



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ECRICOME 2006, Mathématiques option scientifique (version adaptée au programme ECG, mathématiques approfondies)

1. EXERCICE.

Notations communes. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Si f a pour matrice M dans $\mathcal{B}$, la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ est MX , et celle de $f^*(y)$ est ${}^tMY$.

1.1. Quelques propriétés de f^* .

1. Il s'agit d'établir une identité entre produits scalaires ; on l'écrit matriciellement.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Comme $f(x)$ a pour coordonnées MX , on a, en utilisant ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$:

$$\langle f(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX {}^tMY = {}^tX ({}^tMY).$$

Or ${}^tMY$ est la colonne des coordonnées de $f^*(y)$, donc ${}^tX ({}^tMY) = \langle x, f^*(y) \rangle$.

Conclusion

pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

2. Il faut montrer l'existence (déjà acquise) et l'unicité.

Existence : d'après 1.1.1, $g = f^*$ convient.

Unicité : soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$ pour tout (x, y) . Par différence avec 1.1.1, pour tout (x, y) :

$$\langle x, g(y) - f^*(y) \rangle = 0.$$

Fixons y et choisissons $x = g(y) - f^*(y)$: on obtient $\|g(y) - f^*(y)\|^2 = 0$, donc $g(y) = f^*(y)$ (la norme est définie positive). Ceci valant pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, on a $g = f^*$.

Conclusion

f^* est l'unique endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

3. a. On utilise 1.1.1 pour ramener le calcul à f .

Soient $x \in F$ et $y \in F^\perp$. D'après 1.1.1, $\langle x, f^*(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$. Comme F est stable par f , $f(x) \in F$, et comme $y \in F^\perp$, $\langle f(x), y \rangle = 0$.

Conclusion

$\langle x, f^*(y) \rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in F^\perp$.

b. Soit $y \in F^\perp$. D'après 3.a, $f^*(y)$ est orthogonal à tout vecteur de F , c'est-à-dire $f^*(y) \in F^\perp$.

Conclusion

$f^*(F^\perp) \subset F^\perp$, donc $F^\perp$ est stable par f^* .

1.2. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

Notations. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que, pour $u = (a, b, c)$, $M_u = aI_3 + bJ + cK$. On note j_0 et k_0 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives J et K dans $\mathcal{B}$.

1. Il s'agit de montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Méthode 1 — Écriture comme sous-espace engendré.

Un endomorphisme est déterminé par sa matrice dans $\mathcal{B}$, et l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans $\mathcal{B}$ est linéaire. L'égalité $M_u = aI_3 + bJ + cK$ donne donc $f_u = aId + b j_0 + c k_0$. Ainsi :

$$\mathcal{E} = \{a Id + b j_0 + c k_0 ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(Id, j_0, k_0).$$

Un sous-espace engendré par une famille finie d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Méthode 2 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

$\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et l'endomorphisme nul est $f_{(0,0,0)}$, donc $\mathcal{E}$ est non vide. Soient $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Coefficient par coefficient,

$$\lambda M_u + \mu M_v = M_{\lambda u + \mu v}$$

car chaque coefficient de M_u dépend linéairement de (a, b, c) . Par linéarité de la correspondance endomorphisme-matrice, $\lambda f_u + \mu f_v = f_{\lambda u + \mu v} \in \mathcal{E}$.

La méthode 1 donne en plus une famille génératrice (qui est d'ailleurs libre, car $aI_3 + bJ + cK = 0$ impose $a = b = c = 0$ en lisant la première ligne), donc $\dim \mathcal{E} = 3$; la méthode 2 est la vérification directe, utile quand aucune famille génératrice n'est apparente.

Conclusion

$\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Il suffit de calculer la transposée de M_u . Pour $u = (a, b, c)$:

$${}^t M_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

C'est exactement la matrice $M_{u'}$ avec $u' = (a, c, b)$: première ligne (a, c, b) , deuxième ligne (b, a, c) , troisième ligne (c, b, a) , ce qui correspond bien au motif (a', b', c') , (c', a', b') , (b', c', a') avec $a' = a, b' = c, c' = b$.

Conclusion

pour tout $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $f_u^* = f_{(a, c, b)} \in \mathcal{E}$.

3. a. Calculons $M_u E_1$ où

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la colonne des coordonnées de e_1 . Chaque ligne de M_u contient une fois a , une fois b et une fois c , donc

$$M_u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ a + b + c \\ a + b + c \end{pmatrix} = (a + b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $f_u(e_1) = (a + b + c)e_1$, et $e_1 \neq 0$.

Conclusion

pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, e_1 est un vecteur propre de f_u , associé à la valeur propre $a + b + c$;
c'est un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{E}$.

b. Soit $x \in \mathcal{D} : x = \lambda e_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité et d'après 3.a,

$$f_u(x) = \lambda(a + b + c)e_1 \in \mathcal{D}.$$

Conclusion

$\mathcal{D}$ est stable par f_u pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.

c. Méthode 1 — Utilisation de 1.1.3 et 1.2.2 (méthode attendue).

