



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2016

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. On note :

$$\forall n \geq 1, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

(a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.

(b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

(c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ , appelé constante d'Euler.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}.$$

(a) Justifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n)$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geq 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X)$$

(a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On suppose dans cette question que $n \geq 3$. Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.

(d) Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$.
On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$$

et :

$$f : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - \ln(y - x)$$

(a) Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.

(b) Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

(c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geq 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par :

$$S(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (X - x_i).$$

On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S(X) = (X - x_k)Q_k(X)$$

(a) Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(b) En déduire que :

u est un point critique de $f \iff$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

(c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q'_k(x_k)$.

(d) Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i, 1 \leq i \leq n, i \neq k\}$, on a :

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x - x_i}$$

(e) En déduire que :

u est un point critique de $f \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$

(f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

En observant le terme dominant de S , montrer plus précisément que :

u est un point critique de $f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$

4. (a) À l'aide des résultats des questions 1(d) et 3(f), montrer que la fonction f admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.

(b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

PROBLÈME

Partie A

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a (1-x)^b & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

(c) En déduire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

(d) Justifier que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X suit la loi beta de paramètres a et b .

(a) Montrer que X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$

(b) Montrer que X admet une variance et que :

$$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$

(c) Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k (1-x)^{a+b+1-k}}{k! (a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition de X .

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,

- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été ajoutées dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement «on pioche une boule rouge au n -ième tirage».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n .

4. On souhaite simuler l'expérience en Python. On suppose que la bibliothèque numpy a été importée par l'instruction `import numpy as np`. On rappelle que l'appel `np.random.random()` renvoie un réel choisi au hasard selon la loi uniforme sur $[0, 1[$ et que `np.zeros(p)` renvoie un tableau numpy de longueur p dont tous les éléments sont nuls.

(a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

Python

```
def tirage(x, y):
    r = np.random.random()
    if .....:
        res = 0
    else:
        res = 1
    return res
```

(b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne

contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

Python

```
def experience(a, b, n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x, y)
        if r == 0:
            x = .....
        else:
            .....
    Xn = .....
    return Xn
```

(c) Écrire une fonction Python d'en-tête :

Python

```
def simulation(a, b, n, m):
```

qui fait appel m fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n . La valeur renvoyée sera un tableau numpy de longueur $n + 1$ dont l'élément d'indice k , pour $0 \leq k \leq n$, est l'approximation de $P(X_n = k)$; ce tableau contient donc les approximations de $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots, P(X_n = n)$.

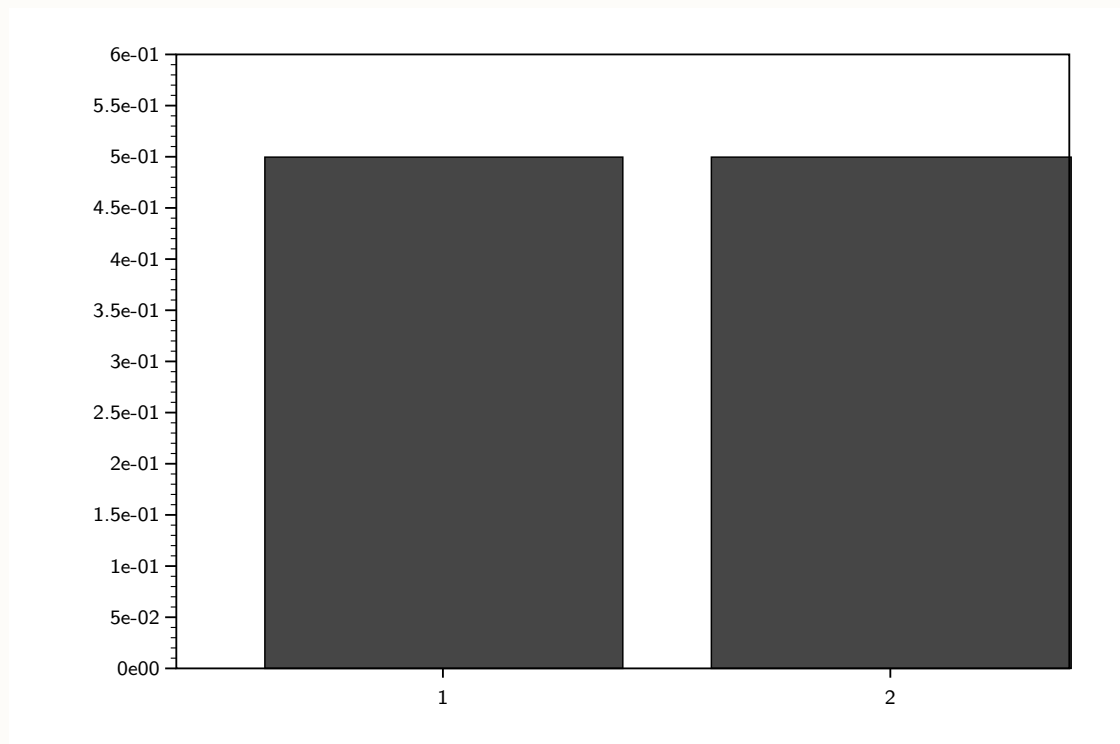
5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction simulation avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en « bâtons ».

