



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2003

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1.1. Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question 1.1.1

On établit la stricte positivité par récurrence, puis la monotonie par l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

Initialisation : $u_0 = a > 0$ car $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_n^2 > 0$, donc $u_{n+1} = u_n + u_n^2 > 0$ comme somme de deux réels strictement positifs. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ puisque $u_n \neq 0$.

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement croissante, donc monotone.

Question 1.1.2

Il s'agit de montrer que $u_n \rightarrow +\infty$. Deux approches classiques sont possibles.

Méthode 1 — Limite monotone et raisonnement par l'absurde.

La suite (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit elle est majorée et converge vers un réel ℓ , soit elle n'est pas majorée et tend vers $+\infty$.

Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ . Comme (u_n) est croissante, $u_n \geq u_0 = a$ pour tout n , donc par passage à la limite dans une inégalité large, $\ell \geq a > 0$.

Par ailleurs $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et, par opérations sur les limites, $u_n + u_n^2 \rightarrow \ell + \ell^2$. L'unicité de la

limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ donne $\ell = \ell + \ell^2$, soit $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\ell \geq a > 0$.

Ainsi (u_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

Méthode 2 — Minoration explicite.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq a > 0$ (croissance), donc $u_k^2 \geq a^2$ et $u_{k+1} - u_k \geq a^2$.

Pour $n \geq 1$, en sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ (somme télescopique) :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \geq na^2$$

donc $u_n \geq a + na^2$, inégalité encore vraie pour $n = 0$. Comme $a^2 > 0$, $a + na^2 \rightarrow +\infty$, et par comparaison $u_n \rightarrow +\infty$.

Comparaison des deux méthodes : la méthode 1 est le schéma général « suite monotone + équation du point fixe sans solution admissible » ; la méthode 2 est plus élémentaire et fournit en plus une minoration quantitative de la vitesse de divergence.

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

1.2. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $u_n > 0$ pour tout n (question 1.1.1), $\ln u_n$ et donc v_n sont bien définis.

Question 1.2.1

On calcule la différence en mettant les deux termes au même dénominateur, puis on utilise la monotonie de (u_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2 \ln u_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln u_{n+1} - \ln(u_n^2)) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n^2} \right)$$

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{u_n + u_n^2}{u_n^2} = \frac{1}{u_n} + 1$. D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

Soient maintenant $p, n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette égalité au rang $n + p$:

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right)$$

Minoration : $u_{n+p} > 0$ donc $1 + \frac{1}{u_{n+p}} > 1$ et $\ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) > 0$; comme $\frac{1}{2^{n+p+1}} > 0$, on obtient $v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0$.

Majoration : la suite (u_n) étant croissante, $u_{n+p} \geq u_n > 0$, donc $0 < \frac{1}{u_{n+p}} \leq \frac{1}{u_n}$, puis, par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$, $\ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$. En multipliant par $\frac{1}{2^{n+p+1}} > 0$:

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

Conclusion

les deux résultats demandés sont établis pour tous $p, n \in \mathbb{N}$.

Question 1.2.2

On somme l'encadrement précédent pour p allant de 0 à k , ce qui fait apparaître une somme télescopique et une somme géométrique.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Par télescopage :

$$v_{n+k+1} - v_n = \sum_{p=0}^k (v_{n+p+1} - v_{n+p})$$

Chaque terme est strictement positif d'après 1.2.1, donc la somme, qui en comporte au moins un, est strictement positive.

En sommant les majorations de 1.2.1 :

$$v_{n+k+1} - v_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}}$$

La somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ vaut :

$$\sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Comme $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) > 0$, la multiplication conserve l'inégalité.

Conclusion

$$\text{pour tous } k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

Question 1.2.3

On utilise 1.2.2 avec $n = 0$ pour majorer, puis le théorème de la limite monotone.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $n = 0$ et $u_0 = a$, $v_0 = \ln a$:

$$v_{k+1} \leq v_0 + \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \ln a + \ln \left(\frac{a+1}{a} \right) = \ln(a+1)$$

De plus $v_0 = \ln a \leq \ln(a+1)$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $v_m \leq \ln(1+a)$: la suite (v_n) est majorée.

