



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Rectification de l'énoncé. Le document original définit $\text{Sp}(\Phi_A)$ comme « l'ensemble formé des valeurs de Φ_A ». Il s'agit d'une coquille : la notation Sp et la suite de l'exercice montrent qu'il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de Φ_A . L'énoncé a été rectifié en ce sens.

Résultats du cours utilisés dans tout l'exercice :

- Théorème spectral (admis au programme) : toute matrice symétrique réelle $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable ; il existe une matrice Q inversible, et même orthogonale (${}^tQ = Q^{-1}$), et une matrice diagonale Δ telles que $S = Q\Delta Q^{-1}$.
- Dans un espace euclidien, les coordonnées d'un vecteur v dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ sont les $\langle e_k | v \rangle$.
- Les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme sont des racines de tout polynôme annulateur.
- La somme des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

PARTIE I : Étude d'un cas particulier

Question 1

Ce qu'il faut établir : la j -ième colonne de T est formée des coordonnées de $\Phi_A(V_j)$ dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) . On calcule donc les quatre images, en utilisant la décomposition :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = xV_1 + yV_2 + zV_3 + wV_4.$$

Image de V_1 :

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(V_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot V_1 - V_2 + V_3 + 0 \cdot V_4.$$

Image de V_2 :

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(V_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -V_1 + 0 \cdot V_2 + 0 \cdot V_3 + V_4.$$

Image de V_3 :

$$AV_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V_1 + 0 \cdot V_2 + 0 \cdot V_3 - V_4.$$

Image de V_4 :

$$AV_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_4A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(V_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot V_1 + V_2 - V_3 + 0 \cdot V_4.$$

Les colonnes de coordonnées sont donc $(0, -1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, 0)$: ce sont exactement les colonnes de la matrice T de l'énoncé.

Diagonalisabilité. On compare les coefficients symétriques de T : $t_{12} = t_{21} = -1$, $t_{13} = t_{31} = 1$, $t_{14} = t_{41} = 0$, $t_{23} = t_{32} = 0$, $t_{24} = t_{42} = 1$, $t_{34} = t_{43} = -1$. Ainsi ${}^tT = T$: T est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, T est diagonalisable (avec une matrice de passage orthogonale).

Conclusion

T est la matrice de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) , et T est diagonalisable.

Question 2

Ce qu'il faut établir : l'égalité matricielle $T^3 = 4T$, puis en tirer un polynôme annulateur de T .

Calcul de T^2 . Comme T est symétrique, ses colonnes sont ses lignes ; notons $r_1 = (0, -1, 1, 0)$, $r_2 = (-1, 0, 0, 1)$, $r_3 = (1, 0, 0, -1)$, $r_4 = (0, 1, -1, 0)$ ses lignes. Le coefficient (i, j) de T^2 est le produit scalaire usuel de r_i et de r_j :

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_1 &= 2, \quad r_1 \cdot r_2 = 0, \quad r_1 \cdot r_3 = 0, \quad r_1 \cdot r_4 = -2, \quad r_2 \cdot r_2 = 2, \quad r_2 \cdot r_3 = -2, \quad r_2 \cdot r_4 = 0, \\ r_3 \cdot r_3 &= 2, \quad r_3 \cdot r_4 = 0, \quad r_4 \cdot r_4 = 2. \end{aligned}$$

D'où :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $T^3 = T^2T$. La i -ième ligne de T^2T est la combinaison des lignes de T dont les coefficients sont ceux de la i -ième ligne de T^2 :

- ligne 1 : $2r_1 - 2r_4 = (0, -2, 2, 0) - (0, 2, -2, 0) = (0, -4, 4, 0) = 4r_1$,
- ligne 2 : $2r_2 - 2r_3 = (-2, 0, 0, 2) - (2, 0, 0, -2) = (-4, 0, 0, 4) = 4r_2$,

- ligne 3 : $-2r_2 + 2r_3 = (4, 0, 0, -4) = 4r_3,$
- ligne 4 : $-2r_1 + 2r_4 = (0, 4, -4, 0) = 4r_4.$

Ainsi $T^3 = 4T$.

Conséquence sur les valeurs propres. Le polynôme

$Q(X) = X^3 - 4X = X(X - 2)(X + 2)$ est annulateur de T . Soit λ une valeur propre de T et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Par récurrence immédiate $T^k X = \lambda^k X$, donc :

$$0 = (T^3 - 4T)X = (\lambda^3 - 4\lambda)X.$$

Comme $X \neq 0$, on obtient $\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$.

Conclusion

$T^3 = 4T$ et $\text{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}$. On ne sait pas encore lesquels de ces trois réels sont effectivement valeurs propres.

Question 3

Ce qu'il faut établir : une base de $E_0(T) = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0\}$. On résout le système.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, on a :

$$TX = 0 \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + w = 0 \\ x - w = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ w = x \end{cases}.$$

Donc $X \in E_0(T) \iff X = xU_1 + yU_2$ avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (U_1, U_2) engendre $E_0(T)$; elle est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de U_2 est nulle mais pas celle de U_1 , et $U_2 \neq 0$).

