



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2017

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. (a) Il s'agit d'étudier les limites en 0^+ de f et de g . On utilise les croissances comparées, puis la continuité de l'exponentielle.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Donc f admet une limite en 0, égale à 0.

Pour tout $x \in]0, 1]$, $g(x) = e^{f(x)}$. Comme $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et que la fonction exponentielle est continue en 0, on obtient par composition $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e^0 = 1$.

Conclusion

oui, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$. En particulier, f et g sont prolongeables par continuité en 0 (par 0 et par 1 respectivement).

- (b) On étudie le signe des dérivées.

La fonction f est dérivable sur $]0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0, 1]$:

$$f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Or $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$, par stricte croissance de $\ln$ et de $\exp$.

Ainsi $f' < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f'(\frac{1}{e}) = 0$ et $f' > 0$ sur $]\frac{1}{e}, 1]$.

Valeurs : $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ et $f(1) = 0$; la limite en 0 est 0 (question 1.(a)).

x	0	$]0, \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e}, 1[$	1
signe de $f'(x)$		—	0	+	1
f	limite 0	décroissante	$-\frac{1}{e}$	croissante	0

La fonction $g = \exp \circ f$ est dérivable sur $]0, 1]$ comme composée, et $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$. Comme $e^{f(x)} > 0$, $g'(x)$ a le signe de $f'(x)$. Valeurs : $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e}$, $g(1) = e^0 = 1$, limite 1 en 0.

x	0	$]0, \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e}, 1[$	1
signe de $g'(x)$		—	0	+	1
g	limite 1	décroissante	$e^{-1/e}$	croissante	1

Conclusion

f et g sont strictement décroissantes sur $]0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissantes sur $[\frac{1}{e}, 1]$, avec pour minimum respectif $-\frac{1}{e}$ et $e^{-1/e}$, atteint en $\frac{1}{e}$.

On retiendra en particulier :

$$\forall t \in]0, 1], \quad -\frac{1}{e} \leq f(t) \leq 0.$$

(c) La fonction g est continue sur $]0, 1]$; l'intégrale n'est impropre qu'en 0.

Méthode 1 — Prolongement par continuité.

D'après 1.(a), g admet en 0 la limite finie 1. La fonction g est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est alors faussement impropre en 0, donc convergente, et elle est égale à l'intégrale sur $[0, 1]$ du prolongement.

Méthode 2 — Comparaison de fonctions positives.

Pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) \leq 0$ d'après 1.(b), donc $0 < g(t) = e^{f(t)} \leq 1$. La fonction constante 1 est intégrable sur $]0, 1]$ ($\int_{\varepsilon}^1 1 \, dt = 1 - \varepsilon \rightarrow 1$). Par le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives et continues, $\int_0^1 g(t) \, dt$ converge.

La première méthode utilise l'existence d'une limite finie au bord ; la seconde ne demande qu'une majoration et s'applique aussi à des fonctions bornées sans limite au bord.

Conclusion

l'intégrale $I = \int_0^1 g(t) \, dt$ converge.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons, pour $t \in]0, 1]$, $\varphi_n(t) = (t \ln(t))^n = f(t)^n$. On montre que φ_n se prolonge par continuité en 0.

La fonction φ_n est continue sur $]0, 1]$.

Si $n = 0$, φ_0 est la fonction constante égale à 1, qui se prolonge par continuité en 0.

Si $n \geq 1$, comme $f(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ (question 1.(a)), on a $\varphi_n(t) = f(t)^n \rightarrow 0$.

Dans les deux cas, φ_n admet une limite finie en 0 : l'intégrale $\int_0^1 \varphi_n(t) \, dt$ est faussement impropre, donc convergente.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

(b) On majore $|u_n|$ grâce à l'encadrement de f obtenu en 1.(b).

Pour tout $t \in]0, 1]$, $-\frac{1}{e} \leq f(t) \leq 0$, donc $|f(t)| \leq \frac{1}{e}$ et $|\varphi_n(t)| = |f(t)|^n \leq e^{-n}$.

La fonction $|\varphi_n|$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0, donc $\int_0^1 |\varphi_n(t)| dt$ converge. Par l'inégalité triangulaire (établie sur $[\varepsilon, 1]$ puis passage à la limite) et par croissance de l'intégrale :

$$|u_n| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 \varphi_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |\varphi_n(t)| dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-n} dt = \frac{e^{-n}}{n!}.$$

Comme $n! \geq 1$, on a $0 \leq |u_n| \leq e^{-n}$, et $e^{-n} \rightarrow 0$.

Conclusion

par encadrement, la suite (u_n) converge vers 0. On retiendra la majoration $|u_n| \leq \frac{e^{-n}}{n!}$.

(c) Calcul de u_0 : $u_0 = \frac{1}{0!} \int_0^1 1 dt = 1$.

Calcul de u_1 : $u_1 = \int_0^1 t \ln(t) dt$. On intègre par parties sur un segment $[\varepsilon, 1]$ avec $0 < \varepsilon < 1$, puis on passe à la limite.

On pose $a(t) = \ln(t)$ et $b(t) = \frac{t^2}{2}$, fonctions de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, avec $a'(t) = \frac{1}{t}$ et $b'(t) = t$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{4}.$$

Par croissances comparées, $\varepsilon^2 \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Donc :

$$u_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -\frac{1}{4}.$$

(d) On établit une relation de récurrence par intégration par parties sur un segment, puis on l'itère.

Le cas $n = 0$ est réglé : $u_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{1!}$. Fixons désormais $n \geq 1$ et posons, pour $p \in \{0, \dots, n\}$:

$$J_p = \int_0^1 t^n (\ln(t))^p dt.$$

Existence : la fonction $t \mapsto t^n (\ln t)^p$ est continue sur $]0, 1]$ et tend vers 0 en 0^+ par croissances comparées (car $n \geq 1$). Chaque J_p est donc une intégrale faussement impropre convergente. De plus $(t \ln(t))^n = t^n (\ln t)^n$, donc $u_n = \frac{J_n}{n!}$.

Valeur de J_0 : $J_0 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$

Relation de récurrence : soit $p \in \{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec $a(t) = (\ln t)^p$ et $b(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, avec $a'(t) = \frac{p(\ln t)^{p-1}}{t}$ et $b'(t) = t^n$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t^n (\ln t)^p dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^p \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{p}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 t^n (\ln t)^{p-1} dt.$$

Comme $p \geq 1$, $(\ln 1)^p = 0$; et $\varepsilon^{n+1} (\ln \varepsilon)^p \rightarrow 0$ par croissances comparées. Les deux intégrales convergent, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ donne :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad J_p = -\frac{p}{n+1} J_{p-1}.$$

Montrons par récurrence finie que pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $J_p = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

Pour $p = 0$: $J_0 = \frac{1}{n+1}$, ce qui est la formule.

Si la formule est vraie au rang $p-1$ avec $p \in \{1, \dots, n\}$, alors :

$$J_p = -\frac{p}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(n+1)^p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Pour $p = n$: $J_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$, d'où $u_n = \frac{J_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

On retrouve $u_1 = -\frac{1}{4}$ (question 2.(c)).