D'après 1.2.1, $v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout n : la suite (v_n) est strictement croissante.

Le théorème de la limite monotone s'applique (suite croissante et majorée).

Conclusion

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et converge vers une limite réelle notée α (avec $\alpha \leq \ln(1+a)$).

Question 1.2.4

On compare d'abord v_n à sa limite, puis on passe à la limite $k \rightarrow +\infty$ dans l'encadrement de 1.2.2, n étant fixé.

Première inégalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_m) étant croissante, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $v_n \leq v_{n+k}$; en faisant tendre k vers $+\infty$ (passage à la limite dans une inégalité large), $v_n \leq \alpha$. Ainsi $\frac{\ln u_n}{2^n} \leq \alpha$, soit $\ln u_n \leq \alpha 2^n$, et par croissance de l'exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

Seconde inégalité. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

Le membre de droite ne dépend pas de k , et $v_{n+k+1} \rightarrow \alpha$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite dans l'inégalité large :

$$\alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

En multipliant par $2^n > 0$ et en utilisant $2^n v_n = \ln u_n$:

$$\alpha 2^n \leq \ln u_n + \ln \left(\frac{u_n + 1}{u_n} \right) = \ln(u_n + 1)$$

d'où, par croissance de l'exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

Équivalent. Pour tout n , $u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$, et en divisant par $u_n > 0$:

$$1 \leq \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

Comme $u_n \rightarrow +\infty$ (question 1.1.2), $1 + \frac{1}{u_n} \rightarrow 1$; par le théorème d'encadrement,
 $\frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).$$

Question 1.2.5

On utilise l'encadrement de 1.2.4, puis on exprime β_{n+1} à l'aide de $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ et de $\exp(\alpha 2^{n+1}) = (\exp(\alpha 2^n))^2$.

Caractère borné : d'après 1.2.4, pour tout n , $0 \leq \exp(\alpha 2^n) - u_n \leq 1$, donc $\beta_n \in [0, 1]$. La suite (β_n) est bornée.

Relation : notons $E_n = \exp(\alpha 2^n) > 0$, de sorte que $u_n = E_n - \beta_n$ et $E_{n+1} = \exp(2\alpha 2^n) = E_n^2$. Alors :

$$\beta_{n+1} = E_n^2 - u_{n+1} = E_n^2 - u_n - u_n^2 = E_n^2 - (E_n - \beta_n) - (E_n - \beta_n)^2$$

En développant $(E_n - \beta_n)^2 = E_n^2 - 2E_n\beta_n + \beta_n^2$:

$$\beta_{n+1} = -E_n + \beta_n + 2E_n\beta_n - \beta_n^2 = E_n(2\beta_n - 1) + \beta_n - \beta_n^2$$

donc $\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = E_n(2\beta_n - 1)$. En multipliant par $\frac{1}{E_n} = \exp(-\alpha 2^n)$:

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$$

Conclusion

(β_n) est bornée (à valeurs dans $[0, 1]$) et vérifie la relation demandée.

Question 1.2.6

On montre que $\beta_n \rightarrow \frac{1}{2}$ en majorant le membre de droite de la relation de 1.2.5.

Pour tout n , $\beta_{n+1} \in [0, 1]$ et $\beta_n \in [0, 1]$ donc $\beta_n^2 - \beta_n = \beta_n(\beta_n - 1) \in [-1, 0]$. Par inégalité triangulaire, $|\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \leq 2$.

Par ailleurs $\exp(\alpha 2^n) \geq u_n \rightarrow +\infty$, donc $\exp(\alpha 2^n) \rightarrow +\infty$ et $\exp(-\alpha 2^n) \rightarrow 0$. Ainsi :

$$|2\beta_n - 1| \leq 2 \exp(-\alpha 2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\beta_n \rightarrow \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\beta_n = \frac{1}{2} + o(1)$.

Enfin $u_n = \exp(\alpha 2^n) - \beta_n = \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)$ (l'opposé d'une suite tendant vers 0 tend vers 0).

