avec $i = k + 2$ dans (*) :

$P([X_k = k + 2]) = 0$ car $k + 2 \notin X_k(\Omega)$, et $\frac{3 + k - (k + 2)}{k + 2} = \frac{1}{k + 2}$, donc

$P([X_{k+1} = k + 2]) = \frac{1}{k + 2} P([X_k = k + 1])$. La suite $u_k = P([X_k = k + 1])$ vérifie

$u_0 = P([X_0 = 1]) = 1$ et $u_{k+1} = \frac{u_k}{k + 2}$: c'est la même relation qu'en 7.(a), d'où

$u_k = \frac{1}{(k+1)!}$ par la même récurrence.

Méthode 2 — Probabilités composées. Pour $k \geq 1$, $[X_k = k + 1] = N_1 \cap \dots \cap N_k$.

Sachant que les $m - 1$ premiers tirages ont donné une noire, l'urne contient $m + 1$ boules dont une seule noire, donc $P_{N_1 \cap \dots \cap N_{m-1}}(N_m) = \frac{1}{m + 1}$, et

$$P([X_k = k + 1]) = \prod_{m=1}^k \frac{1}{m + 1} = \frac{1}{(k + 1)!}.$$

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, P([X_k = k + 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

7.(c) Relation de récurrence. Avec $i = 2$, (*) donne

$$P([X_{k+1} = 2]) = \frac{2}{k + 2} P([X_k = 2]) + \frac{k + 1}{k + 2} P([X_k = 1]).$$

En multipliant par $(k + 2)! = (k + 2)(k + 1)!$ et en utilisant 7.(a) :

$$a_{k+1} = 2(k + 1)! P([X_k = 2]) + (k + 1)(k + 1)! P([X_k = 1]) = 2a_k + (k + 1).$$

Suite géométrique. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$b_{k+1} = a_{k+1} + (k+1) + 2 = 2a_k + 2k + 4 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k.$$

Donc (b_k) est géométrique de raison 2, de premier terme

$$b_0 = a_0 + 2 = 1! \cdot P([X_0 = 2]) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Expression. Ainsi $b_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, donc $a_k = 2^{k+1} - k - 2$, et :

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = 2a_k + k + 1, (b_k) \text{ est géométrique de raison 2, et } P([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Vérification : $k = 1$ donne $\frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$ et $k = 2$ donne $\frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$, conformément aux questions 1 et 2.

Partie B

8. Code adapté en Python.

Interprétation des variables. La variable n représente le nombre de boules noires et b le nombre de boules blanches présentes dans l'urne ; initialement $n = 1$ et $b = 1$. La boucle effectue k tirages.

Fonctionnement de l'instruction $r = \text{np.floor}(\text{rd.random}() * (n + b) + 1)$. Notons U le réel renvoyé par $\text{rd.random}()$, de loi uniforme sur $[0, 1[$, et $T = n + b$ le nombre total de boules. Alors $TU + 1 \in [1, T + 1[$ et $r = \lfloor TU + 1 \rfloor$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, T \rrbracket$. Pour $m \in \llbracket 1, T \rrbracket$:

$$P(\lfloor TU + 1 \rfloor = m) = P(m \leqslant TU + 1 < m + 1) = P\left(\frac{m-1}{T} \leqslant U < \frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T}.$$

Donc r simule le numéro d'une boule choisie uniformément parmi les T boules : on convient que les numéros $1, \dots, n$ désignent les boules noires et les numéros $n + 1, \dots, n + b$ les boules blanches.

Suite de la boucle. Si $r > n$, la boule tirée est blanche (probabilité $\frac{b}{n+b}$) et l'on ajoute une boule noire : $n = n + 1$. Sinon, la boule tirée est noire (probabilité $\frac{n}{n+b}$) et l'on ajoute une boule blanche : $b = b + 1$. C'est exactement la règle de l'expérience.

Conclusion

après k passages dans la boucle, b contient le nombre de boules blanches après k tirages ; la fonction `mystere(k)` renvoie une simulation de X_k .