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

(e) On montre que la série converge absolument.

Méthode 1 — Comparaison à une série de Riemann.

Pour $n \geq 1$, on a $(n+1)^{n+1} = (n+1)^2 (n+1)^{n-1} \geq (n+1)^2$, car $n-1 \geq 0$ et $n+1 \geq 1$ donnent $(n+1)^{n-1} \geq 1$. D'où :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq |u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

La série

$$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$$

converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$, à un décalage d'indice près). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |u_n|$$

converge.

Méthode 2 — Majoration de 2.(b) et série exponentielle.

D'après 2.(b), $0 \leq |u_n| \leq \frac{(1/e)^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

converge pour tout réel x , en particulier pour $x = \frac{1}{e}$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |u_n|$$

converge.

La méthode 1 exploite la formule explicite de 2.(d) ; la méthode 2 n'utilise que la majoration intégrale de 2.(b) et resterait valable sans connaître u_n explicitement.

Conclusion

la série

$$\sum u_n$$

est absolument convergente, donc convergente.

(f) Code adapté en Python.

Il suffit d'accumuler les termes $u_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$ pour k allant de 0 à n ; `range(n + 1)` parcourt bien les entiers $0, 1, \dots, n$.

Python

```
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(n + 1):
        S = S + (-1)**k / (k + 1)**(k + 1)
    return S
```

La variable S contient, après le passage d'indice k , la somme partielle S_k ; la fonction renvoie donc S_n . Code exécuté : `somme(0)` renvoie 1.0, `somme(1)` renvoie 0.75, et `somme(10)` renvoie environ 0.78343051071.

3. (a) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et x .

Rappel : si h est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant 0 et x , et si $|h^{(n+1)}| \leq M$ sur le segment d'extrémités 0 et x , alors

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout k , donc $\exp^{(k)}(0) = 1$. Soit $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. Sur le segment $[x, 0]$, $0 < e^t \leq e^0 = 1$ par croissance de $\exp$: on peut prendre $M = 1$. Ainsi :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme $|x| \leq \frac{1}{e}$, on a $|x|^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.

Conclusion

pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(b) On écrit $I - S_n$ comme une seule intégrale, puis on applique 3.(a) avec $x = f(t)$.

Par linéarité des intégrales convergentes (somme finie), avec les notations de 2.(a) :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^1 f(t)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{f(t)^k}{k!} dt.$$

Comme $I = \int_0^1 e^{f(t)} dt$ converge, on obtient, l'intégrale ci-dessous étant convergente comme différence d'intégrales convergentes :

$$I - S_n = \int_0^1 R_n(t) dt \quad \text{avec} \quad R_n(t) = e^{f(t)} - \sum_{k=0}^n \frac{f(t)^k}{k!}.$$

Pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ (question 1.(b)), donc d'après 3.(a) :

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

La fonction $|R_n|$ est continue, positive et bornée sur $]0, 1]$, donc $\int_0^1 |R_n(t)| dt$ converge par comparaison à une constante. Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$|I - S_n| \leq \int_0^1 |R_n(t)| dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{e^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) On fait tendre n vers $+\infty$ dans 3.(b).

Comme $e^{n+1}(n+1)! \rightarrow +\infty$, le majorant tend vers 0 ; par encadrement, $S_n \rightarrow I$. La suite des sommes partielles de la série

$$\sum u_n$$

converge donc vers I (ce qui confirme 2.(e)) et :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Avec le changement d'indice $m = n + 1$:

$$I = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m} = - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^m}.$$

Conclusion

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) Code adapté en Python.

D'après 3.(b), dès que $m_n = \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leq \varepsilon$, la somme S_n est une valeur approchée de I à ε près. On calcule donc S_n et m_n en parallèle, en augmentant n tant que $m_n > \varepsilon$. On utilise la relation $m_n = \frac{m_{n-1}}{e(n+1)}$, avec $m_0 = \frac{1}{e}$.

Python

```
import numpy as np

def estimation(eps):
    n = 0
    S = 1          # S_0 = u_0
    majorant = np.exp(-1) # m_0 = 1/(e^1 * 1!)
    while majorant > eps:
        n = n + 1
        S = S + (-1)**n / (n + 1)**(n + 1)
        majorant = majorant / (np.e * (n + 1))
    return S
```

À chaque passage dans la boucle, S contient S_n et majorant contient m_n . La boucle s'arrête car $m_n \rightarrow 0$; en sortie, $m_n \leq \varepsilon$, donc $|I - S_n| \leq \varepsilon$.

Code exécuté : `estimation(1e-6)` renvoie environ 0.783430, et l'écart avec une valeur numérique de I obtenue indépendamment ($I \approx 0,7834305107$) est de l'ordre de 6×10^{-8} , inférieur à 10^{-6} comme prévu. Cette vérification numérique illustre le résultat sans le démontrer.

EXERCICE 2

- (a) La matrice J est réelle et symétrique, puisque tous ses coefficients sont égaux : ${}^tJ = J$.

D'après le théorème spectral (admis), il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est-à-dire telle que ${}^tPP = I$ (donc P inversible et $P^{-1} = {}^tP$), et une matrice diagonale D telles que $J = PDP^{-1} = PD{}^tP$.

Conclusion

il existe P (que l'on peut choisir orthogonale, ce que l'on fera dans la suite) et D diagonale telles que $J = PD^tP$.

(b) Notons U le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Toutes les colonnes de J sont égales à $U \neq 0$; elles engendrent donc la droite $\text{Vect}(U)$, d'où $\text{rg}(J) = 1$.

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J :

$$\dim \text{Ker}(J) = n - \text{rg}(J) = n - 1 \geq 1 \quad (\text{car } n \geq 2).$$

Le noyau $\text{Ker}(J)$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$: il existe $X \neq 0$ tel que $JX = 0 = 0 \cdot X$.

Conclusion

$\text{rg}(J) = 1$, 0 est valeur propre de J et le sous-espace propre associé $E_0(J) = \text{Ker}(J)$ est de dimension $n - 1$.

(c) On relie les coefficients diagonaux de D aux valeurs propres de J , puis on utilise la trace.

Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux de D .

Nombre de coefficients nuls. Comme P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$:

$$X \in \text{Ker}(J) \iff PD^tPX = 0 \iff D^tPX = 0 \iff {}^tPX \in \text{Ker}(D).$$

L'application $X \mapsto {}^tPX$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui envoie $\text{Ker}(J)$ sur $\text{Ker}(D)$, donc $\dim \text{Ker}(D) = \dim \text{Ker}(J) = n - 1$. Or, D étant diagonale, $\text{Ker}(D)$ est engendré par les vecteurs E_i de la base canonique tels que $d_i = 0$; sa dimension est le nombre d'indices i tels que $d_i = 0$. Exactement $n - 1$ coefficients d_i sont donc nuls, et un seul, noté d_{i_0} , est non nul.

Trace. On a $\text{Tr}(J) = n$ (somme de n coefficients diagonaux égaux à 1). Avec $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ appliquée à $A = P$ et $B = D^t P$:

$$\text{Tr}(J) = \text{Tr}(P D^t P) = \text{Tr}(D^t P P) = \text{Tr}(D) = d_{i_0}.$$

Donc $d_{i_0} = n$.