Conclusion

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).$$

EXERCICE 2

Question 2.1

On travaille directement sur les coefficients.

Linéarité : pour $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le coefficient diagonal d'indice i de $\lambda A + B$ est $\lambda a_{ii} + b_{ii}$, donc :

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

Ainsi Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Trace d'un produit : par définition du produit matriciel,

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

et

$$(BA)_{kk} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}.$$

Donc :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{Tr}(BA)$$

l'échange des deux sommes finies étant licite.

Conclusion

Tr est linéaire et $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2.2

On exhibe un antécédent de tout réel, puis on applique le théorème du rang.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $\frac{x}{n}I_n$ a tous ses coefficients diagonaux égaux à $\frac{x}{n}$, donc $\text{Tr}\left(\frac{x}{n}I_n\right) = n \cdot \frac{x}{n} = x$. Ainsi Tr est surjective et $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$, de dimension 1.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie n^2 ; le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \text{Im}(\text{Tr}) = n^2 - 1$$

Conclusion

Tr est surjective et son noyau est de dimension $n^2 - 1$ (c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noyau d'une forme linéaire non nulle).

Question 2.3

On exprime φ à l'aide des coefficients, puis on vérifie les axiomes du produit scalaire.

Expression : pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, le coefficient (i, k) de ${}^tA$ est a_{ki} , donc

$$({}^tAB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$$

et :

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$$

Symétrie : cette expression est symétrique en A et B , donc $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$.

Bilinéarité : pour B fixée, l'application

$$A \mapsto \varphi(A, B) = \sum_{i,k} a_{ki} b_{ki}$$

est linéaire (combinaison linéaire des coefficients de A). Par symétrie, φ est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.

Positivité :

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\varphi(A, A) = 0$, c'est une somme de réels positifs nulle, donc tous ses termes sont nuls : $a_{ki} = 0$ pour tous i, k , soit $A = 0$.

Conclusion

φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa norme associée vérifie

$$\|A\|^2 = \varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

Question 2.4

L'inégalité est une inégalité de Cauchy-Schwarz ; on peut l'appliquer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 — Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire φ .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme ${}^t I_n = I_n$:

$$\varphi(I_n, A) = \text{Tr}({}^t I_n A) = \text{Tr}(A)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire φ (question 2.3) donne $|\varphi(I_n, A)| \leq \|I_n\| \|A\|$. Or, d'après 2.3, $\|I_n\|^2$ est la somme des carrés des coefficients de I_n , soit n , donc $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

Méthode 2 — Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

Avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ appliqué aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et $(a_{11}, \dots, a_{nn})$:

$$|\text{Tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_{ii} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ii}^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ii}^2}$$

Comme

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|^2$$

(on ajoute des termes positifs), et par croissance de la racine carrée, $|\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.

Comparaison : la méthode 1 exploite la structure euclidienne construite en 2.3 et montre que la trace est le produit scalaire avec I_n ; elle donne aussi le cas d'égalité (A colinéaire à I_n). La méthode 2 ramène tout aux coefficients et n'utilise que l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle.

Conclusion

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\operatorname{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

Question 2.5

Il faut montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux et que leur somme est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ce sont des sous-espaces vectoriels : ils contiennent la matrice nulle et, la transposition étant linéaire, ils sont stables par combinaison linéaire.

Somme égale à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \frac{A + {}^tA}{2}$ et $T = \frac{A - {}^tA}{2}$.

Comme ${}^t({}^tA) = A$, on a ${}^tS = S$ et ${}^tT = \frac{{}^tA - A}{2} = -T$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $A = S + T$.

Orthogonalité : soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 1 — Propriétés de la trace.

$\varphi(S, T) = \operatorname{Tr}({}^tST) = \operatorname{Tr}(ST)$. Une matrice et sa transposée ont la même diagonale, donc la même trace :

$$\operatorname{Tr}(ST) = \operatorname{Tr}({}^t(ST)) = \operatorname{Tr}({}^tT {}^tS) = \operatorname{Tr}(-TS) = -\operatorname{Tr}(TS).$$

D'après 2.1, $\operatorname{Tr}(TS) = \operatorname{Tr}(ST)$, donc $\operatorname{Tr}(ST) = -\operatorname{Tr}(ST)$, d'où $\varphi(S, T) = 0$.