9. Code adapté en Python.

On simule N fois X_k avec `mystere(k)`. La valeur obtenue x appartient à $\llbracket 1, k + 1 \rrbracket$; on incrémente le compteur d'indice $x - 1$ (l'indice Python $i - 1$ correspondant à l'événement $[X_k = i]$). On divise enfin par N pour obtenir des fréquences.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def loi_exp(k, N):
    LE = np.zeros(k + 1)
    for s in range(N):
        x = mystere(k)
        LE[x - 1] = LE[x - 1] + 1
    LE = LE / N
    return LE
```

La variable x est un entier (b est un entier incrémenté de 1), ce qui permet de l'utiliser comme indice. Code exécuté : avec $k = 5$ et $N = 20000$, on a obtenu par exemple des fréquences proches de 0.001, 0.079, 0.421, 0.419, 0.080, 0.001. Ces valeurs varient d'une exécution à l'autre ; elles illustrent, sans le démontrer, la proximité avec la loi théorique.

10. Code adapté en Python.

Avec la convention de l'énoncé, la ligne d'indice Python $k - 1$ contient la loi de X_k . La première ligne (indice 0) contient la loi de X_1 . Au passage d'indice k (pour k de 1 à $n - 1$), on calcule la ligne d'indice k , c'est-à-dire la loi de X_{k+1} , à partir de la ligne d'indice $k - 1$ (loi de X_k), grâce à $(*)$:

$$P([X_{k+1} = 1]) = \frac{1}{k+2}P([X_k = 1]), \quad P([X_{k+1} = k+2]) = \frac{1}{k+2}P([X_k = k+1]),$$

et pour $i \in \llbracket 2, k+1 \rrbracket$:

$$P([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}P([X_k = i-1]).$$

En traduisant $P([X_k = i])$ par $M[k-1, i-1]$ et $P([X_{k+1} = i])$ par $M[k, i-1]$:

Python

