



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2014

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x \ln(x) Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k \end{cases} \quad \text{et} \quad v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k \ln(x) \end{cases}$$

Pour toute fonction f appartenant à E , on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$
(c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$).

On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E .

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ . On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ puis celle de } f.$$

7. Pour chaque valeur propre λ de φ , déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$

puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$

$$\left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

4. Démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x)$$

puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0, 1[$.

(a) Prouver que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a))$$

et :

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

(b) Établir que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$$

est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$$

en fonction de Ψ et de a .

PROBLÈME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2 . Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2 . Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il peut remporter avec une probabilité p , son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$;

- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n , on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que, après l'instruction `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random()` crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ (qui suit en outre la loi uniforme sur $[0, 1[$).

(a) Écrire une fonction Python DUEL, sans argument, qui crée un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.

(b) Écrire une fonction Python TEST_VICTOIRE qui, à trois nombres a, b, c fournis en arguments, renvoie True si les trois sont égaux, False sinon.

- (c) Écrire une fonction Python TOURNOI, sans argument, simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives).
Indication : si on souhaite, on pourra convenir que la valeur 1 renvoyée par DUEL lors du duel numéro k signifie que le joueur A_k remporte ce duel, et utiliser les fonctions DUEL et TEST_VICTOIRE en les répétant convenablement, en conservant les numéros des gagnants des trois derniers duels, jusqu'à ce que TEST_VICTOIRE appliquée à ces trois numéros renvoie True.

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

	numéro du joueur gagnant le duel	
duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n , démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :

$$\forall n \geq 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

PARTIE II : Étude du cas général.

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0, 1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} X^k \right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n -ième duel, le vainqueur du n -ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité :

$$\forall n \geq N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Établir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), \dots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geq N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ (question II.2), établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} P(E_n)$$

puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ (question II.4) sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n).$$

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

- (a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.
- (b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n).$$

En déduire la valeur de $E(X)$.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie II sont conservées. Les résultats de la question II.5 pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$

et on admet que :

$$(qX - 1)Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N - 1)X - N.$$

Soit z un réel tel que

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine réelle de Q est de multiplicité 1.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $N = 3$. Le polynôme $Q(X) = pX + pqX^2 - 1$ est alors de degré 2 et admet la racine réelle r_3 (question II.5) ; il existe donc deux réels non nuls et distincts z_1, z_2 tels que :

$$Q(X) = pq(X - z_1)(X - z_2).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ S \mapsto \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), S\left(\frac{1}{z_2}\right) \right) \end{cases}$$

où z_1, z_2 sont les deux racines distinctes de Q .

(a) Prouver que f est un isomorphisme.

(b) Écrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}^2$. Expliciter ${}^t A$ (la transposée de A).

(c) En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 + x_2 = P(E_1) \\ \frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2} = P(E_2) \end{cases}$$

admet une unique solution (α_1, α_2) .

3. Soit (α_1, α_2) l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ (cf. question III.2c). On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{(z_2)^{n-1}} = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \left(\frac{1}{z_j} \right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 3$:

$$u_n = \sum_{k=1}^2 pq^{k-1} u_{n-k}.$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$