Méthode 2 — Calcul sur les coefficients.

D'après 2.3,

$$\varphi(S, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} t_{ij}.$$

En échangeant les noms des indices i et j , puis en utilisant $s_{ji} = s_{ij}$ et $t_{ji} = -t_{ij}$:

$$\varphi(S, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ji} t_{ji} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} t_{ij} = -\varphi(S, T)$$

donc $\varphi(S, T) = 0$.

Comparaison : la méthode 1 est intrinsèque (elle n'utilise que les propriétés de la trace) ; la méthode 2 est un calcul direct, utile lorsqu'on dispose d'une expression explicite du produit scalaire.

Somme directe : si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors A est orthogonale à elle-même :

$$\|A\|^2 = \varphi(A, A) = 0, \text{ donc } A = 0.$$

Conclusion

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: ce sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux. En particulier $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ et ces deux espaces ont la même dimension $n^2 - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Question 2.6

Pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la question 2.3 donne

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \|A - M\|^2 :$$

il s'agit de minimiser la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 1 — Projection orthogonale et théorème de Pythagore.

Écrivons $A = S + T$ avec $S = \frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $T = \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (question 2.5) ; S est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A - M = T + (S - M)$ avec $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S - M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui sont orthogonales d'après 2.5. Le théorème de Pythagore donne :

$$\|A - M\|^2 = \|T\|^2 + \|S - M\|^2 \geq \|T\|^2$$

avec égalité si et seulement si $\|S - M\| = 0$, c'est-à-dire $M = S$, qui appartient bien à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le minimum existe donc, il est atteint uniquement en $M = S$ et vaut :

$$\|T\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2$$

Méthode 2 — Minimisation coefficient par coefficient.

Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on regroupe dans la somme les termes d'indices (i, j) et (j, i) pour $i < j$, en utilisant $m_{ji} = m_{ij}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n (a_{ii} - m_{ii})^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(a_{ij} - m_{ij})^2 + (a_{ji} - m_{ij})^2]$$

Pour des réels a, b, x , en développant :

$$(a - x)^2 + (b - x)^2 = 2 \left(x - \frac{a + b}{2} \right)^2 + \frac{(a - b)^2}{2} \geq \frac{(a - b)^2}{2}$$

avec égalité si et seulement si $x = \frac{a+b}{2}$. Les coefficients m_{ii} ($1 \leq i \leq n$) et m_{ij} ($i < j$) peuvent être choisis indépendamment, ils déterminent M symétrique. On a donc, pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_{ij} - a_{ji})^2}{2}$$

avec égalité pour $m_{ii} = a_{ii}$ et $m_{ij} = m_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$. Enfin, les termes diagonaux de

$$\sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji})^2$$

sont nuls et chaque paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ y apparaît deux fois, donc

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_{ij} - a_{ji})^2}{2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

Comparaison : la méthode 1 est celle qu'appelle « En déduire » et illustre la caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la distance ; la méthode 2 est entièrement élémentaire et retrouve le même minimiseur $M = \frac{A + {}^t A}{2}$.

Conclusion

le minimum existe, il est atteint pour $M = \frac{A + {}^t A}{2}$ et vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

PROBLÈME 3

Notations : Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$\phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ sa densité, continue sur $\mathbb{R}$; Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$\Phi' = \phi$, et $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ pour tout réel t (parité de ϕ).

Lemme préliminaire (utilisé en 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4). Soient $b > 0$ et $\nu > 0$. Si Z suit la loi $\gamma(\nu)$, alors bZ suit la loi gamma de paramètres (b, ν) ; réciproquement, si X suit la loi gamma de paramètres (b, ν) , alors $\frac{X}{b}$ suit la loi $\gamma(\nu)$.