Conclusion

(U_1, U_2) est une base de $E_0(T)$, qui est de dimension 2; en particulier 0 est valeur propre de T .

Remarque : U_1 et U_2 sont les coordonnées de $V_1 + V_4 = I_2$ et de $V_2 + V_3 = A$; ce sont bien des matrices qui commutent avec A , c'est-à-dire des éléments du noyau de Φ_A .

Question 4

Ce qu'il faut établir : les produits TX_1 et TX_2 . On calcule ligne par ligne.

$$TX_1 = \begin{pmatrix} 0+1+1+0 \\ -1+0+0-1 \\ 1+0+0+1 \\ 0-1-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1, \quad TX_2 = \begin{pmatrix} 0-1-1+0 \\ -1+0+0-1 \\ 1+0+0+1 \\ 0+1+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

Comme $X_1 \neq 0$ et $X_2 \neq 0$, X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et X_2 un vecteur propre associé à la valeur propre -2 .

Conclusion

$TX_1 = 2X_1, TX_2 = -2X_2$. Avec les questions 2 et 3, on obtient $\text{Sp}(T) = \{-2, 0, 2\}$.

Question 5

Ce qu'il faut établir : une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T . On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{colonnes } U_1, U_2, X_1, X_2), \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il reste à justifier que P est inversible et que $T = PDP^{-1}$.

Méthode 1 — Somme directe des espaces propres.

Soient des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma X_1 + \delta X_2 = 0$. Le vecteur $\alpha U_1 + \beta U_2$ appartient à $E_0(T)$, γX_1 à $E_2(T)$ et δX_2 à $E_{-2}(T)$. Les valeurs propres 0, 2, -2 étant

distinctes, la somme $E_0(T) + E_2(T) + E_{-2}(T)$ est directe, donc chacun des trois vecteurs est nul. Ainsi $\gamma X_1 = 0$ et $\delta X_2 = 0$ donnent $\gamma = \delta = 0$, et $\alpha U_1 + \beta U_2 = 0$ donne $\alpha = \beta = 0$ car (U_1, U_2) est libre.

La famille (U_1, U_2, X_1, X_2) est donc libre ; elle comporte 4 vecteurs dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, de dimension 4 : c'est une base, et P est inversible.

Méthode 2 — Orthogonalité des colonnes.

Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on vérifie :

$$\begin{aligned} {}^tU_1U_2 &= 0, \quad {}^tU_1X_1 = 1 - 1 = 0, \quad {}^tU_1X_2 = 1 - 1 = 0, \quad {}^tU_2X_1 = -1 + 1 = 0, \quad {}^tU_2X_2 = 1 \\ &\quad - 1 = 0, \quad {}^tX_1X_2 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Les quatre colonnes de P sont non nulles et deux à deux orthogonales. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : si

$$\sum_k c_k W_k = 0,$$

le produit scalaire avec W_j donne $c_j \|W_j\|^2 = 0$, donc $c_j = 0$. On conclut comme dans la méthode 1.

Comparaison : la méthode 1 repose sur un résultat général valable pour toute matrice ; la méthode 2 exploite la symétrie de T (les espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux) et se vérifie par un calcul direct.

Relation $T = PDP^{-1}$. Colonne par colonne, TP a pour colonnes $TU_1 = 0, TU_2 = 0, TX_1 = 2X_1, TX_2 = -2X_2$, qui sont aussi les colonnes de PD . Donc $TP = PD$ et, P étant inversible, $T = PDP^{-1}$.

Conclusion

P et D ci-dessus conviennent.

Remarque de cohérence avec la partie II : $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ et

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et une matrice d'ordre 2 a au plus deux valeurs propres distinctes, donc $\text{Sp}(A) = \{0, 2\}$ et $\Gamma = \{-2, 0, 2\} = \text{Sp}(T) = \text{Sp}(\Phi_A)$.

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général

Question 1

Ce qu'il faut établir : Φ_A est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et linéaire.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les produits AM et MA de deux matrices d'ordre n sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par distributivité du produit matriciel :

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) \\ &= \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N). \end{aligned}$$

Conclusion

Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2

Ce qu'il faut établir : $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique, positive et définie.

Vérification de l'expression en somme double. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient diagonal (j, j) de ${}^t M N$ vaut

$$\sum_{i=1}^n ({}^t M)_{j,i} n_{i,j} = \sum_{i=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

En sommant sur j , on retrouve

$$\text{Tr}({}^t M N) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

Symétrie : l'expression

$$\sum_{i,j} m_{i,j} n_{i,j}$$

est inchangée quand on échange M et N , donc $\langle M | N \rangle = \langle N | M \rangle$.

Linéarité à droite : pour $N, N' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ${}^t M(\lambda N + N') = \lambda {}^t M N + {}^t M N'$, et la trace est linéaire, donc $\langle M | \lambda N + N' \rangle = \lambda \langle M | N \rangle + \langle M | N' \rangle$. Par symétrie, l'application est aussi linéaire à gauche : elle est bilinéaire.

Positivité :

$$\langle M | M \rangle = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\langle M | M \rangle = 0$, une somme de carrés de réels est nulle, donc chaque $m_{i,j}$ est nul, et $M = 0$.