On suppose que la bibliothèque matplotlib.pyplot a été importée par l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt`. L'appel `plt.bar(abscisses, hauteurs)` trace un diagramme en bâtons : pour chaque indice j , une barre verticale centrée en `abscisses[j]` et de hauteur `hauteurs[j]`; l'appel `plt.show()` affiche le graphique. Dans les commandes ci-dessous, les abscisses sont $1, 2, \dots, n + 1$: la barre d'abscisse $j + 1$ représente donc l'estimation de

$P(X_n = j)$, pour $0 \leq j \leq n$.

Python

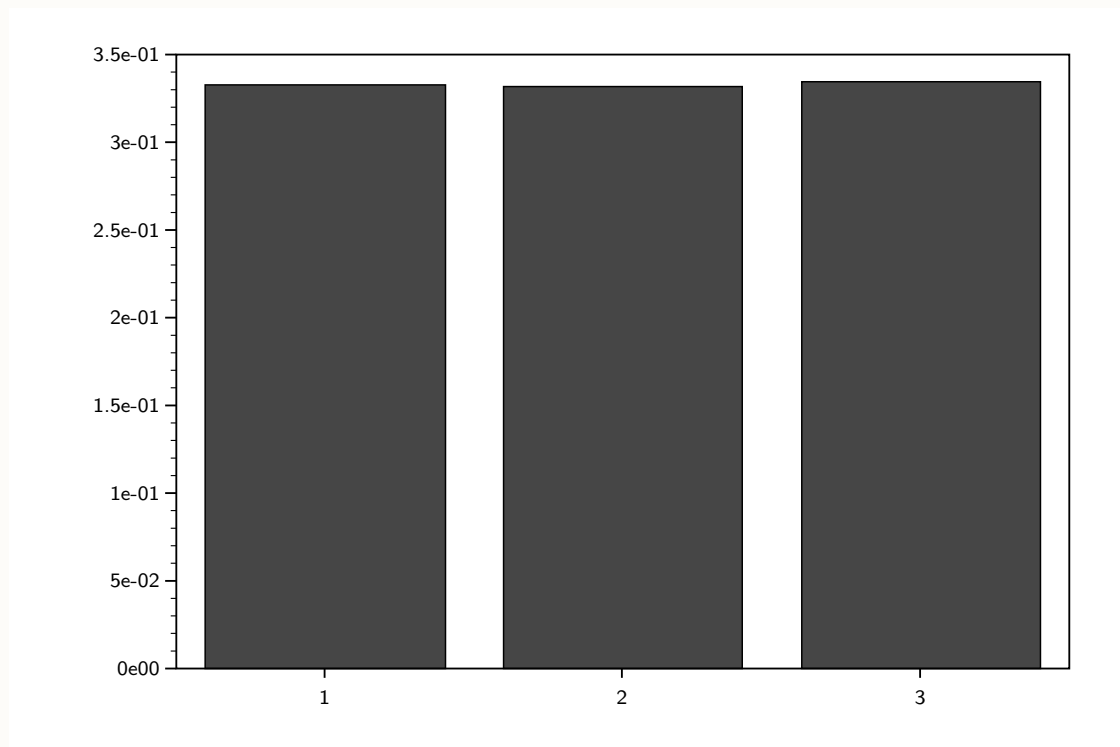
```
plt.bar(range(1, 3), simulation(1, 1, 1, 100000))
plt.show()
```



Hauteurs lues sur la figure : 0,500 pour l'abscisse 1 et 0,500 pour l'abscisse 2.

