



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout polynôme P de E , on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
 - (b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E .
 - (c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout (P, Q) de E^2 , on note :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

- (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.
 - (b) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
3. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

- (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ .

EXERCICE 2

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

(a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.

Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

(c) En déduire les variations de u sur I .

(d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.

Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

(e) En déduire les variations de v sur I .

(f) Montrer que :

$$\forall x \in I, g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(b) Déduire de la question 1(f) un encadrement de π .

3. On pose pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel θ ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

(d) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie, à l'aide des relations (*) et (**) et de la question 3(b), une approximation x de π à ϵ près, ainsi que le nombre k d'itérations qui ont été nécessaires.

Python

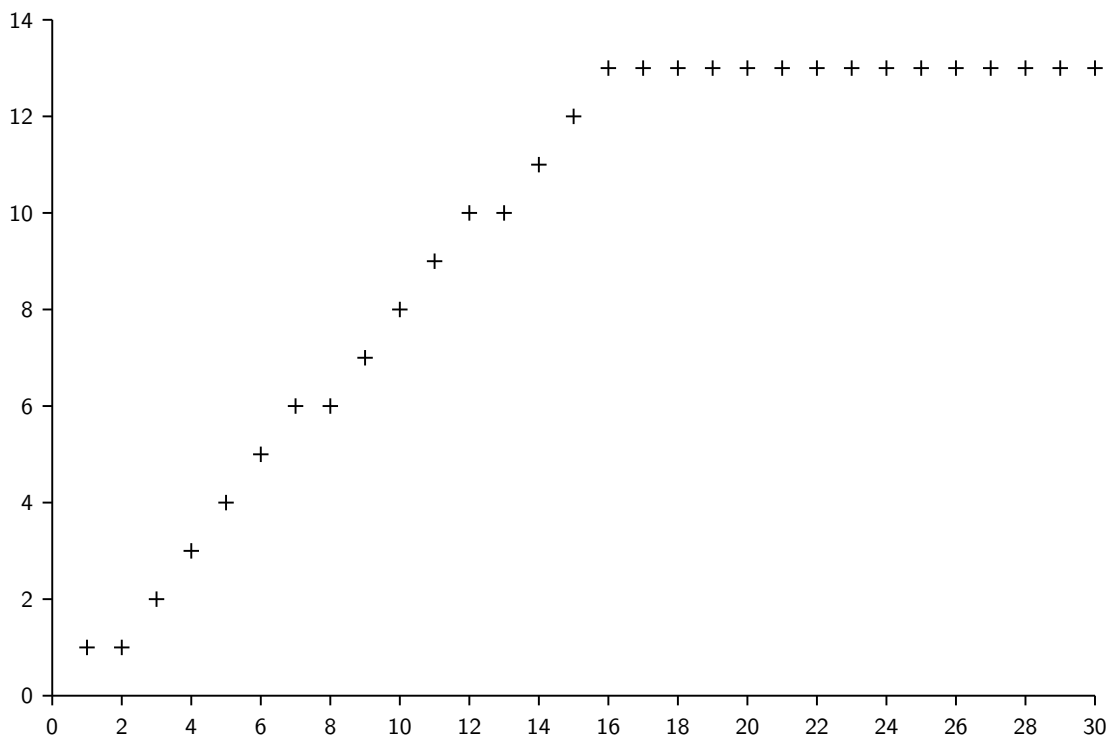
```
import numpy as np

def h(epsilon):
    k = 0
    a = np.sqrt(3) / 2
    b = 1 / 2
```

```
while _____:
    a = _____
    b = _____
    k = _____
x = _____
return x, k
```

(e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Python qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et qui renvoie un vecteur (tableau numpy) de taille p qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k} , pour $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

(f) On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



Valeurs lues sur le graphe (en abscisse k , en ordonnée le nombre d'itérations) :

k	1	2	3	4	5	6	7
itérations	1	1	2	3	4	5	6

Tableau — suite 2/3

k	8	9	10	11	12	13	14
itérations	6	7	8	9	10	10	11

Tableau — suite 3/3

k	15	16 à 30
itérations	12	13

Commenter ce graphe.

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X .

On note pour tout entier $n \geq 2$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est implosive si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Si la loi de X est implosive, on appelle indice d'implosion de X le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $n \geq 2$. Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f . Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, Y_n admet une densité f_n et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}^+$ et dont on note la fonction de répartition Φ , on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \int_0^x t\varphi(t) dt = \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt - x(1 - \Phi(x)).$$

(b) On suppose que V admet une espérance.

Montrer que $x(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge.

(c) On suppose que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge. Montrer que V admet une espérance.

(d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Déterminer le réel α .

(b) Donner la fonction de répartition F de X .

(c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2 , que l'on calculera.

(d) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

(f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(a) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leq k)$.

(d) Déterminer la loi de Y_2 . Admet-elle une espérance ?

(e) Déterminer la loi de Y_3 . Admet-elle une espérance ?

(f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geq 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ? »

6. Soit $\alpha > 1$.

(a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

Déterminer la fonction de répartition F de X .

(c) Discuter, en fonction de α , l'existence de l'espérance de X .

(d) Discuter, en fonction de n et de α , l'existence de l'espérance de Y_n .

(e) Répondre à la question posée.

Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ? »

7. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

Déterminer la fonction de répartition F de X .

(c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n .

(e) Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que la variable aléatoire X implose sur Y si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y .

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y . À l'aide de la formule de la question A.1, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y .
9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y .
10. Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y .

(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).

11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g . On note G sa fonction de répartition.

Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m , qui implose sur Y , alors pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k , qui implose sur Y .

Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geq 2$, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est explosive s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance. Si la loi de X est explosive, on appelle indice d'explosion de X le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?