Conclusion

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui devient un espace euclidien de dimension n^2 . En notant $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1, la formule en somme double donne $\langle E_{i,j} | E_{k,l} \rangle = 1$ si $(i, j) = (k, l)$ et 0 sinon : la base canonique $(E_{i,j})$ est orthonormale.

Question 3

Ce qu'il faut établir : Φ_A est un endomorphisme symétrique, puis appliquer le théorème spectral.

On utilise ${}^t(UV) = {}^tV {}^tU$, la linéarité de la transposition et de la trace, ${}^tA = A$ et $\text{Tr}(UV) = \text{Tr}(VU)$.

D'une part :

$$\langle \Phi_A(M) | N \rangle = \text{Tr}({}^t(AM - MA)N) = \text{Tr}({}^tM A N) - \text{Tr}(A {}^tM N).$$

D'autre part :

$$\langle M | \Phi_A(N) \rangle = \text{Tr}({}^tM(AN - NA)) = \text{Tr}({}^tM A N) - \text{Tr}({}^tM N A).$$

Avec $U = A$ et $V = {}^tM N$, on a $\text{Tr}(A {}^tM N) = \text{Tr}({}^tM N A)$. Les deux expressions sont donc égales :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \Phi_A(M) | N \rangle = \langle M | \Phi_A(N) \rangle.$$

Diagonalisabilité. Φ_A est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Soit $\mathcal{B}$ la base orthonormale $(E_{i,j})$ (rangée dans un ordre fixé) et S la matrice de Φ_A dans $\mathcal{B}$, d'ordre n^2 . La base étant orthonormale, la coordonnée de $\Phi_A(E_{i,j})$ selon $E_{k,l}$ est $\langle E_{k,l} | \Phi_A(E_{i,j}) \rangle$, donc :

$$S_{(k,l),(i,j)} = \langle E_{k,l} | \Phi_A(E_{i,j}) \rangle = \langle \Phi_A(E_{k,l}) | E_{i,j} \rangle = \langle E_{i,j} | \Phi_A(E_{k,l}) \rangle = S_{(i,j),(k,l)}.$$

La matrice S est symétrique réelle ; par le théorème spectral, il existe Q inversible et Δ diagonale telles que $S = Q\Delta Q^{-1}$. Les colonnes de Q sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de n^2 matrices formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'égalité $SQ = Q\Delta$ montre que ce sont des vecteurs propres de Φ_A .

Conclusion

Φ_A est diagonalisable, ce qui établit la première propriété annoncée.

Question 4.(a)

Ce qu'il faut établir : la matrice $X^t Y$ a un coefficient non nul, puis l'égalité ${}^t Y A = \mu {}^t Y$ par transposition.

Notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ en colonnes. Le coefficient (i, j) de $X^t Y$ est $x_i y_j$. Un vecteur propre est non nul par définition : il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$ et j_0 tel que $y_{j_0} \neq 0$. Alors $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$, donc $M_{X,Y} \neq 0$.

Ensuite, puisque ${}^t A = A$ et $AY = \mu Y$:

$${}^t Y A = {}^t Y {}^t A = {}^t (AY) = {}^t (\mu Y) = \mu {}^t Y.$$

Conclusion

$M_{X,Y} \neq 0$ et ${}^t Y A = \mu {}^t Y$.

Question 4.(b)

Ce qu'il faut établir : $M_{X,Y}$ est vecteur propre de Φ_A pour $\lambda - \mu$.

Par associativité du produit, avec $AX = \lambda X$ et la question précédente :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = AX^tY - X^tYA = \lambda X^tY - \mu X^tY = (\lambda - \mu)M_{X,Y}.$$

Comme $M_{X,Y} \neq 0$, $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A associé à $\lambda - \mu$, donc $\lambda - \mu \in \text{Sp}(\Phi_A)$.

Soit maintenant $\gamma \in \Gamma$: il existe $\lambda, \mu \in \text{Sp}(A)$ tels que $\gamma = \lambda - \mu$. En choisissant un vecteur propre X associé à λ et un vecteur propre Y associé à μ , ce qui précède donne $\gamma \in \text{Sp}(\Phi_A)$.

Conclusion

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y} \text{ et } \Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A).$$

Question 5.(a)

Ce qu'il faut établir : si M annule tous les vecteurs propres de A , alors $M = 0$; on utilise l'existence d'une base de vecteurs propres de A .

A est symétrique réelle ; par le théorème spectral, il existe une matrice inversible R et une matrice diagonale Δ' telles que $A = R\Delta'R^{-1}$. Les colonnes $Z_1, \dots, Z_n$ de R sont non nulles (car R est inversible) et vérifient $AZ_k = \delta_k Z_k$, où δ_k est le k -ième coefficient diagonal de Δ' (égalité $AR = R\Delta'$ lue colonne par colonne) : ce sont des vecteurs propres de A .

Sous l'hypothèse faite, $MZ_k = 0$ pour tout k , donc $MR = 0$ (ses colonnes sont les MZ_k), puis $M = MRR^{-1} = 0$.