Ordre des coefficients. Si Q est une matrice de permutation, elle est orthogonale, PQ est orthogonale et ${}^t Q D Q$ est diagonale, de coefficients ceux de D permutés, avec $J = (PQ)({}^t Q D Q) {}^t (PQ)$. Quitte à remplacer P par PQ , on peut donc supposer $i_0 = 1$.

Conclusion

$D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ (à l'ordre des coefficients diagonaux près). On vérifie d'ailleurs directement que $JU = nU$: n est valeur propre de J , associée au vecteur U .

2. (a) On développe le carré de la somme.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} x_i x_j,$$

en séparant les couples (i, j) selon que $i = j$, $i < j$ ou $i > j$. En échangeant les noms des indices dans la dernière somme, celle-ci est égale à

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_j x_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Donc :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2f(x_1, \dots, x_n).$$

Conclusion

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right].$$

(b) On cherche $M = (m_{ij})$ telle que ${}^t X M X = f(x)$. Pour toute matrice M ,

$${}^t X M X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j.$$

Méthode 1 — Identification directe.

Prenons $m_{ii} = 0$ pour tout i et $m_{ij} = \frac{1}{2}$ pour $i \neq j$. Alors, en regroupant les couples (i, j) et (j, i) comme en 2.(a) :

$${}^t X M X = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} x_i x_j = \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = f(x).$$

Méthode 2 — Utilisation de 2.(a).

Notons

$$s = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Alors $JX = sU$ et ${}^t X J X = s {}^t X U = s^2$; de plus

$${}^t X I X = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

D'après 2.(a), la matrice $M = \frac{1}{2}(J - I)$ vérifie :

$${}^tXMX = \frac{1}{2} \left(s^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = f(x).$$

La première méthode lit directement les coefficients sur l'expression de f ; la seconde fait apparaître J et prépare les questions suivantes. Les deux donnent la même matrice, qui est de plus symétrique.

Conclusion

la matrice M de coefficients diagonaux nuls et de coefficients non diagonaux égaux à $\frac{1}{2}$ convient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Les coefficients diagonaux de $\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I$ valent $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et ses coefficients non diagonaux valent $\frac{1}{2}$.

Conclusion

$$M = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I.$$

(d) On utilise $J = PD^tP$ et $I = P^tP$.

Comme P est orthogonale, ${}^tP = P^{-1}$, donc $P^tP = I$. Ainsi :

$$M = \frac{1}{2}PD^tP - \frac{1}{2}PI^tP = P\left(\frac{1}{2}(D - I)\right)^tP.$$

La matrice $\Delta = \frac{1}{2}(D - I)$ est diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales. Avec $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$:

$$\Delta = \text{diag}\left(\frac{n-1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right).$$

Conclusion

$$M = P\Delta^tP \text{ avec } \Delta = \text{diag}\left(\frac{n-1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right).$$

(e) On encadre f sur $\mathcal{S}$, puis on exhibe des points où les bornes sont atteintes ; cela établit à la fois l'existence et la valeur du minimum et du maximum.

Méthode 1 — Diagonalisation.

Soit $x \in \mathcal{S}$, de vecteur colonne X , et posons $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. D'après 2.(b) et 2.(d) :

$$f(x) = {}^tXP\Delta^tPX = {}^tY\Delta Y = \frac{n-1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n y_i^2.$$

De plus ${}^tYY = {}^tXP^tPX = {}^tXX = 1$, donc

$$\sum_{i=2}^n y_i^2 = 1 - y_1^2$$

et :

$$f(x) = \frac{n-1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}(1-y_1^2) = \frac{n}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}.$$

Comme

$$0 \leq y_1^2 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1,$$

on obtient $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n-1}{2}$.

Les bornes sont atteintes : notons E_1, E_2 les deux premiers vecteurs de la base canonique (possible car $n \geq 2$). Pour $X = PE_1$, on a ${}^tXX = {}^tE_1{}^tPPE_1 = 1$ et $Y = E_1$, donc $y_1 = 1$ et $f(x) = \frac{n-1}{2}$. Pour $X = PE_2$, on a de même ${}^tXX = 1$ et $Y = E_2$, donc $y_1 = 0$ et $f(x) = -\frac{1}{2}$.

Méthode 2 — Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $x \in \mathcal{S}$ et

$$s = \sum_{i=1}^n x_i = \langle x, w \rangle,$$

où $w = (1, \dots, 1)$. D'après 2.(a), puisque

$$\sum x_k^2 = 1 :$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(s^2 - 1).$$

D'une part $s^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq -\frac{1}{2}$. D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $s^2 \leq \|x\|^2 \|w\|^2 = n$, donc $f(x) \leq \frac{n-1}{2}$.

Les bornes sont atteintes : pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}w \in \mathcal{S}$, $s = \sqrt{n}$ et $f(x) = \frac{n-1}{2}$; pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{S}$ (possible car $n \geq 2$), $s = 0$ et $f(x) = -\frac{1}{2}$.

La méthode 2 est élémentaire et n'utilise que 2.(a) ; la méthode 1 montre que les extrema de la forme quadratique sur la sphère unité sont la plus petite et la plus grande valeur propre de M , résultat qui se généralise à toute matrice symétrique.

Conclusion

f admet sur $\mathcal{S}$ un minimum égal à $-\frac{1}{2}$ et un maximum égal à $\frac{n-1}{2}$.

3. (a) Diagonalisation. La matrice A est réelle symétrique ; d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = Q\Lambda^t Q$. Donc A est diagonalisable.

De $AQ = Q\Lambda$, on déduit que la i -ème colonne de Q , non nulle car Q est inversible, est un vecteur propre de A associé à λ_i . Chaque λ_i est donc valeur propre de A , et par hypothèse $\lambda_i > 0$.

Construction de B . Posons $\Lambda' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = Q\Lambda'^t Q$. Comme ${}^t Q Q = I$:

$$B^2 = Q\Lambda'^t Q Q\Lambda'^t Q = Q\Lambda'^2 Q = Q\Lambda^t Q = A.$$

Propriétés utiles pour la suite :

- B est symétrique : ${}^t B = {}^t ({}^t Q) {}^t \Lambda' {}^t Q = Q\Lambda'^t Q = B$.
- B est inversible, d'inverse $B^{-1} = Q\Lambda'^{-1} {}^t Q$ (les $\sqrt{\lambda_i}$ sont non nuls) ; B^{-1} est symétrique car ${}^t (B^{-1}) = ({}^t B)^{-1} = B^{-1}$.

- $A = B^2$ est inversible, donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Conclusion

A est diagonalisable et $B = Q\Lambda'^t Q$ vérifie $B^2 = A$; de plus v est un automorphisme, $v^2 = u$, $(v^{-1})^2 = (v^2)^{-1} = u^{-1}$, et v et v^{-1} sont des endomorphismes symétriques (matrices symétriques dans la base canonique, qui est orthonormale).