Preuve. Si Z admet une densité f_Z et $b > 0$, la transformation affine bZ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{b} f_Z\left(\frac{x}{b}\right)$. Pour Z de loi $\gamma(\nu)$ et $x > 0$:

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{\Gamma(\nu)b^\nu} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) = f_{b,\nu}(x)$$

et cette densité est nulle pour $x \leq 0$: bZ suit la loi gamma de paramètres (b, ν) (ce qui montre au passage que $f_{b,\nu}$ est bien une densité). De même, si X a pour densité $f_{b,\nu}$, $\frac{X}{b}$ a pour densité $x \mapsto b f_{b,\nu}(bx)$, qui vaut $\frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp(-x)$ pour $x > 0$ et 0 sinon. Les lois étant caractérisées par leurs fonctions de répartition, donc par une densité, le lemme est établi.

3.1.

Question 3.1.1

On calcule $P(X_1^2 \leq x)$ en distinguant le signe de x .

Si $x < 0$: l'événement $[X_1^2 \leq x]$ est impossible, donc $F_{Y_1}(x) = 0$.

Si $x = 0$: $[X_1^2 \leq 0] = [X_1 = 0]$, de probabilité nulle car X_1 est à densité; $F_{Y_1}(0) = 0$.

Si $x > 0$: $[X_1^2 \leq x] = [-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}]$, donc, X_1 étant à densité :

$$F_{Y_1}(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

Conclusion

$$F_{Y_1}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F_{Y_1}(x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \text{ si } x > 0.$$

Question 3.1.2

On montre que Y_1 est à densité en dérivant F_{Y_1} , puis on identifie cette densité.

Régularité : F_{Y_1} est nulle donc de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$; sur $]0, +\infty[$, elle est de classe C^1 par composition ($x \mapsto \sqrt{x}$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$). En 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_{Y_1}(x) = 2\Phi(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 = F_{Y_1}(0)$, et F_{Y_1} est nulle à gauche, donc F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi Y_1 est une variable à densité et une densité est donnée par $f(x) = F'_{Y_1}(x)$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Calcul : pour $x > 0$,

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \phi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

et $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Identification : avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

et les deux fonctions sont nulles sur $] -\infty, 0[$.

Conclusion

Y_1 suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; de façon équivalente (lemme préliminaire), $\frac{Y_1}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Question 3.1.3

On se ramène aux lois $\gamma(\nu)$ du programme, pour lesquelles on dispose de la stabilité par somme de variables indépendantes.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, X_k suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donc, d'après 3.1.2 appliquée à X_k (qui a la même loi que X_1), X_k^2 suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, et d'après le lemme préliminaire $\frac{X_k^2}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, les variables $\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2}$, fonctions respectivement de $X_1, \dots, X_n$, sont mutuellement indépendantes.

Montrons par récurrence sur $j \in \{1, \dots, n\}$ que

$$R_j = \sum_{k=1}^j \frac{X_k^2}{2}$$

suit la loi $\gamma\left(\frac{j}{2}\right)$. Pour $j = 1$ c'est ce qui précède. Si R_j suit la loi $\gamma\left(\frac{j}{2}\right)$ avec $j < n$,

alors R_j , fonction de $(X_1, \dots, X_j)$, est indépendante de $\frac{X_{j+1}^2}{2}$ par le lemme des coalitions, et la stabilité par somme des lois gamma indépendantes de même taux donne que $R_{j+1} = R_j + \frac{X_{j+1}^2}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{1}{2}\right) = \gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)$.

Ainsi $\frac{Y_n}{2} = R_n$ suit la loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, et par le lemme préliminaire avec $b = 2$, $Y_n = 2R_n$ suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n}{2}\right)$.

Conclusion

Y_n suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n}{2}\right)$.

Question 3.1.4

Méthode 1 — Par la loi gamma.

D'après 3.1.3, $\frac{Y_n}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. Une variable de loi $\gamma(\nu)$ admet une espérance et une variance, toutes deux égales à ν . Donc $E\left(\frac{Y_n}{2}\right) = V\left(\frac{Y_n}{2}\right) = \frac{n}{2}$. Par linéarité de l'espérance et $V(cZ) = c^2V(Z)$:

$$E(Y_n) = 2 \cdot \frac{n}{2} = n, \quad V(Y_n) = 4 \cdot \frac{n}{2} = 2n$$

Méthode 2 — Par les moments de la loi normale.