Or M est un vecteur propre de Φ_A , donc $M \neq 0$. L'hypothèse « $MZ = 0$ pour tout vecteur propre Z de A » est donc fausse.

Conclusion

il existe un vecteur propre Z_0 de A , associé à une valeur propre μ , tel que $MZ_0 \neq 0$.

Question 5.(b)

Ce qu'il faut établir : $A(MZ_0) = (\alpha + \mu)MZ_0$.

Par hypothèse $\Phi_A(M) = \alpha M$, c'est-à-dire $AM - MA = \alpha M$. En multipliant à droite par Z_0 et en utilisant $AZ_0 = \mu Z_0$:

$$A(MZ_0) - M(AZ_0) = \alpha MZ_0 \quad \text{donc} \quad A(MZ_0) = \alpha MZ_0 + \mu MZ_0 = (\alpha + \mu)MZ_0.$$

Comme $MZ_0 \neq 0$ d'après la question précédente, on conclut.

Conclusion

MZ_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\alpha + \mu$.

Question 5.(c)

Ce qu'il faut établir : l'inclusion $\text{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$, puis les deux propriétés annoncées.

Soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_A)$ et M un vecteur propre associé. D'après 5.(a) et 5.(b), $\lambda = \alpha + \mu$ et μ sont des valeurs propres de A , et $\alpha = \lambda - \mu \in \Gamma$. Donc $\text{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$.

Avec 4.(b), on obtient $\text{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$, et la question 3 a établi que Φ_A est diagonalisable.

Conclusion

pour toute matrice symétrique réelle A , Φ_A est diagonalisable et $\text{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$. On retrouve le résultat de la partie I : $\text{Sp}(A) = \{0, 2\}$ et $\text{Sp}(T) = \{-2, 0, 2\}$.

EXERCICE 2

Question 1.(a)

Ce qu'il faut établir : la limite de $\int_0^A e^{-at} dt$ quand $A \rightarrow +\infty$.

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $A \geq 0$:

$$\int_0^A e^{-at} dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_0^A = \frac{1 - e^{-aA}}{a}.$$

Comme $a > 0$, $e^{-aA} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$.

Conclusion

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}.$$

Question 1.(b)

Ce qu'il faut établir : la convergence en $+\infty$ de l'intégrale d'une fonction continue et positive. La fonction $g_x : t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$: le seul problème est en $+\infty$.

Méthode 1 — Majoration.

Pour $t \geq 0$, $e^{2t} \geq 1$, donc $1 + x^2e^{2t} \leq e^{2t} + x^2e^{2t} = (1 + x^2)e^{2t}$. La racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leq g_x(t) \leq e^{-2t}\sqrt{1+x^2}e^t = \sqrt{1+x^2}e^{-t}.$$

D'après 1.(a) avec $a = 1$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ converge.

Méthode 2 — Équivalent.

Si $x = 0$, $g_0(t) = e^{-2t}$ et la convergence résulte de 1.(a) avec $a = 2$. Si $x \neq 0$, pour $t \geq 0$:

$$g_x(t) = e^{-2t}|x|e^t\sqrt{1+\frac{e^{-2t}}{x^2}} = |x|e^{-t}\sqrt{1+\frac{e^{-2t}}{x^2}},$$

et la racine tend vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$, donc $g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} |x|e^{-t}$. Ces fonctions sont positives et $\int_0^{+\infty} |x|e^{-t} dt$ converge : par équivalence, $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ converge.

Comparaison : la majoration traite tous les réels x d'un coup ; l'équivalent oblige à séparer le cas $x = 0$ mais met en évidence le comportement exact de l'intégrande, utile quand aucune majoration simple n'apparaît.

Conclusion

l'intégrale converge pour tout réel x ; f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est paire car $g_{-x} = g_x$.

Question 2.(a)

Ce qu'il faut établir : deux inégalités entre réels positifs, pour $x > 0$ et $t \geq 0$.

Inégalité de gauche. $x^2 e^{2t} \leq 1 + x^2 e^{2t}$ et la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\sqrt{x^2 e^{2t}} \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$. Comme $xe^t > 0$, $\sqrt{x^2 e^{2t}} = xe^t$.

Inégalité de droite.

Méthode 1 — Comparaison des carrés.

$$\left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2 e^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2} \geq 1 + x^2 e^{2t}.$$

Les deux réels $xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$ et $\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$ sont positifs et la racine carrée est croissante, donc $\sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$.

Méthode 2 — Quantité conjuguée.

Posons $y = xe^t > 0$. Alors :

$$\sqrt{1+y^2} - y = \frac{(1+y^2) - y^2}{\sqrt{1+y^2} + y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2} + y} \leq \frac{1}{2y},$$

car $\sqrt{1+y^2} \geq y$ donne $\sqrt{1+y^2} + y \geq 2y > 0$. Comme $\frac{1}{2y} = \frac{e^{-t}}{2x}$, on obtient l'inégalité voulue.

Comparaison : la méthode 1 est une vérification directe une fois la majoration connue ; la méthode 2 permet de la découvrir, car elle mesure l'écart entre $\sqrt{1+y^2}$ et y .