(b) Rappel : un endomorphisme w est symétrique lorsque $\langle w(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$ pour tous x, y . Pour v , cela résulte de ${}^t(BX)Y = {}^tX {}^tBY = {}^tXBY$.

Inégalité. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Par symétrie de v :

$$\langle v(x), v^{-1}(y) \rangle = \langle x, v(v^{-1}(y)) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle v(x), v^{-1}(y) \rangle^2 \leq \|v(x)\|^2 \|v^{-1}(y)\|^2.$$

Or, par symétrie de v et de v^{-1} :

$$\|v(x)\|^2 = \langle v(x), v(x) \rangle = \langle v^2(x), x \rangle = \langle u(x), x \rangle,$$

$$\|v^{-1}(y)\|^2 = \langle v^{-1}(y), v^{-1}(y) \rangle = \langle (v^{-1})^2(y), y \rangle = \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

D'où $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(y), y \rangle$.

Cas d'égalité. Soit $x \neq 0$. Prenons $y = u(x)$, qui est non nul car u est injectif. Alors $u^{-1}(y) = x$ et :

$$\langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(y), y \rangle = \langle u(x), x \rangle \times \langle x, u(x) \rangle = \langle x, y \rangle^2.$$

Ce choix est naturel : il rend $v(x)$ et $v^{-1}(y) = v^{-1}(v^2(x)) = v(x)$ égaux, ce qui est le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.

Conclusion

l'inégalité est vraie pour tous x, y , et pour $x \neq 0$, $y = u(x)$ est non nul et réalise l'égalité.

(c) Minoration. Soit x tel que $\|x\| = 1$. En appliquant 3.(b) avec $y = x$:

$$1 = \|x\|^4 = \langle x, x \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(x), x \rangle.$$

La borne est atteinte. Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé de norme 1 (on normalise un vecteur propre quelconque). Alors $u(x) = \lambda x$ et $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$, donc :

$$\langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 \times \frac{1}{\lambda} \|x\|^2 = 1.$$

Conclusion

1 est un minorant de l'ensemble considéré et appartient à cet ensemble ; c'en est donc la borne inférieure (et même le minimum) :

$$\inf_{\|x\|=1} (\langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(x), x \rangle) = 1.$$

4. (a) On résout un système ou l'on utilise la formule des matrices d'ordre deux.

Méthode 1 — Résolution du système $AX = Y$.

Pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$ équivaut, par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, à

$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$, soit $x_1 = 2y_1 - y_2$ et $x_2 = -y_1 + y_2$. Le système admet une unique

solution pour tout Y : A est inversible et $X = A^{-1}Y$ avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 — Formule du cours pour les matrices d'ordre deux.

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et son inverse est alors

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ici $ad - bc = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$, d'où le même résultat.

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On cherche le signe des valeurs propres sans polynôme caractéristique.

Méthode 1 — Résolution de $AX = \lambda X$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le système $AX = \lambda X$ s'écrit $\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$. La première équation donne $y = (\lambda - 1)x$; en reportant dans la seconde :

$$x + 2(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda - 1)x \iff (-\lambda^2 + 3\lambda - 1)x = 0.$$

Si $x = 0$, alors $y = (\lambda - 1)x = 0$ et $X = 0$. Il existe donc une solution non nulle si et seulement si $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, les vecteurs

propres associés étant les $x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$ avec $x \neq 0$. Comme $0 < \sqrt{5} < 3$, ces deux valeurs propres sont strictement positives.

Méthode 2 — Signe de la forme quadratique.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^tXAX = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$. Cette quantité est strictement positive si $X \neq 0$: sinon on aurait $y = 0$ et $x + y = 0$, donc $X = 0$. Si $AX = \lambda X$ avec

$X \neq 0$, alors $\lambda {}^tXX = {}^tXAX > 0$ et ${}^tXX > 0$, donc $\lambda > 0$.

La méthode 1 donne les valeurs propres explicitement ; la méthode 2 obtient seulement leur signe, mais s'adapte sans calcul de valeurs propres à toute matrice dont la forme quadratique s'écrit comme somme de carrés.

Conclusion

toutes les valeurs propres de A (à savoir $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$) sont strictement positives.

(c) On reconnaît dans g le produit étudié en 3.(c).

Pour $x = (x_1, x_2)$ de vecteur colonne X :

$$\langle u(x), x \rangle = {}^tXAX = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2, \quad \langle u^{-1}(x), x \rangle = {}^tXA^{-1}X = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Donc $g(x_1, x_2) = \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(x), x \rangle$, et la contrainte s'écrit $\|x\| = 1$.

La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives (question 4.(b)) : les hypothèses de la question 3 sont satisfaites avec $n = 2$. D'après 3.(c), la borne inférieure de g sur le cercle unité vaut 1 et elle est atteinte en tout vecteur propre unitaire

de A , par exemple en $x = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(1, \varphi)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda - 1$ pour

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Conclusion

le minimum de g sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$ existe et vaut 1.

PROBLÈME

Partie A

1. On vérifie les trois propriétés d'une densité : positivité, continuité sauf en un nombre fini de points, intégrale égale à 1.

Positivité : pour $x < 0$, $g_a(x) = 0$; pour $x \geq 0$,

$$g_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \geq 0.$$

Continuité : g_a est continue sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$ (produit et composée de fonctions continues). En 0, la limite à gauche vaut 0 et $g_a(0) = 0$: g_a est continue sur $\mathbb{R}$.

Intégrale : $\int_{-\infty}^0 g_a(x) dx = 0$. Pour $A > 0$, la fonction

$$x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

est une primitive de g_a sur $[0, A]$ (sa dérivée est

$$\frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

), donc :

$$\int_0^A g_a(x) dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x) dx$ converge et vaut 1 ; g_a est une densité de probabilité.

2. (a) Une densité de N est :

$$\varphi_a : x \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

On a $E(N) = 0$ et $V(N) = a^2$. Par la formule de Koenig-Huygens,
 $E(N^2) = V(N) + E(N)^2 = a^2$.

Conclusion

$E(N) = 0$ et $E(N^2) = a^2$.

(b) Il s'agit de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x g_a(x) dx$ converge absolument et de la calculer.

Comme $x g_a(x) = 0$ pour $x < 0$ et $x g_a(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, la convergence absolue équivaut à la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Méthode 1 — Utilisation du moment d'ordre 2 de N .

D'après 2.(a) et le théorème de transfert, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_a(x) dx$ converge et vaut

$E(N^2) = a^2$. La fonction $x \mapsto x^2 \varphi_a(x)$ est paire ; par le changement de variable affine

$$x = -y, \quad \int_{-\infty}^0 x^2 \varphi_a(x) dx = \int_0^{+\infty} y^2 \varphi_a(y) dy, \text{ donc :}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \varphi_a(x) dx = \frac{a^2}{2}.$$

Pour $x \geq 0$,

$$xg_a(x) = \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} x^2 \varphi_a(x).$$

Par linéarité, $\int_0^{+\infty} xg_a(x) dx$ converge et :

$$E(Z_a) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Méthode 2 — Intégration par parties.