```
import numpy as np

def loi_theo(n):
    M = np.zeros((n, n + 1))
    M[0, 0] = 1 / 2
    M[0, 1] = 1 / 2
    for k in range(1, n):
        M[k, 0] = M[k - 1, 0] / (k + 2)
        for i in range(2, k + 2):
            M[k, i - 1] = i / (k + 2) * M[k - 1, i - 1] + (3 + k - i) / (k + 2) * M[k - 1, i - 2]
        M[k, k + 1] = M[k - 1, k] / (k + 2)
    LT = M[n - 1, :]
    return LT
```

La boucle intérieure `range(2, k + 2)` parcourt $i = 2, \dots, k + 1$ (borne supérieure exclue).

La colonne d'indice $k + 1$ existe car $k + 1 \leq n$. La dernière ligne, d'indice $n - 1$, contient la loi de X_n .

Code exécuté : `loi_theo(3)` renvoie $\left(\frac{1}{24}, \frac{11}{24}, \frac{11}{24}, \frac{1}{24}\right)$ (question 6), `loi_theo(2)` renvoie $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, et `loi_theo(5)` multiplié par 720 renvoie $(1, 57, 302, 302, 57, 1)$.

11. On compare la proposition à la loi exacte de X_5 .

D'après 7.(a) et 7.(b), $P([X_5 = 1]) = P([X_5 = 6]) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \approx 0.0013889$, et d'après 7.(c), $P([X_5 = 2]) = \frac{2^6 - 5 - 2}{720} = \frac{57}{720} \approx 0.0791667$.

Les valeurs proposées, 0.001368 et 0.00138 pour les valeurs extrêmes et 0.079365 pour la valeur 2, ne coïncident pas avec ces probabilités exactes ; de plus, elles ne sont pas symétriques ($0.001368 \neq 0.00138$, $0.079365 \neq 0.079454$), alors que les probabilités exactes de $[X_5 = 1]$ et $[X_5 = 6]$ sont égales. Les valeurs sont cependant proches des valeurs exactes, ce qui est caractéristique de fréquences observées sur un grand nombre de simulations.

Conclusion

l'étudiant a utilisé `loi_exp` (estimation par simulation), et non `loi_theo`.

Partie C

12.(a) Les variables X_k et X_{k+1} sont finies, donc leurs espérances existent, ainsi que $E(X_k^2)$.

Méthode 1 — À l'aide de (*). Par définition,

$$E(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+2} i P([X_{k+1} = i]).$$

Avec (*) :

$$E(X_{k+1}) = \frac{1}{k+2} \sum_{i=1}^{k+2} i^2 P([X_k = i]) + \frac{1}{k+2} \sum_{i=1}^{k+2} i(3+k-i) P([X_k = i-1]).$$

Dans la première somme, le terme $i = k+2$ est nul ($P([X_k = k+2]) = 0$), donc elle vaut $E(X_k^2)$. Dans la seconde, on pose $j = i-1$; le terme $j = 0$ est nul, donc elle vaut

$$\sum_{j=1}^{k+1} (j+1)(k+2-j) P([X_k = j]) = E((X_k + 1)(k+2 - X_k))$$

par le théorème de transfert. Or :

$$(X_k + 1)(k+2 - X_k) = -X_k^2 + (k+1)X_k + (k+2).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(X_{k+1}) = \frac{E(X_k^2) - E(X_k^2) + (k+1)E(X_k) + (k+2)}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

Méthode 2 — Formule de l'espérance totale. Le système complet $([X_k = j])_{j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket}$ est formé d'événements de probabilités non nulles. D'après la question 4, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $[X_k = j]$ est portée par $\{j, j+1\}$, d'où :

$$E(X_{k+1} \mid [X_k = j]) = j \cdot \frac{j}{k+2} + (j+1) \cdot \frac{k+2-j}{k+2} = j + \frac{k+2-j}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} j + 1.$$

La formule de l'espérance totale (variables finies) donne :

$$E(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} P([X_k = j]) \left(\frac{k+1}{k+2} j + 1 \right) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

La première méthode, imposée, travaille sur la loi ; la seconde raisonne sur l'accroissement moyen en un tirage (on gagne une boule blanche avec la probabilité de tirer une noire) et évite le passage par $E(X_k^2)$.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

12.(b) Méthode 1 — Récurrence. Initialisation : $E(X_0) = 1 = \frac{0+2}{2}$. Hérédité : si $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$, alors par 12.(a)

$$E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{(k+1)+2}{2}.$$

Méthode 2 — Changement de suite. Posons $c_k = (k+1)E(X_k)$. En multipliant 12.(a) par $k+2$: $c_{k+1} = c_k + (k+2)$. Donc, pour $k \geq 0$ (somme télescopique, vide si $k = 0$) :