Python

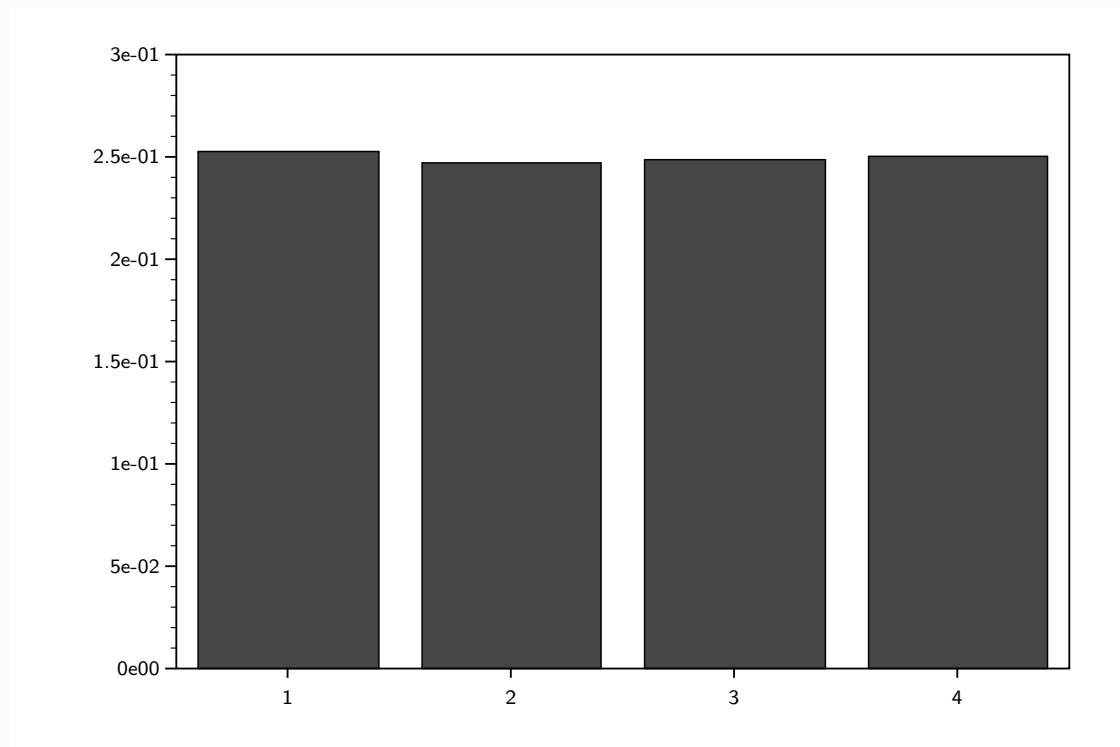
```
plt.bar(range(1, 4), simulation(1, 1, 2, 100000))
plt.show()
```



Hauteurs lues sur la figure, pour les abscisses 1 à 3 : 0,333; 0,332; 0,335.

Python

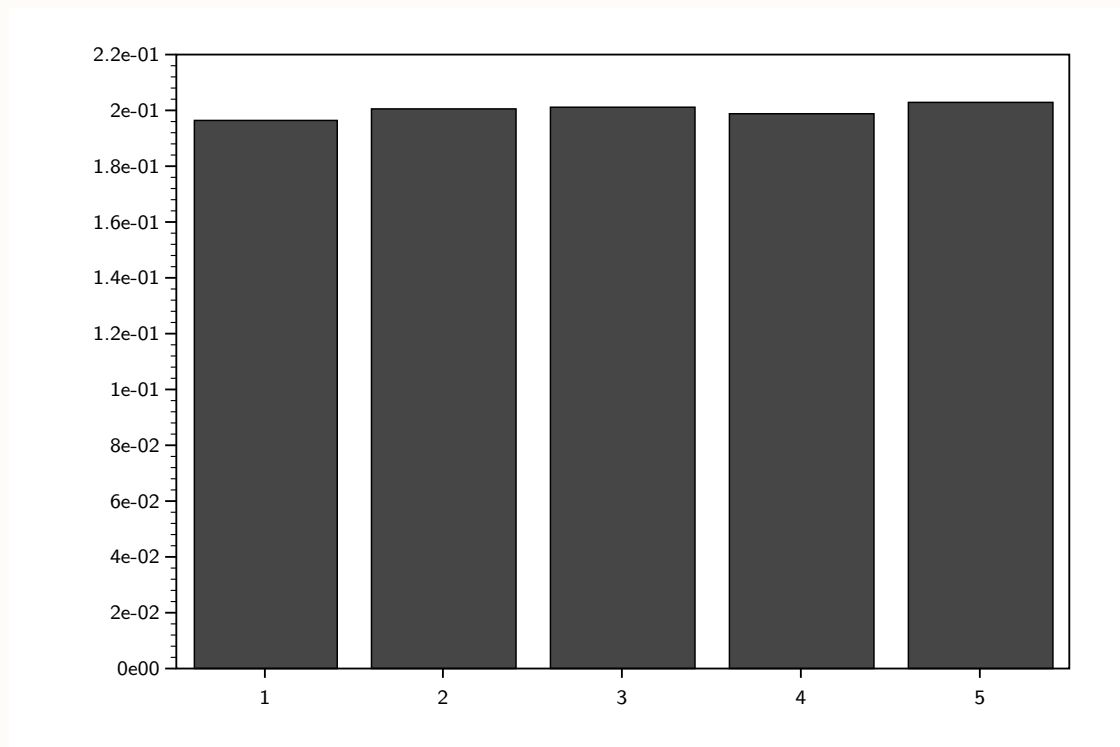
```
plt.bar(range(1, 5), simulation(1, 1, 3, 100000))
plt.show()
```