Pour $A > 0$, on intègre par parties sur $[0, A]$ avec $p(x) = x$ et

$$q(x) = -e^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

de classe C^1 , avec

$$q'(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} :$$

$$\int_0^A \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -Ae^{-\frac{A^2}{2a^2}} + \int_0^A e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Par croissances comparées,

$$Ae^{-\frac{A^2}{2a^2}} \rightarrow 0$$

quand $A \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, φ_a étant une densité paire, $\int_0^{+\infty} \varphi_a(x) dx = \frac{1}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$$

converge et vaut $\frac{a\sqrt{2\pi}}{2}$. On obtient la même valeur $E(Z_a) = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}$.

La méthode 1 réutilise un moment connu de la loi normale ; la méthode 2 n'utilise que la normalisation de la densité normale, au prix d'une intégration par parties.

Conclusion

$$Z_a \text{ admet une espérance et } E(Z_a) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(c) On montre que Z_a admet un moment d'ordre 2, puis on applique Koenig-Huygens.

Méthode 1 — Intégration par parties.

Par le théorème de transfert, il s'agit d'étudier $\int_0^{+\infty} x^2 g_a(x) dx$, d'intégrande positive.

Pour $A > 0$, on intègre par parties sur $[0, A]$ avec $p(x) = x^2$ et

$$q(x) = -e^{-\frac{x^2}{2a^2}} :$$

$$\int_0^A \frac{x^3}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \left[-x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right]_0^A + \int_0^A 2xe^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2 \int_0^A g_a(x) dx.$$

Quand $A \rightarrow +\infty$,

$$A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \rightarrow 0$$

(croissances comparées) et $\int_0^A g_a \rightarrow 1$ (question 1). Donc $E(Z_a^2)$ existe et vaut $2a^2$.

Méthode 2 — Loi de $T = \frac{Z_a^2}{2a^2}$.

D'après le calcul de la question 1, la fonction de répartition de Z_a est $F(x) = 0$ si $x < 0$ et

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

si $x \geq 0$. En particulier $P(Z_a < 0) = 0$.

Soit $s \in \mathbb{R}$. Si $s < 0$, $P(T \leq s) = 0$. Si $s \geq 0$, comme

$$Z_a^2 \leq 2a^2 s \iff -a\sqrt{2s} \leq Z_a \leq a\sqrt{2s} :$$

$$P(T \leq s) = P(Z_a \leq a\sqrt{2s}) - P(Z_a < -a\sqrt{2s}) = 1 - e^{-s} - 0 = 1 - e^{-s}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 : $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, donc T admet une espérance égale à 1. Ainsi $Z_a^2 = 2a^2 T$ admet une espérance et $E(Z_a^2) = 2a^2$.

La méthode 1 est un calcul direct ; la méthode 2 identifie une loi usuelle et évite tout calcul d'intégrale. Elle montre au passage que Z_a a même loi que $a\sqrt{2T}$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, ce qui fournit une méthode de simulation.

Calcul de la variance. Z_a admet un moment d'ordre 2, donc une variance, et par Koenig-Huygens :

$$V(Z_a) = E(Z_a^2) - E(Z_a)^2 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{(4 - \pi)a^2}{2}.$$

Conclusion

$$Z_a \text{ admet une variance et } V(Z_a) = \frac{(4 - \pi)a^2}{2}.$$

Partie B

Modélisation utilisée dans toute la suite : pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note C_i le numéro de l'urne dans laquelle est déposée la i -ème boule. Les variables $C_1, C_2, \dots$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. L'événement $(X_n = k)$ signifie : les $k - 1$ premières boules sont dans des urnes deux à deux distinctes, et la k -ième boule tombe dans une urne déjà occupée.

1. Code adapté en Python.

La variable `choix` contient l'urne tirée pour la boule de rang X . Tant que cette urne est vide, aucune urne ne contient encore deux boules : on dépose la boule, on tire l'urne de la boule suivante et on incrémente X . La boucle s'arrête dès que l'urne tirée contient déjà une boule : X est alors le rang cherché.

Python

```
import numpy as np

def tirage(n):
    urnes = np.zeros(n)
    X = 1
```

```
choix = np.random.randint(0, n)
while urnes[choix] == 0:
    urnes[choix] = urnes[choix] + 1
    choix = np.random.randint(0, n)
    X = X + 1
return X
```

Les indices du tableau urnes vont de 0 à $n - 1$, ce qui est cohérent avec `np.random.randint(0, n)`, dont la borne supérieure est exclue. Code exécuté : sur 20 000 simulations, les moyennes empiriques obtenues sont environ 2,00 pour $n = 1$, 2,50 pour $n = 2$, 3,52 pour $n = 5$ et 13,2 pour $n = 100$, en accord avec les espérances calculées en 2, 3 et 4.(d). Cette observation ne constitue pas une preuve.

2. Si $n = 1$, toutes les boules vont dans l'unique urne. Après la première boule, l'urne contient une boule ; après la deuxième, elle en contient deux. Donc $X_1 = 2$ de façon certaine.

Conclusion

X_1 suit la loi certaine égale à 2 ; $E(X_1) = 2$ et $V(X_1) = 0$.

3. Si $n = 2$: après la première boule, aucune urne n'en contient deux, donc $X_2 \geq 2$. Parmi trois boules réparties dans deux urnes, deux sont dans la même urne, donc $X_2 \leq 3$. Ainsi $X_2(\Omega) \subset \{2, 3\}$.

$(X_2 = 2) = (C_2 = C_1) = (C_1 = 1, C_2 = 1) \cup (C_1 = 2, C_2 = 2)$, réunion disjointe. Par indépendance :

$$P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad P(X_2 = 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Puis $E(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $E(X_2^2) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$, et par

Koenig-Huygens $V(X_2) = \frac{13}{2} - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$.

Conclusion

X_2 suit la loi uniforme sur $\{2, 3\}$, $E(X_2) = \frac{5}{2}$ et $V(X_2) = \frac{1}{4}$.

4. (a) Minoration : après le dépôt de la première boule, une seule urne contient une boule, donc $X_n \geq 2$.

Majoration : les $n + 1$ premières boules sont réparties dans n urnes ; deux d'entre elles sont donc dans la même urne (principe des tiroirs). Au plus tard au tirage $n + 1$, une urne contient deux boules : $X_n \leq n + 1$.

Toutes ces valeurs sont prises : pour $k \in \{2, \dots, n + 1\}$, on a $k - 1 \leq n$, et l'issue où les boules $1, \dots, k - 1$ vont dans les urnes $1, \dots, k - 1$ et la boule k dans l'urne 1 réalise $(X_n = k)$, avec une probabilité $\frac{1}{n^k} > 0$.

Conclusion

$X_n(\Omega) = \{2, \dots, n + 1\}$.

- (b) Soit $k \in \{2, \dots, n + 1\}$.

Méthode 1 — Dénombrement.

L'événement $(X_n = k)$ ne dépend que de $(C_1, \dots, C_k)$. Par indépendance et uniformité, chaque k -uplet $(c_1, \dots, c_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{n^k}$: on est en situation d'équiprobabilité sur $\{1, \dots, n\}^k$, ensemble de cardinal n^k .