$$c_k = c_0 + \sum_{m=0}^{k-1} (m+2) = 1 + \frac{(k-1)k}{2} + 2k = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

D'où $E(X_k) = \frac{c_k}{k+1} = \frac{k+2}{2}.$

La récurrence vérifie une formule donnée ; le changement de suite la construit, ce qui est utile lorsque le résultat n'est pas fourni.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

12.(c) Même loi. Le nombre Y_k de boules noires après k tirages évolue selon la même règle que X_k en échangeant les couleurs : $Y_0 = 1$, et, sachant $[Y_k = j]$ (événement de probabilité non nulle pour $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, par le même raisonnement qu'en 3), l'urne contient j noires sur $k+2$ boules ; on tire une noire avec probabilité $\frac{j}{k+2}$ (on ajoute une blanche et $Y_{k+1} = j$) et une blanche avec probabilité $\frac{k+2-j}{k+2}$ (on ajoute une noire et $Y_{k+1} = j+1$). Les probabilités conditionnelles sont celles de la question 4, donc la suite (Y_k) vérifie la formule (*) par le même calcul qu'en 5.

Les lois de X_{k+1} et Y_{k+1} sont donc déterminées par celles de X_k et Y_k par la même formule. Comme X_0 et Y_0 ont la même loi (certaine égale à 1), une récurrence immédiate montre que X_k et Y_k ont la même loi pour tout k , donc la même espérance.

Conséquence. Après k tirages, l'urne contient $k+2$ boules, donc $X_k + Y_k = k+2$. Par linéarité, $E(X_k) + E(Y_k) = k+2$, et comme $E(X_k) = E(Y_k)$: $2E(X_k) = k+2$.

Conclusion

$$E(X_k) = E(Y_k) = \frac{k+2}{2}, \text{ ce qui retrouve 12.(b).}$$

13.(a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Z_k = \frac{X_k}{k+2}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Z_k est une variable finie, qui admet donc une espérance et une variance. Par linéarité et propriété de la variance d'une transformation affine, avec 12.(b) et le résultat admis :

$$E(Z_k) = \frac{1}{k+2} \cdot \frac{k+2}{2} = \frac{1}{2}, \quad V(Z_k) = \frac{1}{(k+2)^2} \cdot \frac{k+2}{12} = \frac{1}{12(k+2)}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\alpha > 0$, donne :

$$0 \leq P\left(\left|Z_k - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(Z_k)}{\alpha^2} = \frac{1}{12(k+2)\alpha^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Par passage à l'événement contraire,

$$P\left(\left[\left|Z_k - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right]\right) = 1 - P\left(\left[\left|Z_k - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right]\right) \geq 1 - \frac{1}{12(k+2)\alpha^2},$$

et cette probabilité est majorée par 1. Par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right]\right) = 1.$$

13.(b) Interprétation. $\frac{X_k}{k+2}$ est la proportion de boules blanches dans l'urne après k tirages. Le résultat signifie que cette proportion converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$: pour k grand, l'urne contient, avec une probabilité proche de 1, à peu près autant de boules blanches que de noires.

Justification intuitive. Le mécanisme est auto-correcteur : si les boules blanches sont majoritaires, on tire plus souvent une blanche, ce qui ajoute une noire et réduit l'écart ; symétriquement si les noires sont majoritaires. La composition de l'urne est donc ramenée en permanence vers l'équilibre. C'est le contraire de l'urne de Pólya, où l'on ajoute une boule de la couleur tirée et où les déséquilibres se renforcent.

Partie D

14.(a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La composition par $X + 1$ est linéaire :

$(\lambda P + \mu Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1)$. Donc :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\lambda P + \mu Q) &= j(\lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1)) - i(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda \varphi_{i,j}(P) \\ &+ \mu \varphi_{i,j}(Q). \end{aligned}$$

Conclusion

$\varphi_{i,j}$ est linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$).

14.(b) Si $P = 0$, alors $\varphi_{i,j}(P) = 0$ et les deux degrés valent $-\infty$ (convention).

