



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques 1

2011

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel j , on note $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P .

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

(b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$$

puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leq j \leq k \leq n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

(c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n = \sum_{k=0}^n a_k P_k$$

puis établir que :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

Ainsi on a établi la relation :

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

- (a) Établir que u est un endomorphisme de E .
- (b) Écrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E .
- (c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.
- (d) La matrice A est-elle diagonalisable? (Une réponse argumentée est attendue.)

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

- (a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- (b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 2

On considère :

- la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t \left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right).$$

- la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x = \exp(y \ln(x)) - \exp(x \ln(y)),$$

où $\exp(s)$ désigne l'exponentielle du réel s , c'est-à-dire que $\exp(s) = e^s$. On admet que f est de classe C^2 sur U .

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U .

1. Étudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ .
2. Prouver la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$$

et calculer sa somme.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$$

en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. On admettra la convergence de cette série.

4. Justifier que :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in]1, +\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 1, \quad y > 1 \quad ; \quad \ln(x) \ln(y) = 1 \quad ; \quad y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x).$$

6. Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f . Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right) \quad ; \quad \varphi(t) = \ln(t).$$

7. Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f .

8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U .

Problème

La partie I consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$$

possèdent la même loi lorsque $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie II a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire X possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il n'existe aucune variable aléatoire Y possédant une densité g nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

La partie III consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire introduite à la partie II.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

Partie I. Étude des variables Y_n et Z_n .

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t)$.
- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = 0 \text{ si } t < 0 ; \quad F_X(t) = 1 - \exp(-at) \text{ si } t \geq 0,$$

où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel y , c'est-à-dire que $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

$$Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i},$$

où $\max(X_1, \dots, X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, \dots, X_n$.

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = 0 \text{ si } t < 0 ; \quad f_n(t) = n \exp(-t) (1 - \exp(-t))^{n-1} \text{ si } t \geq 0.$$

1. On considère un tableau X de la bibliothèque numpy contenant 2011 nombres réels, préalablement rempli. En Python, ses coefficients sont $X[0], X[1], \dots, X[2010]$. Dans cette question, on n'utilisera pas les fonctions $\max$ de Python ou de numpy.

(a) Écrire un programme en Python calculant et affichant les réels :

$$\max(X[0], X[1]) \quad \text{et} \quad \max(X[0], X[1], X[2]).$$

(b) Écrire un programme en Python calculant et affichant le réel :

$$\max(X[0], X[1], \dots, X[2010]) = \max_{0 \leq i \leq 2010} X[i].$$

2. (a) Pour tout réel t , exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t), \dots, F_{X_n}(t)$.

(b) Pour tout réel t , donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geq 0$.

- (c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n .

3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{X_{n+1}}{n+1}$.

(b) Démontrer que $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1} .

4. Pour tout réel x , vérifier que :

$$\int_0^x n \exp(nt) (1 - \exp(-t))^{n-1} dt = (\exp(x) - 1)^n.$$

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité. Indication : pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$.

Partie II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. On admet que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour toute fonction f appartenant à E , on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fixe dans cette partie une fonction f appartenant à E . Pour tout réel positif x , on note :

$$k_f(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt.$$

1. Soient φ, ψ deux fonctions appartenant à E , dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant l'équation $(\mathcal{D}_f)$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x).$$

(a) Prouver que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E , montrer que $\varphi = \psi$.

Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation $(\mathcal{D}_f)$ lorsque $f \in E$.

2. Pour tout réel positif x , justifier la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t) dt$.

3. Établir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k'_f(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq 0.$$

(a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

$$(\beta) : \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.$$

(b) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x) dx.$$

5. On revient au cas général où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge.

6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

Justifier qu'il n'existe aucune densité g , nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie III. Étude de l'application $f \mapsto k_f$.

À la partie II, on a établi que si f appartient à E , il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$$

appartenant à E telle que :

$$k_f - k'_f = f.$$

On considère alors l'application φ définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Établir que φ est un endomorphisme de E .

Définition : on dit que le réel λ est valeur propre de φ s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ et on appelle sous-espace propre de φ associé à λ l'espace vectoriel

$$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \text{ telle que } \varphi(f) = \lambda f\}.$$

La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de φ .

2. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

Vérifier que f_a appartient à E , que f_a est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre associée.

3. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

(a) Montrer que λ est nécessairement non nul.

(b) Établir que f est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.

(c) Pour tout réel positif x , donner l'expression de $f(x)$ en fonction de λ , x et d'une certaine constante.

(d) Montrer que $\lambda \in]0, 1[$.

4. Préciser l'ensemble $\text{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ de φ , proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.