Conclusion

$$\forall x > 0, \forall t \geq 0, xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

Question 2.(b)

Ce qu'il faut établir : intégrer l'encadrement précédent après multiplication par $e^{-2t} > 0$.

Pour $x > 0$ et $t \geq 0$:

$$xe^{-t} \leq e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}.$$

Les trois intégrales sur $[0, +\infty[$ convergent (1.(a) avec $a = 1$ et $a = 3$, et 1.(b)). Par croissance de l'intégrale (inégalité sur $[0, A]$ puis passage à la limite $A \rightarrow +\infty$) :

$$x \cdot 1 \leq f(x) \leq x \cdot 1 + \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{3}.$$

Conclusion

$$\forall x > 0, x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.$$

Question 2.(c)

Ce qu'il faut établir : le comportement de $f(x) - x$ en $+\infty$.

D'après 2.(b), $0 \leq f(x) - x \leq \frac{1}{6x}$ pour $x > 0$, et $\frac{1}{6x} \rightarrow 0$. Par encadrement, $f(x) - x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Conclusion

la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, et la courbe est au-dessus de cette asymptote. Par parité, la droite $y = -x$ est asymptote au voisinage de $-\infty$.

Question 3.(a)

Ce qu'il faut établir : la formule par changement de variable sur un segment, puis passage à la limite.

Soit $x > 0$ fixé. L'application $\varphi : t \mapsto xe^t$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $\varphi(0) = x$ et $\varphi(t) \rightarrow +\infty$; sa réciproque est $u \mapsto \ln(u/x)$, et $dt = \frac{du}{u}$. Avec $e^{-2t} = \frac{x^2}{u^2}$ et $x^2 e^{2t} = u^2$, on obtient pour tout $A \geq 0$:

$$\int_0^A e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} dt = \int_x^{xe^A} \frac{x^2}{u^2} \sqrt{1 + u^2} \frac{du}{u} = x^2 \int_x^{xe^A} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du.$$

Posons $h(u) = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}$, continue et positive sur $]0, +\infty[$. Pour $B \geq x$, avec $A = \ln(B/x) \geq 0$:

$$\int_x^B h(u) du = \frac{1}{x^2} \int_0^{\ln(B/x)} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} dt.$$

Quand $B \rightarrow +\infty$, $\ln(B/x) \rightarrow +\infty$ et le membre de droite tend vers $\frac{f(x)}{x^2}$ (composition de limites). Donc $\int_x^{+\infty} h(u) du$ converge et vaut $\frac{f(x)}{x^2}$.

Remarque : la convergence se voit aussi directement, car $h(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$, fonctions positives, et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge.

Conclusion

$$\forall x > 0, f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du.$$

Question 3.(b)

Ce qu'il faut établir : la régularité de $H : x \mapsto \int_x^{+\infty} h(u) du$ sur $]0, +\infty[$, puis dériver le produit $x^2 H(x)$.

Pour $x > 0$, par la relation de Chasles (intégrales convergentes) :

$$H(x) = \int_x^1 h(u) du + \int_1^{+\infty} h(u) du = C - \int_1^x h(u) du, \quad \text{où } C = \int_1^{+\infty} h(u) du.$$

La fonction h est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; d'après le théorème fondamental du calcul intégral, $x \mapsto \int_1^x h(u) du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée h . Donc H est de classe C^1 et $H'(x) = -h(x)$.

Par produit, $f(x) = x^2 H(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$f'(x) = 2xH(x) - x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{2x^2 H(x)}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Conclusion

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Question 3.(c)

Ce qu'il faut établir : une intégration par parties dans $H(x)$, menée sur un segment.

Soit $x > 0$ et $B > x$. On pose $v(u) = -\frac{1}{2u^2}$ (de dérivée u^{-3}) et $w(u) = \sqrt{1+u^2}$ (de dérivée $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$), toutes deux de classe C^1 sur $[x, B]$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_x^B \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du &= \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2} \right]_x^B + \int_x^B \frac{1}{2u^2} \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+B^2}}{2B^2} \\ &+ \frac{1}{2} \int_x^B \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Passage à la limite $B \rightarrow +\infty$:

- le membre de gauche tend vers $H(x)$ (question 3.(a)) ;

- $\frac{\sqrt{1+B^2}}{2B^2} = \frac{1}{2B} \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}} \rightarrow 0$;

- par conséquent $\int_x^B \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ admet une limite finie, c'est-à-dire que

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \text{ converge (ce que confirme l'équivalent } \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \sim \frac{1}{u^2} \text{ en } +\infty).$$

Ainsi $H(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}J(x)$, et en multipliant par $2x^2$:

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 J(x).$$

Monotonie. D'après 3.(b), $f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = xJ(x)$. La fonction

$u \mapsto \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est continue et strictement positive sur $[x, +\infty[$, donc

$J(x) \geq \int_x^{x+1} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} > 0$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Conclusion

l'égalité est établie, $f'(x) = xJ(x) > 0$ pour $x > 0$, et f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Question 4.(a)

Ce qu'il faut établir : une intégration par parties sur un segment, puis la convergence d'une intégrale impropre en 0 et en $+\infty$.