Soit P non nul de degré $d \geq 0$, de coefficient dominant $c \neq 0$: $P(X) = cX^d + R(X)$ avec $\deg R \leq d - 1$. Par la formule du binôme, $(X + 1)^d = X^d + (\text{termes de degré} \leq d - 1)$ et $\deg R(X + 1) \leq d - 1$; donc $P(X + 1) = cX^d + (\text{termes de degré} \leq d - 1)$. Par conséquent :

$$\varphi_{i,j}(P) = (j - i)cX^d + (\text{termes de degré} \leq d - 1).$$

Comme $j < i$ et $c \neq 0$, on a $(j - i)c \neq 0$: le coefficient de X^d est non nul et il n'y a pas de terme de degré supérieur.

Conclusion

$\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

14.(c) Soit $P \in \text{Ker } \varphi_{i,j}$. Alors $\deg P = \deg \varphi_{i,j}(P) = \deg 0 = -\infty$, donc $P = 0$. Ainsi $\text{Ker } \varphi_{i,j} = \{0\}$ et, $\varphi_{i,j}$ étant linéaire :

Conclusion

$\varphi_{i,j}$ est injective.

14.(d) Si $P = 0$, $Q = 0$ convient. Soit P non nul de degré d .

D'après 14.(b), $\varphi_{i,j}$ envoie $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$; sa restriction $\psi : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$, linéaire (14.(a)) et injectif (14.(c)). Comme $\dim \mathbb{R}_d[X] = d + 1$ est finie, le théorème du rang donne $\text{rg } \psi = (d + 1) - \dim \text{Ker } \psi = d + 1$, donc ψ est surjective.

Comme $P \in \mathbb{R}_d[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\psi(Q) = P$, c'est-à-dire $\varphi_{i,j}(Q) = P$.

Conclusion

$\varphi_{i,j}$ est surjective; avec 14.(c), c'est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. De plus, $\varphi_{i,j}^{-1}$ conserve le degré.

15.(a) Par définition, $P_{2,1} = \varphi_{2,1}^{-1}((3 + X - 2)P_{1,1}) = \varphi_{2,1}^{-1}(X + 1)$, c'est-à-dire que $P_{2,1}$ est l'unique polynôme (par injectivité de $\varphi_{2,1}$) tel que $\varphi_{2,1}(P_{2,1}) = X + 1$. Or :

$$\varphi_{2,1}(-X - 2) = (-(X + 1) - 2) - 2(-X - 2) = -X - 3 + 2X + 4 = X + 1.$$

Donc $P_{2,1}(X) = -X - 2$.

Puis $P_{2,2}(X) = -P_{2,1}(0) = -(-2) = 2$.

Conclusion

$P_{2,1}(X) = -X - 2$ et $P_{2,2}(X) = 2$.

15.(b) Par définition, $P_{3,2} = \varphi_{3,2}^{-1}((3 + X - 3)P_{2,2}) = \varphi_{3,2}^{-1}(2X)$. Or :

$$\varphi_{3,2}(-2X - 4) = 2(-2(X + 1) - 4) - 3(-2X - 4) = -4X - 12 + 6X + 12 = 2X.$$

Par injectivité de $\varphi_{3,2}$:

Conclusion

$P_{3,2}(X) = -2X - 4$.

Contrôle des résultats admis :

$$\begin{aligned} \varphi_{3,1}\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1\right) &= \left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{2}X + 3\right) - \left(\frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{2}X + 3\right) = -X^2 - 2X = X \\ &\cdot P_{2,1}(X), \end{aligned}$$

et $P_{3,3} = -(P_{3,1}(0) + P_{3,2}(0)) = -(1 - 4) = 3$: ils sont cohérents avec les définitions.

16.(a) Pour $i = 1$, la somme se réduit au terme $j = 1$: $\frac{1}{(k+1)!} P_{1,1}(k) 1^k = \frac{1}{(k+1)!}$, ce qui est égal à $P([X_k = 1])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après 7.(a).

Conclusion

H_1 est vraie.

16.(b) Soit $i \geq 2$ tel que H_{i-1} soit vraie, et $k \in \mathbb{N}$. On calcule α_{k+1} en fonction de α_k .

Étape 1 : utilisation de (*). En multipliant (*) par $(k+2)! = (k+2)(k+1)!$:

$$(k+2)! P([X_{k+1} = i]) = i(k+1)! P([X_k = i]) + (3+k-i)(k+1)! P([X_k = i-1]).$$

Étape 2 : hypothèse de récurrence. D'après H_{i-1} ,

$$(k+1)! P([X_k = i-1]) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k) j^k.$$

Donc :

$$(k+2)! P([X_{k+1} = i]) = i(k+1)! P([X_k = i]) + \sum_{j=1}^{i-1} (3+k-i) P_{i-1,j}(k) j^k.$$

Étape 3 : relation polynomiale. Pour $1 \leq j \leq i-1$, on a $j < i$ et, par définition de $P_{i,j}$,

$$(3+X-i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j})(X) = jP_{i,j}(X+1) - iP_{i,j}(X).$$

En évaluant en k :

$$(3 + k - i)P_{i-1,j}(k) j^k = P_{i,j}(k + 1) j^{k+1} - i P_{i,j}(k) j^k.$$

Étape 4 : conclusion du calcul. En reportant :