Les k -uplets favorables sont ceux pour lesquels $(c_1, \dots, c_{k-1})$ sont deux à deux distincts et $c_k \in \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$. Il y a $\frac{n!}{(n - k + 1)!}$ arrangements $(c_1, \dots, c_{k-1})$ de $k - 1$ éléments distincts parmi n (possible car $k - 1 \leq n$), puis $k - 1$ choix pour c_k . Donc :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{n!}{(n - k + 1)!} \cdot (k - 1) = \frac{n! (k - 1)}{n^k (n - k + 1)!}.$$

Méthode 2 — Probabilités composées.

Pour $j \geq 1$, notons D_j l'événement « $C_1, \dots, C_j$ sont deux à deux distincts ». On a $P(D_1) = 1$. Pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, en décomposant selon les valeurs distinctes $(c_1, \dots, c_j)$ prises par $(C_1, \dots, C_j)$ et en utilisant l'indépendance de C_{j+1} et de $(C_1, \dots, C_j)$:

$$P(D_{j+1}) = \sum_{(c_1, \dots, c_j)} P(C_1 = c_1, \dots, C_j = c_j) P(C_{j+1} \notin \{c_1, \dots, c_j\}) = P(D_j) \frac{n-j}{n}.$$

Par récurrence,

$$P(D_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-2} \frac{n-j}{n} = \frac{n!}{(n-k+1)! n^{k-1}}.$$

Le même raisonnement donne :

$$P(X_n = k) = P(D_{k-1} \cap (C_k \in \{C_1, \dots, C_{k-1}\})) = P(D_{k-1}) \frac{k-1}{n} = \frac{n! (k-1)}{n^k (n-k+1)!}.$$

La méthode 1 compte directement les issues favorables ; la méthode 2 suit l'expérience boule par boule et fournit en outre l'écriture sous forme de produit utilisée en partie C, question 4.(c).

Conclusion

$$\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, P(X_n = k) = \frac{n! (k-1)}{n^k (n-k+1)!}.$$

Contrôle : pour $n = 2$, on retrouve $P(X_2 = 2) = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 3) = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 1} = \frac{1}{2}$.

(c) D'après 4.(a), X_n est une variable aléatoire finie (à valeurs dans $\{2, \dots, n+1\}$).

Toute variable aléatoire finie admet une espérance.

Conclusion

X_n admet une espérance, et

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = n! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k (n-k+1)!}.$$

(d) Code adapté en Python.

D'après 4.(c), il suffit qu'à l'itération d'indice k la variable puissance contienne n^k et la variable fac contienne $(n-k+1)!$. Avant la boucle, puissance vaut $n = n^1$ et fac vaut $n! = (n-1+1)!$, ce qui correspond à « $k=1$ ». Il suffit donc, à chaque passage, de multiplier puissance par n et de diviser fac par $n-k+2$, puisque

$$(n-k+1)! = \frac{(n-k+2)!}{n-k+2}.$$

Python

```
def esperance(n):
    facto = 1
    for i in range(1, n + 1):
        facto = facto * i
    fac = facto
    somme = 0
    puissance = n
    for k in range(2, n + 2):
        puissance = puissance * n
        fac = fac // (n - k + 2)
        somme = somme + k * (k - 1) / (puissance * fac)
    E = facto * somme
    return E
```

La boucle `for k in range(2, n + 2)` parcourt les entiers de 2 à $n+1$. La division

entière // est exacte ici car $n - k + 2$ divise $(n - k + 2)!$; elle conserve des entiers exacts (l'écriture $\text{fac} / (n - k + 2)$ est également correcte pour des valeurs modérées de n).

Pour $k = n + 1$, fac vaut $\frac{1!}{1} = 0! = 1$.

Code exécuté : `esperance(1)` renvoie 2.0, `esperance(2)` renvoie 2.5, `esperance(5)` renvoie 3.5104 et `esperance(100)` renvoie environ 13.21, en accord avec les questions 2 et 3 et avec les simulations de la question 1.

Partie C

Question adaptée au programme actuel (rectification de l'énoncé) : la quantité $\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ n'est définie que pour $k < n$; on a donc défini $\alpha(n, m)$ pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$ au lieu de $m \in \mathbb{N}$. Toutes les utilisations ultérieures respectent cette condition.

1. On étudie le signe de deux fonctions auxiliaires sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Méthode 1 — Étude de fonctions.

Soit $\psi_1(x) = \ln(1 - x) + x$ et $\psi_2(x) = \ln(1 - x) + x + x^2$, dérivables sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (car $1 - x > 0$). Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\psi_1'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0,$$

$$\psi_2'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{-1 + (1+2x)(1-x)}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0.$$

Ainsi ψ_1 est décroissante et ψ_2 croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, avec $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$. Donc $\psi_1(x) \leq 0$ et $\psi_2(x) \geq 0$, c'est-à-dire $-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x$.

Méthode 2 — Concavité pour la majoration.

La fonction $h : t \mapsto \ln(1 - t)$ est de classe C^2 sur $] -\infty, 1[$ avec $h''(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} < 0$: elle est concave, donc sa courbe est située sous ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation $y = h(0) + h'(0)t = -t$, d'où $\ln(1 - x) \leq -x$ pour tout $x < 1$, en particulier sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. La minoration s'obtient alors comme dans la méthode 1 avec ψ_2 ; c'est elle qui exige la restriction $x \leq \frac{1}{2}$, visible dans le facteur $1 - 2x$.

Conclusion

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], -x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x.$$

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$. Comme $\frac{n}{2} < n$, on a $m \leq n - 1$ et $\alpha(n, m)$ est bien défini.

Pour $k \in \{0, \dots, m\}$, $x = \frac{k}{n} \in \left[0, \frac{m}{n}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'après la question 1 :

$$-\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leq \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq -\frac{k}{n}.$$

En sommant ces inégalités pour k de 0 à m , avec

$$\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

et la formule rappelée

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

(qui se démontre par récurrence sur m , l'hérédité reposant sur l'identité

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

):

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

Conclusion

l'encadrement demandé est établi.

3. Soit $x \leq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{nx} \leq 0$, donc $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq 0 < 2$. Comme $X_n(\Omega) = \{2, \dots, n+1\}$ (partie B, 4.(a)), l'événement $(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor)$ est impossible et $\sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = 0$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = 0.$$

4. (a) Par définition de la partie entière, $\sqrt{nx} - 1 < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \sqrt{nx}$.

Limite : comme $x > 0$, $\sqrt{nx} - 1 \rightarrow +\infty$, donc par minoration $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \rightarrow +\infty$.

Équivalent : en divisant par $\sqrt{nx} > 0$, $1 - \frac{1}{\sqrt{nx}} < \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor}{\sqrt{nx}} \leq 1$; par encadrement, le quotient tend vers 1.

Conclusion

$$\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \rightarrow +\infty \text{ et } \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{nx}.$$

- (b) Question adaptée au programme actuel (rectification de l'énoncé) : la minoration $2 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ a été ajoutée. Elle est indispensable en 4.(d) : la formule de 4.(c) n'est valable que pour $k \geq 2$, et $\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)$ n'a de sens que si $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2 \geq 0$.