Notons $g(u) = \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$ pour $u > 0$.

Formule. Soit $x > 0$ et $B > x$. On pose $v(u) = \ln(u)$ (de dérivée $\frac{1}{u}$) et $w(u) = (1+u^2)^{-1/2}$ (de dérivée $-u(1+u^2)^{-3/2}$), de classe C^1 sur $[x, B]$:

$$\begin{aligned} \int_x^B \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} &= \left[\frac{\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}} \right]_x^B + \int_x^B \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du = \frac{\ln(B)}{\sqrt{1+B^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} \\ &+ \int_x^B g(u) du. \end{aligned}$$

Quand $B \rightarrow +\infty$: le membre de gauche tend vers $J(x)$ (question 3.(c)) ; pour $B > 1$,

$0 \leq \frac{\ln(B)}{\sqrt{1+B^2}} \leq \frac{\ln(B)}{B}$, qui tend vers 0 par croissances comparées. Donc $\int_x^B g(u) du$

admet une limite finie : $\int_x^{+\infty} g(u) du$ converge et

$$J(x) = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} g(u) du.$$

Convergence de $\int_0^{+\infty} g(u) du$.

- En $+\infty$: la convergence de $\int_1^{+\infty} g(u) du$ résulte de ce qui précède avec $x = 1$. (On peut aussi remarquer que $g \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et $g(u) \sim \frac{\ln(u)}{u^2} = o\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right)$, puis comparer à une intégrale de Riemann convergente.)
- En 0 : par croissances comparées $u \ln(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0^+$, donc $g(u) \rightarrow 0$. La fonction g se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $[0, 1]$ avec $\tilde{g}(0) = 0$. Pour $x \in]0, 1]$, $\int_x^1 g(u) du = \int_0^1 \tilde{g} - \int_0^x \tilde{g}$, et $\int_0^x \tilde{g} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ (continuité de $x \mapsto \int_0^x \tilde{g}$). Donc $\int_0^1 g(u) du$ converge.

Conclusion

la formule est valable pour tout $x > 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{u \ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ converge.

Question 4.(b)

Ce qu'il faut établir : $J(x) \sim -\ln(x)$ en 0^+ , puis les deux équivalents demandés, en raisonnant sur des quotients (sans additionner d'équivalents).

Comportement de $K(x) = \int_x^{+\infty} g(u) du$. Par Chasles, $K(x) = \int_0^{+\infty} g - \int_0^x \tilde{g}$ pour $x \in]0, 1]$, donc $K(x) \rightarrow K_0 = \int_0^{+\infty} g(u) du$ quand $x \rightarrow 0^+$: K admet une limite finie en 0^+ .

Équivalent de J . D'après 4.(a), pour $0 < x < 1$ (de sorte que $-\ln(x) > 0$) :

$$\frac{J(x)}{-\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{K(x)}{-\ln(x)}.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow 1$, et $\frac{K(x)}{-\ln(x)} \rightarrow 0$ car $K(x) \rightarrow K_0$ et $-\ln(x) \rightarrow +\infty$. Donc

$$J(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Équivalent de f' . D'après 3.(c), $f'(x) = xJ(x)$, donc par produit d'équivalents :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x).$$

Équivalent de $f - \frac{1}{2}$. D'après 3.(c), pour $x > 0$:

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2} + \frac{x^2 J(x)}{2} = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + J(x) \right),$$

car $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}$. Pour $0 < x < 1$:

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{-\frac{x^2 \ln(x)}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + 1)(-\ln(x))} + \frac{J(x)}{-\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 + 1 = 1.$$

Conclusion

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x) \text{ et } f(x) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln(x)}{2}.$$

Question 4.(c)

Ce qu'il faut établir : la continuité de f en 0, sa dérivabilité en 0 et la continuité de f' en 0.

Valeur en 0 : $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$ (question 1.(a) avec $a = 2$).

Continuité de f en 0 : par croissances comparées $x^2 \ln(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$; d'après 4.(b), $f(x) - \frac{1}{2}$ est équivalent à une quantité de limite nulle, donc $f(x) \rightarrow \frac{1}{2} = f(0)$. Ainsi f est continue sur $[0, +\infty[$.

Méthode 1 — Théorème du prolongement de la dérivée.

f est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (question 3.(b)), et $f'(x) \sim -x \ln(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc $f'(x) \rightarrow 0$. D'après le théorème du prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$, et f' est continue en 0.

Méthode 2 — Taux d'accroissement.

Pour $x > 0$, d'après 4.(b) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x \ln(x)}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc f est dérivable (à droite, ce qui suffit sur $[0, +\infty[$) en 0 avec $f'(0) = 0$. De plus $f'(x) \rightarrow 0 = f'(0)$ d'après l'équivalent de f' , donc f' est continue en 0.

Comparaison : la méthode 1 n'utilise que l'équivalent de f' et un théorème du cours ; la méthode 2 revient à la définition du nombre dérivé et utilise l'équivalent de $f - \frac{1}{2}$, mais exige ensuite de vérifier séparément la continuité de f' .

Conclusion

f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $f'(0) = 0$.