X_k admet des moments de tous ordres (densité ϕ et $x^p\phi(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $\pm\infty$ par croissances comparées). Par Koenig-Huygens, $E(X_k^2) = V(X_k) + E(X_k)^2 = 1$.

Calcul de $E(X_k^4)$: pour $A > 0$, intégrons par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u(x) = x^3$, $v(x) = -\phi(x)$, fonctions de classe C^1 , $v'(x) = x\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^A x^4\phi(x) dx &= \int_0^A x^3 \cdot x\phi(x) dx = [-x^3\phi(x)]_0^A + 3 \int_0^A x^2\phi(x) dx = -A^3\phi(A) \\ &+ 3 \int_0^A x^2\phi(x) dx \end{aligned}$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, $A^3\phi(A) \rightarrow 0$ (croissances comparées) et

$\int_0^A x^2\phi(x) dx \rightarrow \frac{1}{2}E(X_k^2) = \frac{1}{2}$ (parité). Donc $\int_0^{+\infty} x^4\phi(x) dx = \frac{3}{2}$, et par parité et théorème de transfert $E(X_k^4) = 3$.

Ainsi $V(X_k^2) = E(X_k^4) - E(X_k^2)^2 = 3 - 1 = 2$. Par linéarité,

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k^2) = n;$$

les X_k^2 étant indépendantes, leurs covariances deux à deux sont nulles et

$$V(Y_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k^2) = 2n.$$

Comparaison : la méthode 1 utilise le résultat de 3.1.3 et les moments connus des lois gamma ; la méthode 2 est indépendante de 3.1.3 et repose sur le calcul des moments de la loi normale et la variance d'une somme de variables indépendantes.

Conclusion

$$E(Y_n) = n \text{ et } V(Y_n) = 2n.$$

Question 3.1.5

On applique le théorème de la bijection à G_n restreinte à $]0, +\infty[$.

D'après 3.1.3, Y_n a pour densité $f_{2, \frac{n}{2}}$, nulle sur $] -\infty, 0]$ et continue strictement

positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi $G_n(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et, pour $t > 0$, $G_n(t) = \int_0^t f_{2, \frac{n}{2}}(x) dx$.

Sur $]0, +\infty[$: fixons $t_0 > 0$; pour $t > 0$, $G_n(t) = G_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_{2, \frac{n}{2}}(x) dx$, et $f_{2, \frac{n}{2}}$ est

continue sur $]0, +\infty[$, donc par le théorème fondamental du calcul intégral G_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f_{2, \frac{n}{2}} > 0$. G_n est donc continue et strictement

croissante sur $]0, +\infty[$.

Limites : $\lim_{t \rightarrow 0^+} G_n(t) = G_n(0) = 0$ (une fonction de répartition d'une variable à densité est continue) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} G_n(t) = 1$.

D'après le théorème de la bijection, G_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Pour $\beta \in]0, 1[$, il existe donc un unique $t > 0$ tel que $G_n(t) = \beta$. Aucun $t \leq 0$ ne convient puisque $G_n(t) = 0 \neq \beta$.

Conclusion

pour tout $\beta \in]0, 1[$, il existe un unique réel t tel que $G_n(t) = \beta$; ce réel $\chi_\beta^2(n)$ est strictement positif, et $\beta \mapsto \chi_\beta^2(n)$ est strictement croissante (réciproque d'une bijection strictement croissante).

Préambule de la suite du problème

Pour tout i , X_i suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: elle admet une espérance m , une variance $\sigma^2 > 0$, et des moments de tous ordres. Les estimateurs considérés sont des fonctions de $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas du paramètre estimé.

3.2. Estimation ponctuelle de σ^2 .

Question 3.2.1

On calcule l'espérance et la variance de F_n , puis on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

F_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$ qui ne dépend pas de m : c'est un estimateur de m .

