



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2008

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

1. EXERCICE.

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur u et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.

Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?

2. Exprimer, pour $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v)$ à l'aide de $\langle v, u \rangle$ et de u .

Calculer alors $p(i)$, $p(j)$ et $p(k)$.

En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}$, où :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que :

$$M^2 = -Q.$$

b. Calculer $f(u)$.

En déduire que $\text{rg}(f) \leq 2$.

Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

- c. Dédurre de la question précédente la valeur de $f \circ p$.

Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f .

- d. Quelles sont les valeurs propres de f ?

f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ , on définit l'endomorphisme g_θ par :

$$g_\theta = Id + (\sin \theta)f + (1 - \cos \theta)f^2$$

où $f^2 = f \circ f$.

- a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

- b. En déduire que, pour tout réel θ , g_θ est inversible et déterminer son inverse.

2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

- b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. Étude de la dérivabilité de F .

a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.

c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. Recherche d'un équivalent en $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geq 2$:

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. PROBLÈME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t) dt$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n , si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$, où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U .

b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J .

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U .

On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n g(U_i).$$

- a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J .
- b. Recherche d'un intervalle de confiance pour J .
- i. Justifier que la suite de variables aléatoires

$$\left(\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

- ii. On considère pour « n suffisamment grand» que

$$\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J , au niveau de confiance 95 %, faisant intervenir S_n .

3. Application :

- a. À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \pi$.

- b.** i. Écrire, en Python, une fonction G , de paramètre t , qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$. On suppose que la bibliothèque numpy a été importée par l'instruction `import numpy as np`.
- ii. On rappelle qu'en Python, après l'instruction `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$ (à chaque appel, une nouvelle réalisation, indépendante des précédentes, est produite).

En utilisant le résultat de la question 3.1.2. et la fonction G , la variable n contenant un entier naturel non nul déjà défini, compléter le programme suivant, de manière à ce qu'il calcule dans la variable J une valeur approchée de π .

Python

```
J = 0
for i in range(1, n + 1):
    .....
    .....
print('une valeur approchée de pi est', J)
```

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1 - U$.

On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{1}{2} [g(U) + g(1 - U)]$. Que vaut $E(Y)$?

2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

a. Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0, 1]^2$:

$$(g(u) - g(w)) (g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.$$

b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de U .

Quel est le signe de $E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))]$?

En remarquant que $g(U)g(1 - U)$ et $g(W)g(1 - W)$ ont même espérance, en déduire que :

$$E[g(U)g(1 - U)] \leq (E[g(U)])^2.$$

On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \frac{1}{2}V(g(U))$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95 %, basé sur cette méthode.

On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n .

Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Étude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note :

$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera. On le note A .

Soit X un point de $]0, +\infty[^3$ vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 = 110$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à la fonction $\phi : t \mapsto f(A + t(X - A))$ sur le segment $[0, 1]$, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par :

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T , de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.

On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbf{1}_{[T \in I_1]} + U_2 \mathbf{1}_{[T \in I_2]} + U_3 \mathbf{1}_{[T \in I_3]}$ où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A . $\tilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω , par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x :

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b-a)P(g(U_2) \leq x) + (1-b)P(g(U_3) \leq x).$$

En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g , que $\tilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Dédurre de ce qui précède que :

$$E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3 . On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$ telles que :

- $U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1 ,
- $U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2 ,

- $U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3 ,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a) \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b) \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).$$

4. Application numérique :

On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b , on a :

$$a^2 V(g(U_1)) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2 V(g(U_2)) = 1, \quad (1-b)^2 V(g(U_3)) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que Z , dont l'espérance vaut J , fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode, ce risque étant mesuré par la variance $V(Z)$?