PROBLÈME

Notations. Pour $i \geq 1$, on note B_i l'événement « la i -ième boule tirée est blanche » et $\overline{B_i}$ son contraire. Le nombre total de boules reste égal à N : une boule blanche est remise, une boule noire est remplacée par une blanche.

Composition de l'urne. Si les j premiers tirages ont donné des boules noires ($0 \leq j \leq b$),

l'urne contient, avant le tirage $j + 1$, exactement $a + j$ boules blanches et $b - j$ boules noires. Si les tirages donnent des boules blanches, la composition n'est pas modifiée.

PARTIE I

Question 1

Ce qu'il faut établir : Y prend exactement les valeurs $1, 2, \dots, b + 1$.

On a $Y \geq 1$. Tant que l'on n'a pas tiré de boule blanche, chaque tirage retire une boule noire de l'urne. Après b tirages noirs consécutifs, l'urne ne contient plus que des boules blanches (et $N = a + b$ d'entre elles), donc le tirage $b + 1$ donne une boule blanche de façon certaine. Ainsi $Y \leq b + 1$, et l'événement « aucune boule blanche n'est tirée lors des $b + 1$ premiers tirages » est de probabilité nulle (question 2 et produit des probabilités conditionnelles, dont le dernier facteur $\frac{b-b}{N}$ est nul).

Réciproquement, chaque valeur $k \in \{1, \dots, b + 1\}$ est de probabilité strictement positive d'après le calcul de la question 2.

Conclusion

$$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, b + 1\}.$$

Question 2

Ce qu'il faut établir : $P(Y = k)$ par la formule des probabilités composées.

Pour $1 \leq k \leq b + 1$:

$$(Y = k) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k.$$

Pour $1 \leq i \leq k - 1$, sachant $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{i-1}}$, l'urne contient $b - (i - 1)$ boules noires parmi N , donc $P(\overline{B_i} \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{i-1}}) = \frac{b - i + 1}{N}$. Sachant $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}$, l'urne contient $a + k - 1$ boules blanches, donc la probabilité de B_k vaut $\frac{a + k - 1}{N}$.

Les événements conditionnants sont de probabilité non nulle :

$$P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_j}) = \prod_{i=1}^j \frac{b-i+1}{N} > 0$$

pour $j \leq k-1 \leq b$, chaque facteur étant strictement positif. La formule des probabilités composées donne :

$$P(Y = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{b-i+1}{N} \right) \frac{a+k-1}{N} = \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)}{N^{k-1}} \cdot \frac{a+k-1}{N}.$$

Comme $b(b-1) \dots (b-k+2) = \frac{b!}{(b-k+1)!}$ (produit vide égal à 1 si $k = 1$) :

Conclusion

$$\forall k \in \{1, \dots, b+1\}, P(Y = k) = \frac{b! (a+k-1)}{(b-k+1)! N^k}. \text{ En particulier } P(Y = 1) = \frac{a}{N}.$$

Question 3

Ce qu'il faut établir : deux expressions de $P(Y = k)$.

Méthode 1 — À partir de la formule de la question 2.

Pour $k = b+1$:
$$P(Y = b+1) = \frac{b! (a+b)}{0! N^{b+1}} = \frac{b! N}{N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}.$$

Pour $1 \leq k \leq b$, en réduisant au dénominateur commun $(b-k+1)! N^k$ et en utilisant $(b-k+1)! = (b-k+1)(b-k)!$:

$$\frac{b!}{(b-k+1)! N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)! N^k} = \frac{b! N - b! (b-k+1)}{(b-k+1)! N^k} = \frac{b! (a+b-b+k-1)}{(b-k+1)! N^k}$$

$$= \frac{b! (a + k - 1)}{(b - k + 1)! N^k}.$$

On retrouve $P(Y = k)$.

Méthode 2 — Par les probabilités $P(Y > j)$.

Pour $0 \leq j \leq b$, $(Y > j) = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_j}$ (événement certain si $j = 0$), donc, par les probabilités composées comme à la question 2 :

$$P(Y > j) = \prod_{i=1}^j \frac{b - i + 1}{N} = \frac{b!}{(b - j)! N^j}.$$

Pour $1 \leq k \leq b + 1$, l'événement $(Y > k - 1)$ est la réunion disjointe de $(Y = k)$ et de $(Y > k)$, donc $P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k)$.

- Pour $1 \leq k \leq b$, cela donne directement la formule demandée.

- Pour $k = b + 1$, $P(Y > b + 1) = 0$ (question 1), donc

$$P(Y = b + 1) = P(Y > b) = \frac{b!}{0! N^b} = \frac{b!}{N^b}.$$

Comparaison : la méthode 1 est une vérification algébrique ; la méthode 2 explique l'origine de la différence (une probabilité d'événement de type $Y = k$ s'obtient comme différence de deux probabilités de queue) et prépare la question 5.

Conclusion

$$P(Y = b + 1) = \frac{b!}{N^b} \text{ et, pour } 1 \leq k \leq b, \quad P(Y = k) = \frac{b!}{(b - (k - 1))! N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)! N^k}.$$

Question 4

Ce qu'il faut établir : une identité sur des sommes finies (transformation d'Abel).

