



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2017

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On définit sur l'intervalle $]0, 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0, 1]$.

(c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente. On notera I sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Calculer u_0 et u_1 .

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

(e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(f) Écrire une fonction Python d'en-tête `def somme(n)` : qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n .

3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) Montrer que :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) Écrire une fonction Python d'en-tête `def estimation(eps)` : qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ε et qui renvoie une valeur approchée de I à ε près.

EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si x est ainsi associé à X et y à Y , le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y = {}^t Y X,$$

où ${}^t X$ représente la transposée de X .

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) Justifier qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$J = P D {}^t P.$$

(b) Déterminer le rang de J . En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

(c) En examinant la trace de J , expliciter la matrice D .

2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

(a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right].$$

(b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = {}^t X M X.$$

(c) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I , où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ à déterminer telle que :

$$M = P \Delta {}^t P.$$

(e) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathcal{S}$.

3. Dans cette question, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(b) À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.

(c) En déduire que :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} (\langle u(x), x \rangle) \times (\langle u^{-1}(x), x \rangle) = 1.$$

4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

(b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

(c) En déduire le minimum de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$

sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.
2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
 - (a) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2 .
Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $E(N)$ et $E(N^2)$.
 - (b) Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $E(Z_a)$.
 - (c) Montrer que Z_a admet une variance et calculer $V(Z_a)$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.

On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n .

Dans ce programme, les urnes sont représentées par les cases d'indices 0 à $n - 1$ du tableau `urnes`, et l'instruction `np.random.randint(0, n)` renvoie un entier choisi au hasard, de façon équiprobable, dans $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Python

```
import numpy as np

def tirage(n):
    urnes = np.zeros(n)
    X = 1
    choix = np.random.randint(0, n)
    while .....:
        urnes[choix] = urnes[choix] + 1
```

```
choix = np.random.randint(0, n)

X = .....

return X
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.

Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

3. On suppose dans cette question que $n = 2$.

Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.

(a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.

(b) Montrer que :

$$\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, \quad P(X_n = k) = \frac{n! (k-1)}{n^k (n-k+1)!}.$$

(c) Montrer que pour tout entier strictement positif n , X_n admet une espérance.

(d) On souhaite écrire une fonction Python qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n .

Compléter la fonction suivante à cet effet :

Python

```
def esperance(n):

    facto = 1

    for i in range(1, n + 1):

        facto = facto * i

    fac = facto

    somme = 0

    puissance = n

    for k in range(2, n + 2):
```

```

puissance = .....

fac = .....

somme = somme + k * (k - 1) / (puissance * fac)

E = facto * somme

return E

```

Partie C

On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $m \in \{0, \dots, n-1\}$, on pose :

$$\alpha(n, m) = \sum_{k=0}^m \ln \left(1 - \frac{k}{n} \right).$$

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x.$$

2. En déduire que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$, on a :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

On rappelle que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

3. On suppose dans cette question que $x \leq 0$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor))$.

4. On suppose dans cette question que x est un réel $x > 0$.

(a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Justifier qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad 2 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \frac{n}{2}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \dots, n+1\}, \quad P(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

(d) En déduire que pour tout $n \geq N$, on a :

$$P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}{n} \exp\left(\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)\right).$$

(e) Montrer alors que $\sqrt{n} P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie D

On admettra dans cette partie le résultat suivant :

Si W est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n admet une densité h_n ;
- la variable W admet une densité h ;

- pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = h(x)$;

alors, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W .

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B. On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n} P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor).$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.

- (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $P(U \leq \sqrt{n}x - k)$.

On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

- (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

- (c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est une variable aléatoire à densité, et que Y_n admet f_n pour densité.

(d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y à densité dont on précisera la densité.

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x :

$$0 \leq P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - P(Y_n \leq x) \leq P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor).$$

(b) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.