Soit $u = (a, b, c)$. D'après 1.2.2, $f_u^* = f_{u'}$ avec $u' = (a, c, b)$, donc $f_u^* \in \mathcal{E}$ et, d'après 3.b appliqué à u' , $\mathcal{D}$ est stable par f_u^* .

Appliquons 1.1.3.b à l'endomorphisme $h = f_u^*$ et au sous-espace $F = \mathcal{D}$, stable par h : $\mathcal{D}^\perp$ est stable par h^* . Or la matrice de h^* dans $\mathcal{B}$ est ${}^t({}^t M_u) = M_u$, donc $h^* = f_u$.

Méthode 2 — Calcul direct.

Un vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) appartient à $\mathcal{D}^\perp$ si et seulement si $\langle x, e_1 \rangle = 0$, c'est-à-dire $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Les coordonnées de $f_u(x)$ sont $(ax_1 + bx_2 + cx_3, cx_1 + ax_2 + bx_3, bx_1 + cx_2 + ax_3)$, dont la somme vaut, puisque chaque colonne de M_u contient une fois a , b et c :

$$(a + b + c)(x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Donc $f_u(x) \in \mathcal{D}^\perp$.

La méthode 1 illustre le résultat général de 1.1.3 (l'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f^*) ; la méthode 2 est plus rapide ici mais repose sur la forme particulière des colonnes de M_u .

Conclusion

pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .

- d. Comme $\mathcal{D} = \text{Vect}(e_1)$, un vecteur x est orthogonal à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il est orthogonal à e_1 , soit, avec ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $\mathcal{B}$:
- $$\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Conclusion

$\mathcal{D}^\perp$ a pour équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

- e. Appartenance : e_2 a pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $1 - 1 + 0 = 0$; e_3 a pour

coordonnées $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ et $1 + 1 - 2 = 0$. Donc $e_2, e_3 \in \mathcal{D}^\perp$.

Normes et orthogonalité (calculs en base orthonormale $\mathcal{B}$) :

$$\|e_2\|^2 = \frac{1+1+0}{2} = 1, \quad \|e_3\|^2 = \frac{1+1+4}{6} = 1, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = \frac{1-1+0}{\sqrt{12}} = 0.$$

Dimension : $\mathcal{D}^\perp$ est un supplémentaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^3$, donc $\dim \mathcal{D}^\perp = 3 - 1 = 2$ (c'est aussi le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto x_1 + x_2 + x_3$, donc un hyperplan).

Une famille orthonormale est libre ; (e_2, e_3) est donc une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{D}^\perp$, de dimension 2 : c'est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$.

Pour $\mathcal{B}'$: $\|e_1\|^2 = \frac{1+1+1}{3} = 1$, et $e_1 \in \mathcal{D}$ est orthogonal à $e_2, e_3 \in \mathcal{D}^\perp$. Donc (e_1, e_2, e_3) est orthonormale, donc libre, et formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion

(e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

f. Méthode 1 — Par la stabilité des sous-espaces.

D'après 3.a, $f_u(e_1) = (a + b + c)e_1$: la première colonne de la matrice de f_u dans $\mathcal{B}'$ est ${}^t(a + b + c, 0, 0)$.

D'après 3.c, $f_u(e_2)$ et $f_u(e_3)$ appartiennent à $\mathcal{D}^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$: il existe des réels f, g, h, l tels que $f_u(e_2) = fe_2 + he_3$ et $f_u(e_3) = ge_2 + le_3$. Leurs coordonnées selon e_1 sont nulles.

Méthode 2 — Calcul explicite par la matrice de passage.

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (colonnes : coordonnées de e_1, e_2, e_3). Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$, donc la matrice de f_u dans $\mathcal{B}'$ est

${}^tPM_uP$, dont le coefficient (r, s) vaut $\langle e_r, f_u(e_s) \rangle$. On calcule :

$$M_u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-a \\ b-c \end{pmatrix}$$

et

$$M_u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a-2b+c \\ -2a+b+c \end{pmatrix}.$$

Chacune de ces colonnes est de somme nulle, donc $\langle e_1, f_u(e_2) \rangle = \langle e_1, f_u(e_3) \rangle = 0$, et $\langle e_r, f_u(e_1) \rangle = 0$ pour $r = 2, 3$. De plus :

$$\begin{aligned} \langle e_2, f_u(e_2) \rangle &= \frac{(a-b) - (c-a)}{2} = a - \frac{b+c}{2}, & \langle e_3, f_u(e_2) \rangle \\ &= \frac{(a-b) + (c-a) - 2(b-c)}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e_2, f_u(e_3) \rangle &= \frac{(a+b-2c) - (a-2b+c)}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c), & \langle e_3, f_u(e_3) \rangle \\ &= \frac{(a+b-2c) + (a-2b+c) - 2(-2a+b+c)}{6} = a - \frac{b+c}{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc $e = a + b + c$, $f = l = a - \frac{b+c}{2}$, $g = \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$ et

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-b) = -g.$$

La méthode 1 est celle que l'énoncé prépare : elle n'utilise que la stabilité de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$; la

méthode 2 fournit en plus les valeurs explicites (contrôlées numériquement pour $u = (2, -1, 5)$: on trouve bien $e = 6, f = l = 0, g = -3\sqrt{3}, h = 3\sqrt{3}$).