Sans biais : par linéarité,

$$E(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot nm = m$$

pour tout $n \geq 1$.

Variance : les X_i étant indépendantes, leurs covariances deux à deux sont nulles, donc :

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Convergence : soit $\varepsilon > 0$. F_n admet une variance ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$0 \leq P(|F_n - m| \geq \varepsilon) = P(|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $P(|F_n - m| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ par encadrement.

Conclusion

$(F_n)_{n \geq 1}$ est un estimateur sans biais et convergent de m (c'est aussi la loi faible des grands nombres).

Question 3.2.2.a

On développe le carré, puis on applique la première formule aux variables translatées $X_i - m$.

Première égalité. Comme

$$\sum_{i=1}^n X_i = nF_n :$$

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2F_n X_i + F_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2F_n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2$$

ce qui est la formule demandée puisque

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Seconde égalité. Posons $X'_i = X_i - m$. La moyenne des X'_i est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X'_i = F_n - m,$$

et $X'_i - (F_n - m) = X_i - F_n$. La première égalité, qui est une identité algébrique valable pour tous réels, appliquée aux X'_i donne :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X'_i - (F_n - m))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

Conclusion

les deux expressions de V_n sont établies.

Question 3.2.2.b

On prend l'espérance dans la seconde expression de V_n .

Existence : $(X_i - m)^2$ et $(F_n - m)^2$ admettent une espérance car X_i et F_n admettent un moment d'ordre 2 ; par linéarité, V_n admet une espérance.

Pour tout i , $E((X_i - m)^2) = V(X_i) = \sigma^2$. Comme $E(F_n) = m$,
 $E((F_n - m)^2) = V(F_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ (question 3.2.1). Par linéarité :

$$E(V_n) = \frac{1}{n} \cdot n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Conclusion

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Question 3.2.2.c

On corrige le biais par un facteur multiplicatif.

Pour $n = 1$, $V_1 = 0$ et $E(V_1) = 0 \neq \sigma^2$; on considère donc $n \geq 2$ et l'on pose :

$$S_n = \frac{n}{n-1} V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2$$

S_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de σ^2 et, par linéarité,
 $E(S_n) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$ pour tout $n \geq 2$.

Conclusion

$(S_n)_{n \geq 2}$, avec

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2,$$

est un estimateur sans biais de σ^2 (c'est l'estimateur S_n utilisé en 3.4).

3.3. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant connue.

Question 3.3.1

On centre et réduit les X_i pour se ramener à la question 3.1.3.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$. Par transformation affine d'une variable normale, Z_i suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Les Z_i , fonctions respectivement des X_i mutuellement indépendantes, sont mutuellement indépendantes. Alors :

$$U_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

et la question 3.1.3 s'applique : U_n suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n}{2}\right)$.

Conclusion

U_n suit la loi du Chi-deux à n degrés de liberté, et sa fonction de répartition est G_n .

Question 3.3.2

On traduit chaque inégalité à l'aide de la relation $nT_n = \sigma^2 U_n$, puis on calcule la probabilité avec G_n .

Notons $c_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ et $c_2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$, bien définis car $\frac{\alpha}{2}$ et $1 - \frac{\alpha}{2}$ appartiennent à $]0, 1[$; d'après 3.1.5, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. De plus $\frac{\alpha}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2}$ (car $\alpha < 1$), donc $c_1 < c_2$.

Par définition,

$$nT_n = \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = \sigma^2 U_n.$$

Comme $c_2 > 0$:

$$\frac{nT_n}{c_2} \leq \sigma^2 \iff nT_n \leq \sigma^2 c_2 \iff \sigma^2 U_n \leq \sigma^2 c_2 \iff U_n \leq c_2$$

(car $\sigma^2 > 0$).

Comme $c_1 > 0$:

$$\sigma^2 \leq \frac{nT_n}{c_1} \iff \sigma^2 c_1 \leq nT_n \iff \sigma^2 c_1 \leq \sigma^2 U_n \iff c_1 \leq U_n.$$

Ces équivalences étant vraies pour toute issue, les deux événements sont égaux.

