



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques 1

2007

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

1. EXERCICE.

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \ln(2 - e^x)$ est de classe C^2 sur l'intervalle $] -\infty, \ln 2[$, puis, à l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2.

- a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0, 1[.$$

- b. En déduire le signe de $\ln(2 - e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

- c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$?

- d. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp(V_n).$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3.

- a. Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

c. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

a. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont deux suites adjacentes.

c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. EXERCICE.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$, à coefficients réels.

Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A », et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

On note ${}^t A$ la transposée de la matrice A .

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) \quad (\text{où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

b. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.

En calculant ${}^tX{}^tAA X$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geq 0$.

c. On pose $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = \text{Tr}(D), \quad [N(B)]^2 = \text{Tr}(S), \quad [N(AB)]^2 = \text{Tr}(SD).$$

d. Montrer que

$$\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

e. On note E_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^t E_i S E_i = \|B P E_i\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^t E_i S E_i$ en fonction des coefficients de S .

Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n , sur le signe de s_{ii} ?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3. PROBLEME.

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X)$, $E(Y)$ et des variances $V(X)$, $V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

2.

a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

b. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)?$$

3.2. Partie I : Étude d'une fonction de deux variables

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.

On définit sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ la fonction L_n par :

$$L_n(a, b) = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} \text{ si } 0 \leq a \leq A,$$

$$L_n(a, b) = 0 \text{ si } a > A.$$

1. Justifier que L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$.

Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.

2. Montrer que

$$\forall a \in [0, A[, \forall b \in]0, +\infty[, \quad L_n(a, b) < L_n(A, b).$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A, +\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(b) = L_n(A, b)$.

Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S, n .

4. Dédurre de ce qui précède que L_n admet sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0, b_0) que l'on précisera.

3.3. Partie II : Étude d'une loi

Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} \quad \text{si } x \geq a,$$

$$f_{a,b}(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a, b)$ la loi associée.

On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a, b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p , $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.

5. Simulation de la loi $\mathcal{E}(a, b)$.

a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Montrer que la variable aléatoire $-b \ln(1 - U) + a$ suit une loi $\mathcal{E}(a, b)$.

b. On rappelle qu'en Python, après les instructions `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`, la commande `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$, et que `np.log` désigne la fonction logarithme népérien.

Écrire, en Python, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b`, simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a, b)$.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a, b)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b .

1. La fonction `tirage` de la question II.5.b ainsi que les importations nécessaires étant supposées réalisées, compléter la fonction Python suivante, de paramètres `a`, `b` et `n`, de manière à ce qu'elle simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans `S` et `Y`, puis renvoyées par la fonction).

Python

```
def simulation(a, b, n):
    X = tirage(a, b)
    S = ...
    Y = ...
    for i in range(2, n + 1):
        ...
        ...
        ...
    return S, Y
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

3. On rappelle que, pour $\nu > 0$, la loi gamma $\gamma(\nu)$ a pour densité la fonction nulle sur $] - \infty, 0]$ et égale à $x \mapsto \frac{x^{\nu-1}e^{-x}}{\Gamma(\nu)}$ sur $]0, +\infty[$.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire

$$T_n = \frac{1}{b}((X_1 - a) + (X_2 - a) + \dots + (X_n - a))?$$

En déduire une densité de S_n .

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n .

En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).

Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

5.

a. Calculer le biais de Y_n en tant qu'estimateur de a , ainsi que $E((Y_n - a)^2)$.

b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

À l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais (c'est-à-dire dont le biais tend vers 0 quand n tend vers

$+\infty)$, convergente.

6. On pose $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$.

a. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b .

b. On note $r_{Z_n}(b) = E((Z_n - b)^2)$. Justifier l'existence de $r_{Z_n}(b)$ et montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{Cov}(S_n, Y_n).$$

c. À l'aide du préliminaire, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné $(x_1, \dots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \dots, x_n\} \neq \max\{x_1, \dots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n f_{a,b}(x_i).$$

a. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i .

b. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.