$$(k + 2)! P([X_{k+1} = i]) = i (k + 1)! P([X_k = i]) + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k + 1) j^{k+1} - i \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k,$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= (k + 2)! P([X_{k+1} = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k + 1) j^{k+1} \\ &= i \left((k + 1)! P([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k \right) = i \alpha_k. \end{aligned}$$

La suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est géométrique de raison i .

Calcul de α_0 . Comme $i \geq 2$ et $X_0 = 1$, $P([X_0 = i]) = 0$; de plus $j^0 = 1$. Donc :

$$\alpha_0 = 1! \cdot 0 - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i},$$

par définition de $P_{i,i}$ (polynôme constant).

Conséquence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = P_{i,i} i^k = P_{i,i}(k) i^k$, d'où :

$$(k + 1)! P([X_k = i]) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k + P_{i,i}(k) i^k = \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

Conclusion

(α_k) est géométrique de raison i , $\alpha_0 = P_{i,i}$, et H_i est vraie.

16.(c) H_1 est vraie (16.(a)) et, pour tout $i \geq 2$, H_{i-1} implique H_i (16.(b)). Par récurrence :

Conclusion

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

17.(a) D'après H_2 et 15.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([X_k = 2]) = \frac{1}{(k+1)!} (P_{2,1}(k) \cdot 1^k + P_{2,2}(k) \cdot 2^k) = \frac{-k-2+2 \cdot 2^k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Conclusion

on retrouve le résultat de la question 7.(c).

17.(b) D'après H_3 , avec $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1 = \frac{(X+1)(X+2)}{2}$,
 $P_{3,2}(X) = -2X - 4 = -2(X+2)$ et $P_{3,3} = 3$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (en particulier pour $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} P([X_k = 3]) &= \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} - 2(k+2)2^k + 3 \cdot 3^k \right) \\ &= \frac{3^{k+1} - (k+2)2^{k+1} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Vérifications : pour $k = 1$, on obtient $\frac{9 - 12 + 3}{2} = 0$, ce qui est cohérent avec

$$X_1(\Omega) = \{1, 2\}; \text{ pour } k = 2, \quad \frac{27 - 32 + 6}{6} = \frac{1}{6} \text{ (question 2); pour } k = 3, \\ \frac{81 - 80 + 10}{24} = \frac{11}{24} \text{ (question 6).}$$

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P([X_k = 3]) = \frac{3^{k+1} - (k+2)2^{k+1} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}}{(k+1)!}.$$

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2.(d) : code adapté en Python (fonction Scilab remplacée par une fonction Python à compléter). L'indexation Python commençant à 0, la convention « $y[m]$ contient I_m » a été précisée ; elle rend cohérente l'initialisation $u(0)$ de l'original, qui n'était pas valide en Scilab (indices commençant à 1).

Exercice 1, question 5.(b) : code adapté en Python (fonction demandée en Python au lieu de Scilab).

Exercice 2, question 6 : rectification de l'hypothèse « $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ » en « $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ », coquille manifeste puisque la condition porte sur un couple d'indices.

Problème, partie B : ajout d'un préambule indiquant les importations et le rôle de `rd.random()` et `np.floor`, nécessaires à la lecture des codes Python.

Problème, question 8 : code adapté en Python ; la référence à «la ligne 5» est remplacée par la citation explicite de l'instruction correspondante, la numérotation des lignes n'étant plus la même.

Problème, question 9 : code adapté en Python ; nom `loi-exp` remplacé par `loi_exp` (un

tiret n'est pas autorisé dans un identifiant Python) et convention d'indice «LE[i-1] correspond à $[X_k = i]$ » précisée.

Problème, question 10 : code adapté en Python ; nom loi-theo remplacé par loi_theo, convention «M[k-1, i-1] contient $P([X_k = i])$ » et «LT[i-1] contient $P([X_n = i])$ » précisée pour tenir compte de l'indexation à partir de 0.

Problème, question 11 : noms des fonctions mis à jour (loi_exp, loi_theo).