Majoration : $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \sqrt{nx}$, et $\sqrt{nx} \leq \frac{n}{2} \iff 2x \leq \sqrt{n} \iff n \geq 4x^2$.

Minoration : $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \geq 2 \iff \sqrt{nx} \geq 2 \iff n \geq \frac{4}{x^2}$, car 2 est un entier.

Soit N un entier vérifiant $N \geq \max\left(4x^2, \frac{4}{x^2}\right)$ et $N \geq 1$, par exemple

$N = \left\lceil \max\left(4x^2, \frac{4}{x^2}\right) \right\rceil + 1$. Pour tout $n \geq N$, les deux conditions sont satisfaites.

Conclusion

il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N, 2 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \frac{n}{2}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{2, \dots, n+1\}$. On a :

$$\frac{n!}{(n-k+1)!} = n(n-1) \cdots (n-k+2) = \prod_{i=0}^{k-2} (n-i),$$

produit de $k-1$ facteurs. D'après la partie B, 4.(b) :

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=0}^{k-2} (n-i) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Conclusion

la formule est établie (c'est aussi le résultat direct de la méthode 2 de la partie B, 4.(b)).

(d) Soit $n \geq N$ et $k_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$. D'après 4.(b), $2 \leq k_n \leq \frac{n}{2} \leq n+1$, donc 4.(c) s'applique avec $k = k_n$.

Pour $i \in \{0, \dots, k_n - 2\}$, on a $i < n$, donc $1 - \frac{i}{n} > 0$ et l'on peut passer au logarithme :

$$\prod_{i=0}^{k_n-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \exp \left(\sum_{i=0}^{k_n-2} \ln \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right) = \exp (\alpha(n, k_n - 2)),$$

où $\alpha(n, k_n - 2)$ est bien défini car $0 \leq k_n - 2 \leq n - 1$.

Conclusion

$$\forall n \geq N, P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}{n} \exp (\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)).$$

(e) Pour $n \geq N$, notons $k_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ et $m_n = k_n - 2$. D'après 4.(d) :

$$\sqrt{n}P(X_n = k_n) = \frac{k_n - 1}{\sqrt{n}} \exp (\alpha(n, m_n)).$$

Premier facteur : d'après 4.(a), $\frac{k_n}{\sqrt{n}} = x \cdot \frac{k_n}{\sqrt{nx}} \rightarrow x$, donc $\frac{k_n - 1}{\sqrt{n}} \rightarrow x$. De même

$$\frac{m_n}{\sqrt{n}} \rightarrow x, \quad \frac{m_n + 1}{\sqrt{n}} \rightarrow x \text{ et } \frac{2m_n + 1}{\sqrt{n}} \rightarrow 2x.$$

Second facteur : on a $m_n \in \mathbb{N}$ et $m_n \leq k_n \leq \frac{n}{2}$, donc la question 2 s'applique :

$$-\frac{m_n(m_n + 1)}{2n} - \frac{m_n(m_n + 1)(2m_n + 1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m_n) \leq -\frac{m_n(m_n + 1)}{2n}.$$

Or $\frac{m_n(m_n + 1)}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{m_n + 1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{x^2}{2}$ et

$$\frac{m_n(m_n + 1)(2m_n + 1)}{6n^2} = \frac{1}{6\sqrt{n}} \cdot \frac{m_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{m_n + 1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2m_n + 1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \cdot 2x^3 = 0.$$

Par encadrement, $\alpha(n, m_n) \rightarrow -\frac{x^2}{2}$, puis par continuité de l'exponentielle, $\exp (\alpha(n, m_n)) \rightarrow e^{-x^2/2}$.

Conclusion

pour $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = xe^{-x^2/2}$. Avec la question 3, cette limite vaut $g_1(x)$ pour tout réel x , où g_1 est la densité de la partie A pour $a = 1$.

Contrôle numérique (code exécuté, qui illustre sans démontrer) : pour $x = 1$ et $n = 10^7$, on obtient $\sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor) \approx 0,60659$, contre $e^{-1/2} \approx 0,60653$.

Partie D

1. (a) Par définition de la partie entière,

$$\lfloor \sqrt{nx} \rfloor = k \iff k \leq \sqrt{nx} < k+1 \iff \frac{k}{\sqrt{n}} \leq x < \frac{k+1}{\sqrt{n}}.$$

Conclusion

$$\{x \in \mathbb{R} : \lfloor \sqrt{nx} \rfloor = k\} = \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons $I_k = \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[$. Les intervalles I_k forment une partition de $\mathbb{R}$, et d'après 1.(a), f_n est constante sur I_k , égale à $\sqrt{n}P(X_n = k)$.

Positivité : $f_n \geq 0$ comme produit d'un réel positif et d'une probabilité.

Continuité : comme $X_n(\Omega) = \{2, \dots, n+1\}$, f_n est nulle sur I_k pour $k \notin \{2, \dots, n+1\}$, donc nulle hors de $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}} \right[$. Elle est constante sur chacun des intervalles I_k ; elle est donc continue sauf éventuellement aux $n+1$ points $\frac{k}{\sqrt{n}}$, $k \in \{2, \dots, n+2\}$.

Intégrale : f_n étant nulle hors d'un segment, l'intégrale converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} \sqrt{n}P(X_n = k) dt = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n}P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k) = 1.$$

Conclusion

f_n est une densité de probabilité.

2. (a) Rappel : la fonction de répartition de U est $F_U(t) = 0$ si $t < 0$, $F_U(t) = t$ si $t \in [0, 1]$, $F_U(t) = 1$ si $t > 1$. Notons $j = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$, de sorte que $j \leq \sqrt{nx} < j + 1$.

Si $k > j$, alors $k \geq j + 1 > \sqrt{nx}$, donc $\sqrt{nx} - k < 0$ et $P(U \leq \sqrt{nx} - k) = 0$.

Si $k < j$, alors $k \leq j - 1$, donc $\sqrt{nx} - k \geq \sqrt{nx} - j + 1 \geq 1$ et $P(U \leq \sqrt{nx} - k) = 1$.

Si $k = j$, alors $\sqrt{nx} - k \in [0, 1[$ et $P(U \leq \sqrt{nx} - k) = \sqrt{nx} - \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$.

Conclusion

$P(U \leq \sqrt{nx} - k)$ vaut 0 si $k > \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$, 1 si $k < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ et $\sqrt{nx} - \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ si $k = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $j = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$. On convient que $P(X_n = k) = 0$ pour tout entier $k \notin \{2, \dots, n+1\}$.

