



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2013

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U ;
- $\text{Ker}(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ et on note $\|\cdot\|$ sa norme associée.

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel $k \geq 2$ tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X \rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$ puis que : $\text{Im}(B) = \text{Im}(A)$.
6. Établir que : $\forall X \in \text{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.

EXERCICE 2

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5} [x^2 (1 - x^2) + y^2 (1 - y^2) + 2xy];$$

- la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad (u_0, u_1) \in [0, 1]^2.$$

1. Étude de f .

(a) Si (a, b) est un point critique de f , justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

On admettra dans toute la suite que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \leq \frac{2}{5} (x^2 + y^2) - \frac{1}{10} (x^2 + y^2)^2.$$

(b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10}$.

(c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

- ### 2. Programmation de $(u_n)_{n \geq 0}$.
- Écrire un programme en Python demandant à l'utilisateur un entier N ainsi que les valeurs initiales u_0, u_1 et calculant la valeur de u_N correspondante.

On rappelle que l'instruction `float(input("message"))` affiche le texte `message`, attend que l'utilisateur saisisse un nombre et renvoie ce nombre sous forme de réel ; l'instruction `int(input("message"))` fait de même pour un entier. L'instruction `print(x)` affiche la valeur de `x`.

3. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{avec} \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

(a) Démontrer que : $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

(b) Justifier que : $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq a_n$.

(c) Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

PROBLÈME

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x c'est-à-dire l'unique entier N tel que :
 $N \leq x < N + 1$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on l'appelle « la discrétisée de X ».

Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (PARTIE I) ;

- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (PARTIE II) ;
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (PARTIE III).

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. En Python, après les importations `import numpy as np` et `import numpy.random as rd` :

- la commande `np.floor(x)` calcule la partie entière du réel x ;
- la commande `rd.random()` crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ (qui suit en outre la loi uniforme sur $[0, 1]$).

On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ alors, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, aZ suit la loi uniforme sur $[0, a]$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et X_d sa discrétisée.

Écrire une fonction Python qui à un réel a (strictement positif) fourni par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d .

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.

Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Établir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, 9\} \quad \text{et} \quad \forall k \in Y(\Omega), \quad P(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y .

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.

(a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.

(b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que :

$$P(Y_n \leq x) = 1 - \exp \left(-\frac{\lambda (\lfloor nx \rfloor + 1)}{n} \right).$$

(d) Donner un encadrement simple de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t) dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, \dots, e_n$.
2. Établir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Établir que la famille $(u(e_k))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t) dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \frac{x}{6}$.
6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.
 - (a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[; \quad f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Établir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X_d(\Omega) = \{0, \dots, N\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X_d(\Omega), \quad P(X_d = k) = R(k).$$

- (b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad \forall k \in Y(\Omega), \quad P(Y = k) = \frac{k}{6}.$$

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

et tel que Y soit la discrétisée de X . Indication : procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série

$$\sum_{k \geq 0} g(k)$$

converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

On suppose en outre que g est décroissante et qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad |g''(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geq 0; \quad f(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 0} g'(x + k).$$

Quel est le signe de f ?

2.

(a) Établir que : $\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$

$$|g'(x + k) - g'(a + k)| \leq \frac{C|x - a|}{(k + 1)^2}.$$

(b) Prouver l'existence d'un réel $D \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leq D|x - a|.$$

Justifier que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif, pour tout entier N , on pose :

$$S_N(t) = - \sum_{k=0}^N g'(t + k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = - \sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t + k).$$

(a) Démontrer que : $\forall k \geq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$

$$\frac{1}{(t + k + 1)^2} \leq \frac{1}{t + k} - \frac{1}{t + k + 1}$$

puis que :

$$\forall N \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leq \frac{C}{N + 1}.$$

(b) Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t) dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t) dt.$$

(c) Justifier que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 0$ et que :

$$\int_0^1 f(t) dt = g(0).$$

4.

(a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

(b) Pour tout entier $N \geq 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t) dt$. Établir que :

$$\forall N \geq 1, \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{[x]} \leq \int_0^x f(t) dt \leq S_{[x]+1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et préciser sa valeur.

- (c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y .