Conclusion

la matrice de f_u dans $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & l \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } e = a + b + c, \quad f = l = a - \frac{b+c}{2}, \quad g = -h = \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c).$$

2. EXERCICE.

1. a. Question adaptée au programme actuel : la classe C^2 est définie sur un ouvert ; on la justifie sur l'ouvert $U = \{(x, t) ; 1 + xt > 0\}$, admis ouvert par l'énoncé.

Inclusion : si $x \geq 0$ et $t \geq 0$, alors $1 + xt \geq 1 > 0$, donc $[0, +\infty[\times [0, +\infty[\subset U$.

Régularité : l'application $\varphi : (x, t) \mapsto 1 + xt$ est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et elle prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$ sur U . La fonction racine carrée est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Par composition, $(x, t) \mapsto \sqrt{1 + xt}$ est de classe C^2 sur U . De même $(x, t) \mapsto e^{-t^2}$ est la composée de la fonction polynomiale $(x, t) \mapsto -t^2$ et de l'exponentielle, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Un produit de fonctions de classe C^2 sur U est de classe C^2 sur U .

Conclusion

f est de classe C^2 sur l'ouvert U , qui contient $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

- b. On dérive par rapport à x, t étant fixé ; e^{-t^2} est alors une constante. Pour $(x, t) \in [0, +\infty[^2, 1 + xt > 0$ et la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1 + xt}$ est $x \mapsto \frac{t}{2\sqrt{1 + xt}}$. Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t e^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}} = \frac{t e^{-t^2}}{2} (1+xt)^{-1/2}.$$

En dérivant à nouveau $x \mapsto (1+xt)^{-1/2}$, de dérivée $x \mapsto -\frac{t}{2}(1+xt)^{-3/2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t e^{-t^2}}{2} \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) (1+xt)^{-3/2} = -\frac{t^2 e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}}.$$

Conclusion

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t e^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}}.$$

- c. Pour $(x, t) \in [0, +\infty[^2$, $1+xt \geq 1$, donc $(1+xt)^{3/2} \geq 1$ par croissance de $y \mapsto y^{3/2}$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2 e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}} \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

Conclusion

l'inégalité demandée est vérifiée sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

2. Première partie : convergence de $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$ pour $\alpha > 0$.

La fonction $h_\alpha : t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (pour $\alpha > 0$, $t \mapsto t^\alpha$ est continue en 0 avec la valeur 0). L'intégrale n'est donc impropre qu'en $+\infty$.

Méthode 1 — Négligeabilité devant une fonction de Riemann.

On a $t^2 h_\alpha(t) = t^{\alpha+2} e^{-t^2}$. En posant $y = t^2$, $t^{\alpha+2} e^{-t^2} = y^{(\alpha+2)/2} e^{-y}$, qui tend vers 0 quand

$y \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Donc $h_\alpha(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et que les fonctions sont positives, $\int_1^{+\infty} h_\alpha(t) dt$ converge ; $\int_0^1 h_\alpha(t) dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Méthode 2 — Comparaison avec la fonction Gamma.

Pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, donc $0 \leq t^\alpha e^{-t^2} \leq t^\alpha e^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge : c'est $\Gamma(\alpha + 1)$, avec $\alpha + 1 > 0$. Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} h_\alpha$ converge, et on conclut comme ci-dessus.

La méthode 1 est la méthode générale (comparaison à $1/t^2$) ; la méthode 2 est plus rapide lorsque la fonction Gamma est disponible.

Remarque utile pour la suite : les deux arguments valent aussi pour $\alpha = 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $[0, +\infty[$; donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge (on peut aussi y reconnaître, à un facteur près, l'intégrale de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/2)$).

Conclusion

pour tout $\alpha > 0$ (et aussi pour $\alpha = 0$), $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$ converge.

Deuxième partie. Soit $x \geq 0$. Les deux fonctions intégrées sont continues et positives sur $[0, +\infty[$ (car $1 + xt \geq 1$).

Pour la première : comme $1 + xt \geq 1$, on a $\sqrt{1 + xt} \leq 1 + xt$, d'où

$$0 \leq e^{-t^2} \sqrt{1 + xt} \leq e^{-t^2} + xte^{-t^2}.$$

Le majorant est une combinaison linéaire de h_0 et h_1 , dont les intégrales sur $[0, +\infty[$

convergent ; par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+xt} dt$ converge.