Calcul de $P(Y_n \leq x)$. La famille $((X_n = k))_{k \in \{2, \dots, n+1\}}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, puis par indépendance de X_n et U :

$$P(Y_n \leq x) = \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k, U \leq \sqrt{nx} - k) = \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k) P(U \leq \sqrt{nx} - k).$$

D'après 2.(a), seuls subsistent les termes $k < j$ (avec le facteur 1) et, si $j \in \{2, \dots, n+1\}$, le terme $k = j$ (avec le facteur $\sqrt{nx} - j$). Avec la convention ci-dessus :

$$P(Y_n \leq x) = P(X_n \leq j - 1) + (\sqrt{nx} - j) P(X_n = j). \quad (\star)$$

Calcul de l'intégrale. La fonction f_n étant nulle sur $\left] -\infty, \frac{2}{\sqrt{n}} \right]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f_n(t) dt$ converge. Par la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{j/\sqrt{n}} f_n(t) dt + \int_{j/\sqrt{n}}^x f_n(t) dt.$$

Sur $\left[\frac{j}{\sqrt{n}}, x \right] \subset I_j$, f_n vaut $\sqrt{n}P(X_n = j)$, donc le second terme vaut $\left(x - \frac{j}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n}P(X_n = j) = (\sqrt{n}x - j)P(X_n = j)$.

Pour le premier terme : si $j \leq 2$, f_n est nulle sur $\left] -\infty, \frac{j}{\sqrt{n}} \right]$ et le terme vaut $0 = P(X_n \leq j - 1)$; si $j \geq 3$, il vaut

$$\sum_{k=2}^{j-1} \int_{I_k} f_n = \sum_{k=2}^{j-1} P(X_n = k) = P(X_n \leq j - 1).$$

On retrouve exactement (★).

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

(c) Notons F_n la fonction de répartition de Y_n . D'après 2.(b), $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$, où f_n est positive et continue sauf en un nombre fini de points.

La fonction F_n est donc continue sur $\mathbb{R}$ (sur chaque intervalle où f_n est constante, F_n est affine, et les raccords sont continus par la relation de Chasles), et de classe C^1 en dehors des points $\frac{k}{\sqrt{n}}, k \in \{2, \dots, n+2\}$, avec $F'_n = f_n$ en ces points d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Conclusion

Y_n est une variable à densité, et la densité f_n , positive et égale à F'_n sauf en un nombre fini de points, est une densité de Y_n .

(d) On applique le résultat admis en début de partie avec $W_n = Y_n$, $h_n = f_n$ et $h = g_1$.

D'après la partie C (questions 3 et 4.(e)), pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = g_1(x)$, où $g_1(x) = xe^{-x^2/2}$ si $x \geq 0$ et $g_1(x) = 0$ si $x < 0$. D'après la partie A (avec $a = 1$), g_1 est une densité de probabilité; soit Y une variable aléatoire de densité g_1 . Pour tout n , Y_n admet la densité f_n (question 2.(c)).

Les trois hypothèses du résultat admis sont vérifiées.

Conclusion

(Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y de densité $g_1 : x \mapsto xe^{-x^2/2}$ sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$. Sa fonction de répartition, calculée en partie A, est $G(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ pour $x \geq 0$ et $G(x) = 0$ pour $x < 0$.

3. (a) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demandait de rappeler le théorème de Slutsky, hors programme. Elle est remplacée par un encadrement élémentaire, qui permet de traiter 3.(b) avec les fonctions de répartition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $j = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

Méthode 1 — Utilisation de la formule (★).

Comme X_n est à valeurs entières, $X_n \leq \sqrt{n}x \iff X_n \leq j$. Donc :

$$P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X_n \leq j) = P(X_n \leq j-1) + P(X_n = j).$$

En retranchant (★) :

$$P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - P(Y_n \leq x) = (1 - (\sqrt{nx} - j))P(X_n = j).$$

Comme $\sqrt{nx} - j \in [0, 1[$, le facteur $1 - (\sqrt{nx} - j)$ appartient à $]0, 1]$, d'où l'encadrement.

Méthode 2 — Inclusions d'événements.

Posons $A = \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$ et $B = (Y_n \leq x)$. Comme $U \geq 0$, on a $\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq Y_n$, donc $B \subset A$ et $P(A) - P(B) = P(A \setminus B) \geq 0$.

Si $\omega \in A \setminus B$, alors $X_n(\omega) \leq j$ et $X_n(\omega) + U(\omega) > \sqrt{nx} \geq j$. Si l'on avait $X_n(\omega) \leq j - 1$, on aurait $X_n(\omega) + U(\omega) \leq j$ car $U \leq 1$, ce qui est exclu. Donc $X_n(\omega) = j$ et $A \setminus B \subset (X_n = j)$, d'où $P(A) - P(B) \leq P(X_n = j)$.

La méthode 1 réutilise le calcul exact de 2.(b) ; la méthode 2 n'utilise que $0 \leq U \leq 1$ et le caractère entier de X_n , sans calcul de loi.

Conclusion

$$0 \leq P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - P(Y_n \leq x) \leq P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor).$$

(b) Le théorème de Slutsky n'est pas utilisé ; on travaille directement sur les fonctions de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de f_n :

$$P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}.$$

D'après la partie C, $f_n(x) \rightarrow g_1(x)$, limite finie, donc $\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Par 3.(a) et encadrement :

$$P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - P(Y_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après 2.(d), (Y_n) converge en loi vers Y . La fonction de répartition G de Y est continue sur $\mathbb{R}$ (car Y est à densité) ; la convergence en loi donne donc $P(Y_n \leq x) \rightarrow G(x)$ pour tout réel x . Par somme de limites :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x).$$

C'est la convergence en tout point de continuité de G , c'est-à-dire en tout réel.

Conclusion

$\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)$ converge en loi vers Y , variable à densité de densité $g_1 : x \mapsto xe^{-x^2/2}$ sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$ (loi de la partie A avec $a = 1$).

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2.(f) et 3.(d) : Code adapté en Python. Les fonctions sont écrites avec les en-têtes `def somme(n):` et `def estimation(eps):`, la valeur étant renvoyée par `return`. Justification : seul Python est au programme.
- Partie B, question 1 : Code adapté en Python. Les urnes sont indexées de 0 à $n - 1$; le choix aléatoire de l'urne utilise `np.random.randint(0, n)`, dont le fonctionnement est précisé dans l'énoncé. Les deux blancs sont conservés. Justification : seul Python est au programme ; le comportement mathématique est inchangé.
- Partie B, question 4.(d) : Code adapté en Python. Le calcul de $n!$ est effectué par une boucle `for`, pour rester dans les commandes du programme et éviter tout dépassement de capacité des entiers NumPy. Les deux blancs sont conservés.

- Partie C, préambule : rectification de l'énoncé. $\alpha(n, m)$ est défini pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$ et non pour tout $m \in \mathbb{N}$, car $\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ n'existe pas pour $k \geq n$.
- Partie C, question 2 : ajout du rappel de la formule

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Justification : le programme demande que cette formule soit rappelée.

- Partie C, question 4.(b) : rectification de l'énoncé, par l'ajout de la minoration $2 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$. Justification : sans elle, la formule de 4.(d) peut être fausse (pour $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor = 0$, elle donnerait une probabilité négative) et $\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)$ peut ne pas être défini.
- Partie D, préambule : correction typographique (« pour tout entier entier strictement positif » devient « pour tout entier n strictement positif »).
- Partie D, question 3.(a) : la demande de rappel du théorème de Slutsky (hors programme) est remplacée par l'encadrement $0 \leq P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - P(Y_n \leq x) \leq P(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor)$. La question 3.(b) est conservée et résolue sans Slutsky, par les fonctions de répartition.