Méthode 1 — Décalage d'indice.

Par linéarité, puis avec le changement d'indice $j = k - 1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{j=0}^{M-1} (j+1)a_j - \sum_{k=1}^M ka_k = \sum_{j=0}^{M-1} ja_j + \sum_{j=0}^{M-1} a_j - \sum_{k=1}^{M-1} ka_k - Ma_M.$$

Le terme $j = 0$ de

$$\sum_{j=0}^{M-1} ja_j$$

est nul, donc

$$\sum_{j=0}^{M-1} ja_j = \sum_{k=1}^{M-1} ka_k$$

et ces deux sommes se compensent :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - Ma_M.$$

Méthode 2 — Récurrence sur M .

Fixons une suite de réels $(a_k)_{k \geq 0}$ et notons $\mathcal{P}(M)$ l'égalité voulue.

Initialisation : pour $M = 1$, le membre de gauche vaut $a_0 - a_1$ et celui de droite $a_0 - a_1$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(M)$ pour un $M \geq 1$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{M+1} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - Ma_M + (M+1)(a_M - a_{M+1}) = \sum_{k=0}^M a_k - (M+1)a_{M+1},$$

ce qui est $\mathcal{P}(M+1)$.

Comparaison : le décalage d'indice montre d'où vient l'identité (analogue discret d'une intégration par parties) ; la récurrence est une vérification sûre quand la formule est donnée.

Conclusion

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

Question 5

Ce qu'il faut établir : la valeur de $E(Y)$ à l'aide des questions 3 et 4.

Y est une variable aléatoire finie, donc $E(Y)$ existe et

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k P(Y = k).$$

Posons, pour $0 \leq k \leq b$, $a_k = \frac{b!}{(b-k)! N^k}$. D'après la question 3, $P(Y = k) = a_{k-1} - a_k$

pour $1 \leq k \leq b$, et $P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b} = a_b$. En appliquant la question 4 avec $M = b \geq 1$:

$$E(Y) = \sum_{k=1}^b k(a_{k-1} - a_k) + (b+1)a_b = \sum_{k=0}^{b-1} a_k - ba_b + (b+1)a_b = \sum_{k=0}^b a_k.$$

Conclusion

$$E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)! N^k}.$$

Vérification sur un exemple : pour $a = b = 1$, $N = 2$, Y vaut 1 ou 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune, donc $E(Y) = \frac{3}{2}$, et la formule donne $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

PARTIE II

Question 1

Ce qu'il faut établir : $p_{n,0} = P(X_n = 0)$, $p_{n,n} = P(X_n = n)$ et la somme des $p_{n,k}$.

Calcul de $p_{n,0}$. Pour $n = 0$, $p_{0,0} = 1$. Pour $n \geq 1$, $(X_n = 0) = B_1 \cap \dots \cap B_n$. Tant que l'on tire des boules blanches, la composition de l'urne est inchangée (a blanches, b noires), donc $P(B_i | B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) = \frac{a}{N}$, les événements conditionnants étant de probabilité $\left(\frac{a}{N}\right)^{i-1} > 0$ car $a \geq 1$. Par les probabilités composées :

$$p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n,$$

formule encore valable pour $n = 0$.

Calcul de $p_{n,n}$. Pour $n \geq 1$, $(X_n = n) = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n} = (Y > n)$. D'après le calcul de la question 3 (méthode 2) de la partie I :

- si $0 \leq n \leq b$:

$$p_{n,n} = \prod_{i=1}^n \frac{b-i+1}{N} = \frac{b!}{(b-n)! N^n}$$

(valeur 1 pour $n = 0$) ;

- si $n > b$: $p_{n,n} = 0$, conformément à la remarque de l'énoncé ($n > b$), puisqu'on ne peut obtenir plus de b boules noires.

Somme. X_n prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, donc les événements $(X_n = k)$, $0 \leq k \leq n$, forment un système complet d'événements, et :

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k} = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1.$$

Conclusion

$$p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n ; \quad p_{n,n} = \frac{b!}{(b-n)! N^n} \text{ si } n \leq b \text{ et } p_{n,n} = 0 \text{ si } n > b ;$$

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1.$$

Questions suivantes de la partie II

Non corrigées : l'énoncé de la partie II s'interrompt après la question 1 dans le document fourni (le reste de la page 6 est illisible ou absent). Ces questions ne peuvent pas être transcrites ni corrigées sans le texte original.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule : « l'ensemble $\text{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs de Φ_A » rectifié en « formé des valeurs propres de Φ_A ». Justification : coquille du document original, contredite par la notation et par la suite de l'exercice.
- Problème, partie II : seules l'introduction et la question 1 figurent dans le document fourni ; la suite est signalée par un marqueur « PASSAGE À VÉRIFIER » dans le sujet et n'est pas corrigée. Justification : texte absent, aucune hypothèse ne peut être devinée.
- Aucune autre adaptation : toutes les autres questions sont conformes au programme (la diagonalisabilité est obtenue par le théorème spectral, le changement de variable non affine est indiqué par l'énoncé, aucun nombre complexe, aucun code informatique, aucun critère d'extremum).