Pour la seconde : $\sqrt{1+xt} \geq 1$ donne $0 \leq \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} \leq te^{-t^2} = h_1(t)$, et $\int_0^{+\infty} h_1$ converge.

Conclusion

pour tout $x \geq 0$, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+xt} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} dt$ convergent.

3. a. On compare les fonctions intégrées puis on intègre.

Soient $0 \leq x \leq y$. Pour tout $t \geq 0$, $1+xt \leq 1+yt$, donc par croissance de la racine carrée $\sqrt{1+xt} \leq \sqrt{1+yt}$, puis, en multipliant par $e^{-t^2} > 0$, $f(x,t) \leq f(y,t)$. Les deux intégrales convergent (question 2) ; par croissance de l'intégrale (pour des intégrales impropres convergentes, bornes dans l'ordre croissant) :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(y,t) dt = g(y).$$

Conclusion

g est croissante sur $[0, +\infty[$.

b. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,t)$.

Fixons $t \geq 0$ et posons $\varphi_t(y) = f(y,t) = e^{-t^2} \sqrt{1+yt}$ pour $y \geq 0$. Pour $y \geq 0$, $1+yt \geq 1 > 0$; φ_t est donc de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ (composée et produit de fonctions de classe C^∞), avec $\varphi'_t(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)$ et $\varphi''_t(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y,t)$.

Soient $x, x_0 \in [0, +\infty[$. Sur le segment d'extrémités x_0 et x , contenu dans $[0, +\infty[$, la question 1.c donne $|\varphi''_t(y)| \leq M_t$ avec $M_t = \frac{t^2}{4} e^{-t^2}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 s'écrit :

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) - (x - x_0)\varphi'_t(x_0)| \leq \frac{M_t |x - x_0|^2}{2} = \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.$$

On peut aussi passer par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) - (x - x_0)\varphi'_t(x_0) = \int_{x_0}^x (x - y)\varphi''_t(y) dy,$$

puis majorer $|\varphi''_t|$ par M_t : c'est la démonstration même de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Conclusion

pour tous $x, x_0 \geq 0$ et $t \geq 0$,

$$\left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.$$

c. On intègre l'inégalité précédente en t , en justifiant d'abord les convergences.

Soient $x, x_0 \geq 0$. Posons, pour $t \geq 0$,

$$r(t) = f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt = g(x)$ et $\int_0^{+\infty} f(x_0, t) dt = g(x_0)$ convergent, ainsi que

$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+x_0t}} dt$ (question 2). Par linéarité, $\int_0^{+\infty} r(t) dt$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} r(t) dt = g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

D'après 3.b, $|r(t)| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} t^2 e^{-t^2}$, et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge (question 2 avec $\alpha = 2$). Donc $\int_0^{+\infty} r$ est absolument convergente et

$$\left| \int_0^{+\infty} r(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |r(t)| dt \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Conclusion

pour tous $x, x_0 \in [0, +\infty[$,

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

d. On étudie le taux d'accroissement de g en x_0 .

Notons $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ et $\Lambda(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$. Pour $x \in [0, +\infty[, x \neq x_0$, divisons l'inégalité de 3.c par $|x - x_0| > 0$:

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \Lambda(x_0) \right| \leq \frac{I_2}{8} |x - x_0|.$$

Le majorant tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$; par encadrement, le taux d'accroissement tend vers $\Lambda(x_0)$ quand x tend vers x_0 dans $[0, +\infty[$ (à droite seulement si $x_0 = 0$). Donc g est dérivable en tout $x_0 \in [0, +\infty[$ (à droite en 0) et

$$g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+x_0t}} dt.$$

Ce résultat est démontré directement, sans théorème de dérivation sous l'intégrale.

Sens de variations : pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}}$ est continue, positive sur

$[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc $g'(x) \geq \int_0^1 \frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}} dt > 0$,

l'intégrale sur le segment $[0, 1]$ d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle étant strictement positive.

Conclusion

g est dérivable sur $[0, +\infty[$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt > 0$, donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, ce qui retrouve et précise 3.a.

