



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1.1. Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

1.2. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$$

1. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

2. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α .

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement 1.2.2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

5. On pose :

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$$

Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$$

6. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on adopte les notations suivantes :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n , à coefficients réels (n entier naturel non nul).

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$${}^t A = -A$$

${}^t A$ étant la matrice transposée de A .

On définit les applications Tr et φ par : pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^t AB)$$

1. Montrer que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

2. Prouver que Tr est surjective. Donner la dimension du noyau de Tr .
3. Prouver que φ définit un produit scalaire dont la norme associée, $\| \cdot \|$, vérifie :

$$\forall A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

4. Établir que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$$

5. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour φ .
6. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. En déduire que pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2$$

existe et vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2$$

PROBLÈME 3

On rappelle que :

- La fonction Γ est la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$$

- Si X suit une loi normale et si α est un réel non nul alors αX suit également une loi normale.
- Pour $\nu > 0$, la loi gamma de forme ν et de taux 1, notée $\gamma(\nu)$, est la loi de densité $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp(-x)$ sur $]0, +\infty[$, nulle sur $] -\infty, 0]$.

On admettra que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Pour $b > 0$ et $\nu > 0$, on dit qu'une variable aléatoire suit la loi gamma de paramètres (b, ν) si elle admet pour densité la fonction $f_{b,\nu}$ définie par :

$$f_{b,\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu) b^\nu} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) \text{ si } x > 0, \text{ et } f_{b,\nu}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

Ainsi, la loi gamma de paramètres $(1, \nu)$ est la loi $\gamma(\nu)$.

3.1.

On considère la variable aléatoire

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2,$$

où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$.
2. En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.

3. Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n}{2}\right)$.
4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n .
5. On dit alors que Y_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$. Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0, 1[$. Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$.

Dans la suite du problème on considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, d'espérance m et d'écart-type $\sigma > 0$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (3.2) puis une estimation par intervalle de confiance (3.3 et 3.4) de la variance σ^2 .

Soit θ un paramètre réel. Si, pour tout entier n (éventuellement à partir d'un certain rang), g_n est une fonction de n variables réelles ne dépendant pas de θ et $Z_n = g_n(X_1, \dots, X_n)$, on dit que (Z_n) est un estimateur de θ , et on rappelle que :

- Lorsque Z_n admet une espérance, le biais de Z_n est $b(Z_n) = E(Z_n) - \theta$. L'estimateur Z_n est dit sans biais lorsque pour tout n :

$$E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur (Z_n) est dit convergent lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

3.2. Estimation ponctuelle de σ^2 .

Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2$$

1. Montrer que $(F_n)_{n \geq 1}$ est un estimateur convergent sans biais de m .

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

puis que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

b. Prouver que :

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

c. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 .

3.3. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant connue.

Soit α un réel de l'intervalle $]0, 1[$. Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

1. Justifier que U_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté.

2. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \right]$$

et $\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \right]$

En déduire que la probabilité de l'événement

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \right]$$

est $1 - \alpha$.

3.4. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant inconnue.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A définie par :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \text{ avec } \begin{cases} a_{ii} = n-1 \\ a_{ij} = -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et B la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

- a. Justifier que A est une matrice diagonalisable.
- b. Calculer le produit AB , en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.
- c. Montrer que :

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

- d. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .

- e. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre n . Prouver que :

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

- f. Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que :

$$P^{-1}AP = D \quad \text{avec} \quad {}^tP = P^{-1}$$

(On ne demande pas la matrice P).

g. On note $(p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ les coefficients de la matrice ${}^tP$, montrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$$

puis que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1$$

2. Soit q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = {}^tXMX \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{n}A$$

a. On pose $Y = {}^tPX$, montrer que :

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$$

puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$, montrer que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$$

3. Pour tout i de l'ensemble $\{1, \dots, n-1\}$ on pose :

$$Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j$$

a. Justifier que Y_i suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b. En utilisant les résultats de la question 3.4.2, montrer que :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$$

c. En admettant que les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du Chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

d. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

et $\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right]$

sont égaux.

e. En déduire que la probabilité de l'événement :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

est $1 - \alpha$.