Hauteurs lues sur la figure, pour les abscisses 1 à 4 : 0,253 ; 0,247 ; 0,249 ; 0,250.

Python

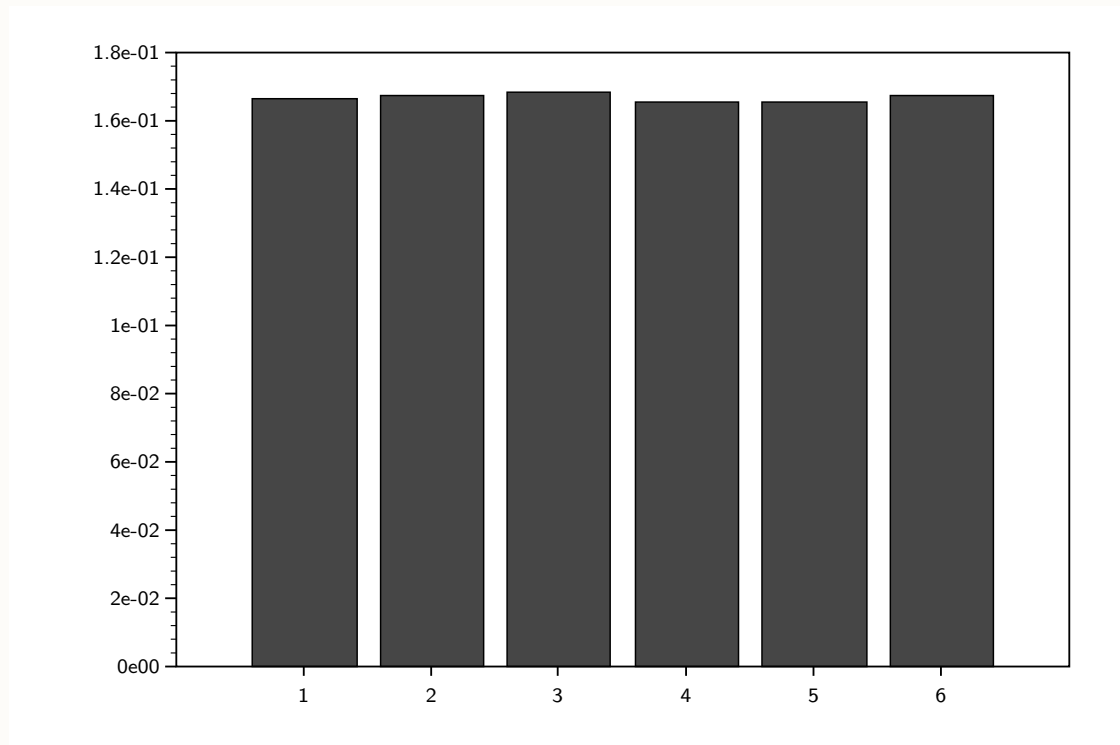
```
plt.bar(range(1, 6), simulation(1, 1, 4, 100000))
plt.show()
```



Hauteurs lues sur la figure, pour les abscisses 1 à 5 : 0,196 ; 0,201 ; 0,201 ; 0,199 ; 0,203.

Python

```
plt.bar(range(1, 7), simulation(1, 1, 5, 100000))
plt.show()
```



Hauteurs lues sur la figure, pour les abscisses 1 à 6 : 0,166 ; 0,167 ; 0,168 ; 0,165 ; 0,165 ; 0,167.

(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n .

(b) Déterminer la loi de X_1 .

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k + 1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) \text{ avec } \ell \notin \{k, k + 1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n , prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \dots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a + X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \frac{na}{a+b}$.

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in \llbracket a, a+b+n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i} \binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \frac{X_n}{n}$. On note F_n la fonction de répartition de Y_n .

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?

(b) Soit $x \geq 1$. Que vaut $F_n(x)$?

8. On fixe $x \in]0, 1[$. Pour tout réel y , on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y , c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leq y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$.

(a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leq \lfloor nx \rfloor)$.

(b) À l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\binom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).

9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

10. Dédire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi beta dont on explicitera les paramètres.

11. À l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.