3. PROBLEME.

Les lancers sont mutuellement indépendants : pour tous indices distincts $i_1, \dots, i_r$ et tout choix $B_{i_s} \in \{P_{i_s}, F_{i_s}\}$,

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_r}) = \prod_{s=1}^r P(B_{i_s}).$$

3.1. Etude des longueurs de séries.

1. La première série a pour longueur n si et seulement si les n premiers lancers donnent le même côté et le $(n+1)$ -ième l'autre. Selon que ce côté est Pile ou Face :

$$(L_1 = n) = (P_1 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

Ces deux événements sont incompatibles (l'un contient P_1 , l'autre F_1). Par additivité puis indépendance des lancers :

$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$

Somme : les séries

$$\sum p^n$$

et

$$\sum q^n$$

sont géométriques de raisons $p, q \in]0, 1[$, donc convergentes, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q \cdot \frac{p}{1-p} + p \cdot \frac{q}{1-q} = q \cdot \frac{p}{q} + p \cdot \frac{q}{p} = p + q = 1.$$

Conclusion

$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$ pour tout $n \geq 1$, et

$$\sum_{n \geq 1} P(L_1 = n) = 1.$$

Remarque : l'événement « la première série ne se termine pas » (tous les lancers identiques) est donc négligeable ; on peut aussi le voir directement : il est inclus, pour tout m , dans $(P_1 \cap \dots \cap P_m) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m)$, de probabilité $p^m + q^m \rightarrow 0$.

2. a. La première série est de longueur n et la deuxième de longueur k si et seulement si : les lancers 1 à n donnent un même côté, les lancers $n+1$ à $n+k$ l'autre côté, et le lancer $n+k+1$ de nouveau le premier côté. D'où

$$(L_1 = n) \cap (L_2 = k) = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \cap \bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i \cap P_{n+k+1} \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \cap \bigcap_{i=n+1}^{n+k} P_i \cap F_{n+k+1} \right).$$

Les deux événements sont incompatibles (ils diffèrent sur le premier lancer). Par additivité et indépendance des lancers :

$$P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = p^n q^k p + q^n p^k q = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.$$

Conclusion

$$\text{pour } n, k \in \mathbb{N}^*, P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.$$

b. On applique la formule des probabilités totales.

Les événements $(L_1 = n)$, $n \geq 1$, sont deux à deux incompatibles. Notons E_0 l'événement « la première série ne se termine pas » ; d'après la remarque de 3.1.1, $P(E_0) = 0$, et la famille formée de E_0 et des $(L_1 = n)_{n \geq 1}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_2 = k) = P(E_0 \cap (L_2 = k)) + \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)),$$

avec $0 \leq P(E_0 \cap (L_2 = k)) \leq P(E_0) = 0$. Les séries géométriques en jeu convergent car $p, q \in]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} = \frac{p^2}{1-p} = \frac{p^2}{q}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1} = \frac{q^2}{p}.$$

Donc

$$P(L_2 = k) = q^k \cdot \frac{p^2}{q} + p^k \cdot \frac{q^2}{p} = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.

- c. L_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (hors d'un événement négligeable). Il s'agit de montrer que la série

$$\sum kP(L_2 = k)$$

converge (absolument, ses termes étant positifs) et de calculer sa somme.

Méthode 1 — Séries géométriques dérivées.

Pour $x \in]0, 1[$, la série

$$\sum_{k \geq 1} kx^{k-1}$$

converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Avec $x = q$ puis $x = p$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = \frac{p^2}{p^2} + \frac{q^2}{q^2} = 2.$$

Méthode 2 — Reconnaissance de lois géométriques.

Pour $k \geq 1$, $P(L_2 = k) = p \cdot (pq^{k-1}) + q \cdot (qp^{k-1})$. Or $k \mapsto pq^{k-1}$ et $k \mapsto qp^{k-1}$ sont les lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, d'espérances $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$: les séries

$$\sum k p q^{k-1}$$

et

$$\sum k q p^{k-1}$$

convergent et valent $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$. Par linéarité des séries convergentes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_2 = k) = p \cdot \frac{1}{p} + q \cdot \frac{1}{q} = 2.$$

La méthode 1 est un calcul direct de série ; la méthode 2 interprète la loi de L_2 comme un mélange de deux lois géométriques (avec probabilité p la première série est de Pile et la deuxième de Face, qui dure un temps géométrique de paramètre p) et évite tout calcul.

Conclusion

L_2 admet une espérance et $E(L_2) = 2$.

3.2. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

Dans cette partie $p = q = \frac{1}{2}$; toute suite donnée des n premiers résultats a donc pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Observation utilisée constamment : pour $n \geq 2$, $N_n = N_{n-1}$ si le n -ième lancer donne le même côté que le $(n-1)$ -ième (il prolonge la dernière série), et $N_n = N_{n-1} + 1$ sinon (il commence une nouvelle série). Avec $N_1 = 1$, on obtient $N_n = 1 + (\text{nombre d'indices } i \in \{2, \dots, n\} \text{ tels que les lancers } i-1 \text{ et } i \text{ diffèrent})$.

1. Loi de N_1 : un seul lancer forme une seule série, donc $N_1 = 1$ (variable certaine) et $E(N_1) = 1$.

Loi de N_2 : $N_2 = 1$ si les deux lancers sont identiques (PP ou FF), $N_2 = 2$ sinon (PF ou FP). Donc $P(N_2 = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$, et $E(N_2) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Loi de N_3 : sur les 8 résultats équiprobables,

- $N_3 = 1$ pour PPP, FFF : probabilité $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;
- $N_3 = 3$ pour PFP, FPF : probabilité $\frac{1}{4}$;
- $N_3 = 2$ pour les 4 autres (PPF, PFF, FFP, FPP) : probabilité $\frac{1}{2}$.

$$E(N_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

Conclusion

$$N_1 = 1, E(N_1) = 1; N_2 \hookrightarrow \text{uniforme sur } \{1, 2\}, E(N_2) = \frac{3}{2}; P(N_3 = 1) = P(N_3 = 3) = \frac{1}{4}, P(N_3 = 2) = \frac{1}{2}, E(N_3) = 2.$$

2. Valeurs prises. Chaque série compte au moins un lancer et il y a n lancers, donc $1 \leq N_n \leq n$. Réciproquement, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, la suite de résultats dont les k premiers alternent ($P, F, P, \dots$) et dont les $n - k$ suivants reproduisent le k -ième comporte exactement $k - 1$ changements, donc k séries; elle a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$. Donc $N_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

$P(N_n = 1)$: $N_n = 1$ si et seulement si les n lancers sont identiques, soit

$(P_1 \cap \dots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n)$, réunion incompatible. Donc

$$P(N_n = 1) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$P(N_n = n)$: $N_n = n$ si et seulement si chaque lancer diffère du précédent, c'est-à-dire si les résultats alternent; il y a deux telles suites (commençant par P ou par F). Donc

$$P(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion

$N_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et $P(N_n = 1) = P(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ (ce qui vaut 1 pour $n = 1$, en accord avec la question 1).

3. Code adapté en Python. La consigne d'origine, rédigée pour un autre langage, est transposée en Python : m est passé en argument d'une fonction, la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ est simulée par `rd.randint(0, 2)`, et les tableaux sont de taille $m + 1$ pour que l'indice k corresponde à X_k et N_k .

Principe : $X[1]$ reçoit un tirage de Bernoulli et $N[1]$ vaut 1. Pour i de 2 à m , on tire $X[i]$; d'après l'observation du début de 3.2, $N[i]$ vaut $N[i-1]$ si $X[i] == X[i-1]$ et $N[i-1] + 1$ sinon.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation(m):
    X = np.zeros(m + 1)
    N = np.zeros(m + 1)
    X[1] = rd.randint(0, 2)      # X_1 : 1 pour Pile, 0 pour Face
    N[1] = 1                    # un seul lancer : une seule série
    for i in range(2, m + 1):   # i prend les valeurs 2, 3, ..., m
        X[i] = rd.randint(0, 2)
        if X[i] == X[i - 1]:    # même côté : la série en cours continue
            N[i] = N[i - 1]
        else:                   # changement de côté : nouvelle série
            N[i] = N[i - 1] + 1
    return X, N
```

Variables : $X[k]$ contient le résultat simulé du k -ième lancer, $N[k]$ le nombre de séries des k premiers lancers; `range(2, m + 1)` parcourt les entiers de 2 à m (la borne $m + 1$ est

exclue), et `rd.randint(0, 2)` renvoie 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun (la borne 2 est exclue). Pour $m = 1$, la boucle n'est pas exécutée et on obtient bien $N_1 = 1$.

Ce code a été exécuté. Une exécution avec $m = 12$ a donné les résultats 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1 pour $X[1]$ à $X[12]$ et 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6 pour $N[1]$ à $N[12]$, ce qui est cohérent avec la règle de comptage. Par ailleurs, sur 20 000 simulations avec $m = 20$, la moyenne empirique de $N[n]$ est proche de $\frac{n+1}{2}$ pour chaque $n \leq 20$ (par exemple environ 10,5 pour $n = 20$), en accord avec le résultat de 3.2.4.e ; il s'agit d'une observation expérimentale, non d'une preuve.

4. a. N_n est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et, pour $s \in [0, 1]$, s^{N_n} est une fonction de N_n (les exposants sont ≥ 1 , il n'y a pas d'ambiguïté en $s = 0$). Par le théorème de transfert (somme finie, l'espérance existe) :

$$E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^n s^k P(N_n = k) = G_n(s).$$

Conclusion

pour tout $s \in [0, 1]$, $E(s^{N_n}) = G_n(s)$.

- b. G_n est une fonction polynomiale, donc dérivable, et

$$G'_n(s) = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) s^{k-1}.$$

En $s = 1$ (dérivée à gauche si l'on se restreint à $[0, 1]$, égale à la dérivée de la fonction polynomiale) :

$$G'_n(1) = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) = E(N_n).$$

Conclusion

$G'_n(1)$ est l'espérance de N_n , c'est-à-dire le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers.

- c. Première égalité. Soient $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Sur P_n , d'après l'observation du début de 3.2 : si P_{n-1} est réalisé, le n -ième lancer prolonge la dernière série et $N_n = N_{n-1}$; si F_{n-1} est réalisé, il en commence une nouvelle et $N_n = N_{n-1} + 1$. Donc

$$(N_n = k) \cap P_n = [(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n] \cup [(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n],$$

réunion de deux événements incompatibles (l'un est inclus dans P_{n-1} , l'autre dans F_{n-1}). Pour $k = 1$, l'événement $(N_{n-1} = 0)$ est vide ; pour $k = n$, $(N_{n-1} = n)$ est vide : l'écriture reste valable.

Indépendance. L'événement $B = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ ne dépend que des $n-1$ premiers lancers : c'est une réunion disjointe d'événements élémentaires $E_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i$, avec $B_i \in \{P_i, F_i\}$, pour les suites ε de résultats qui le réalisent. Par indépendance mutuelle des lancers, $P(E_\varepsilon \cap P_n) = P(E_\varepsilon)P(P_n) = \frac{1}{2}P(E_\varepsilon)$; en sommant sur les ε (somme finie), $P(B \cap P_n) = \frac{1}{2}P(B)$. De même

$$P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

Par additivité :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

Deuxième égalité. (P_n, F_n) est un système complet d'événements, donc

$$P(N_n = k) = P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n).$$

En ajoutant l'égalité démontrée et l'égalité admise, puis en regroupant :

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} \left[P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \right].$$

Comme (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements, chaque crochet se simplifie.

Conclusion

pour $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$

d. Relation de récurrence. Soient $n \geq 2$ et $s \in [0, 1]$. D'après 4.c :

$$G_n(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1) s^k.$$

Dans la première somme, le terme $k = n$ est nul car $N_{n-1} \leq n-1$; elle vaut $G_{n-1}(s)$.

Dans la seconde, on pose $j = k-1$: elle vaut

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(N_{n-1} = j) s^{j+1} = s \sum_{j=1}^{n-1} P(N_{n-1} = j) s^j = s G_{n-1}(s),$$

le terme $j = 0$ étant nul car $N_{n-1} \geq 1$. Donc

$$G_n(s) = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).$$

Calcul de G_1 : $N_1 = 1$, donc $G_1(s) = s$.

Formule explicite. Pour s fixé, la suite $(G_n(s))_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ et de premier terme $G_1(s) = s$. Par une récurrence immédiate : si $G_{n-1}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s$, alors $G_n(s) = \frac{1+s}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$; l'initialisation $n = 1$ est $G_1(s) = s$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } s \in [0, 1], \quad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

e. Méthode 1 — Par la fonction génératrice (méthode attendue).

D'après 4.b, $E(N_n) = G'_n(1)$. Pour $n \geq 2$, en dérivant le produit :

$$G'_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}, \quad G'_n(1) = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

Pour $n = 1$, $G'_1(1) = 1 = \frac{1+1}{2}$.

Méthode 2 — Par linéarité de l'espérance.

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, soit Y_i la variable qui vaut 1 si les lancers $i-1$ et i diffèrent, 0 sinon.

D'après l'observation du début de 3.2,

$$N_n = 1 + \sum_{i=2}^n Y_i.$$

Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$P(Y_i = 1) = P(P_{i-1} \cap F_i) + P(F_{i-1} \cap P_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Par linéarité,

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

La méthode 1 exploite la fonction génératrice construite dans l'énoncé ; la méthode 2, plus courte, décompose N_n en somme d'indicatrices, technique très utile pour calculer une espérance sans connaître la loi. Remarque : la formule du binôme donne

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{s^k}{2^{n-1}};$$

deux polynômes égaux sur $[0, 1]$ ayant les mêmes coefficients,

$$P(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ c'est-à-dire que } N_n - 1 \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right),$$

d'espérance $\frac{n-1}{2}$ (ce qui est cohérent avec 3.2.1 et 3.2.2).

Conclusion

le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers est $E(N_n) = \frac{n+1}{2}$.

3.3. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Méthode 1 — Étude de fonction.

Soit $\psi(x) = e^{-x} - 1 + x$ sur $\mathbb{R}$, dérivable, avec $\psi'(x) = 1 - e^{-x}$. On a $\psi'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $\psi'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ (croissance de l'exponentielle). Donc ψ est décroissante sur $] -\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$, et admet en 0 un minimum global $\psi(0) = 0$. Ainsi $\psi \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Convexité.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde $e^{-x} > 0$: elle est convexe, donc sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation $y = 1 - x$ (valeur 1, dérivée -1).

La méthode 1 est universelle ; la méthode 2 est l'argument à reconnaître pour toutes les inégalités « fonction convexe contre tangente » ($e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, ...).

Conclusion

pour tout réel x , $1 - x \leq e^{-x}$.

2. a. La série

$$\sum P(A_i)$$

est à termes positifs et diverge, donc ses sommes partielles

$$S_n = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

forment une suite croissante non majorée (sinon elle convergerait par le théorème de la limite monotone) : $S_n \rightarrow +\infty$. Pour $n \geq k$,

$$\sum_{i=k}^n P(A_i) = S_n - S_{k-1}$$

avec S_{k-1} constant (et $S_0 = 0$).

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty.$$

- b.** Par les lois de Morgan, $\overline{C_n} = \bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}$. Les événements A_i étant mutuellement indépendants, les événements contraires $\overline{A_i}$ le sont aussi (résultat du cours) ; donc

$$P(C_n) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}).$$

Avec 3.3.1 appliqué à $x = P(A_i) : 0 \leq P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq e^{-P(A_i)}$. On peut multiplier membre à membre ces inégalités entre réels positifs (récurrence sur le nombre de facteurs) :

$$\prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \leq \prod_{i=k}^n e^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

D'où

$$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

Limite : d'après 2.a,

$$\exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right) \rightarrow 0$$

(car $\exp(y) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow -\infty$). Ainsi

$$1 - \exp \left(- \sum_{i=k}^n P(A_i) \right) \leq P(C_n) \leq 1,$$

et le minorant tend vers 1. Par encadrement, $P(C_n) \rightarrow 1$.

Conclusion

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \geq 1 - \exp \left(- \sum_{i=k}^n P(A_i) \right)$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$.

- c. $C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$, donc $C_n \subset C_{n+1}$: la suite $(C_n)_{n \geq k}$ est croissante pour l'inclusion.
Par le théorème de continuité monotone (croissante) des probabilités :

$$P \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.$$

Conclusion

$$C_n \subset C_{n+1} \text{ et } P \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \right) = 1.$$

- d. Double inclusion. Si $\omega \in \bigcup_{i \geq k} A_i$, il existe $i \geq k$ avec $\omega \in A_i \subset C_i$, donc $\omega \in \bigcup_{n \geq k} C_n$.
Réciproquement, si $\omega \in C_n$ pour un $n \geq k$, il existe $i \in \{k, \dots, n\}$ avec $\omega \in A_i$, donc $\omega \in \bigcup_{i \geq k} A_i$. Ainsi

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n,$$

et d'après 2.c, $P \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \right) = 1$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

3. Ici $p \in]0, 1[$ est quelconque. Posons $A_n = P_{2n} \cap P_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Indépendance des A_n . Pour des indices $n_1 < \dots < n_r$, les entiers

$2n_1, 2n_1 + 1, \dots, 2n_r, 2n_r + 1$ sont deux à deux distincts (les blocs $\{2n, 2n + 1\}$ sont disjoints). Par indépendance mutuelle des lancers :

$$P(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_r}) = p^{2r} = \prod_{s=1}^r P(A_{n_s}).$$

Les événements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont donc mutuellement indépendants, avec $P(A_n) = p^2$.

Divergence :

$$\sum P(A_n)$$

a un terme général constant $p^2 > 0$, qui ne tend pas vers 0 ; la série diverge.

Application de 3.3.2 : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 1$.

Interprétation. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un lancer quelconque, et B_m l'événement « il existe $j > m$ tel que les lancers j et $j + 1$ donnent Pile ». Pour $n \geq m$, on a $2n > m$, donc $A_n \subset B_m$; ainsi $\bigcup_{n \geq m} A_n \subset B_m$ et $P(B_m) \geq 1$, soit $P(B_m) = 1$.

Complément (titre de la partie). Les B_m décroissent ($B_{m+1} \subset B_m$) et $\bigcap_{m \geq 1} B_m$ est l'événement « on obtient une infinité de fois deux Pile consécutifs ». Par continuité monotone décroissante, $P\left(\bigcap_{m \geq 1} B_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(B_m) = 1$.

Conclusion

pour tout lancer m , la probabilité d'obtenir deux Pile consécutifs après le m -ième lancer vaut 1 ; par conséquent, presque sûrement, on obtient une infinité de fois deux Pile consécutifs.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 1.a : la classe C^2 n'étant définie au programme que sur un ouvert, la question demande de justifier que f est de classe C^2 sur $U = \{(x, t) ; 1 + xt > 0\}$, qui contient $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, le caractère ouvert de U étant admis (les propriétés topologiques doivent être précisées dans le sujet). Les questions 1.b et 1.c restent posées sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.
- Problème, question 3.2.3 : Code adapté en Python. La lecture de m au clavier est remplacée par un argument de fonction (la contrainte $m < 100$, liée au dimensionnement statique des tableaux de l'original, devient sans objet), la simulation de Bernoulli utilise `rd.randint(0, 2)` dont la syntaxe est rappelée dans l'énoncé, et les tableaux sont de taille $m + 1$ pour conserver la correspondance entre l'indice k et X_k, N_k . Les blancs à compléter sont conservés.