Probabilité : U_n a pour fonction de répartition G_n (question 3.3.1) et est à densité, donc $P(U_n = c_1) = 0$ et :

$$P(c_1 \leq U_n \leq c_2) = G_n(c_2) - G_n(c_1) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

Conclusion

les deux événements sont égaux et

$$P\left(\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) = 1 - \alpha :$$

on obtient un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de confiance $1 - \alpha$.

3.4. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant inconnue.

Dans toute cette partie, $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, et l'on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à la colonne de ses coordonnées dans la base canonique, qui est orthonormale; ainsi $\langle X, X' \rangle = {}^t X X'$.

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Par définition de A , $A = nI_n - J$.

Question 3.4.1.a

La matrice A est réelle et symétrique ($a_{ij} = a_{ji} = -1$ pour $i \neq j$). D'après le théorème spectral (résultat du programme admis), toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonale.

Conclusion

A est diagonalisable.

Question 3.4.1.b

Le coefficient d'indice i de AB est la somme des coefficients de la ligne i de A :

$$(AB)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = (n-1) + (n-1) \cdot (-1) = 0$$

Donc $AB = 0 = 0 \cdot B$ avec $B \neq 0$.

Conclusion

0 est valeur propre de A et B est un vecteur propre associé.

Question 3.4.1.c

La matrice de $\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}$ dans la base canonique est $A - nI_n = -J$. Toutes les colonnes de $-J$ sont égales à $-B \neq 0$, donc l'espace engendré par les colonnes est $\operatorname{Vect}(B)$, de dimension 1. Le rang de $\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est le rang de sa matrice.

Conclusion

$\dim \operatorname{Im}(\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$, et $\operatorname{Im}(\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées B .

Question 3.4.1.d

On applique le théorème du rang, puis le fait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker}(\varphi - n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1$.

Comme $n \geq 2$, $n - 1 \geq 1$: ce noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, donc n est valeur propre de A , de sous-espace propre $E_n = \operatorname{Ker}(A - nI_n)$ de dimension $n - 1$. Explicitement, $X \in E_n \iff -JX = 0$; chaque ligne de JX vaut

$$\sum_{j=1}^n x_j,$$

donc :

$$E_n = \left\{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \sum_{j=1}^n x_j = 0 \right\}$$

D'après 3.4.1.b, 0 est valeur propre et $\operatorname{Vect}(B) \subset E_0 = \operatorname{Ker}(A)$, donc $\dim E_0 \geq 1$.

Les valeurs propres 0 et n sont distinctes ($n \geq 2$). Les sous-espaces propres associés à

des valeurs propres distinctes sont en somme directe; si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A , on a donc

$$\sum_{k=1}^r \dim E_{\lambda_k} \leq n.$$

Comme $\dim E_n + \dim E_0 \geq (n-1) + 1 = n$, on obtient $\dim E_0 = 1$ et aucune autre valeur propre ne peut exister (son sous-espace propre serait de dimension au moins 1).

Conclusion

$\dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1$; le spectre de A est $\{0, n\}$, avec $E_0 = \text{Vect}(B)$ et

$$E_n = \left\{ X : \sum_{j=1}^n x_j = 0 \right\}$$

(hyperplan de dimension $n - 1$).

Question 3.4.1.e

Méthode 1 — Lecture directe de l'équation aux éléments propres.

W vecteur propre associé à n signifie $AW = nW$, soit $(A - nI_n)W = -JW = 0$. La première ligne de $-JW$ est

$$-\sum_{i=1}^n w_i,$$

donc

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

Méthode 2 — Orthogonalité des sous-espaces propres d'une matrice symétrique.

A est symétrique réelle, donc l'endomorphisme φ est symétrique pour le produit scalaire canonique (sa matrice dans la base orthonormale canonique est symétrique); ses sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Ainsi $W \in E_n$ et $B \in E_0$ vérifient

$$\langle B, W \rangle = {}^tBW = \sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

Comparaison : la méthode 1 utilise la forme explicite de A ; la méthode 2 n'utilise que la symétrie de A et le fait que B dirige E_0 , et se généralise à toute matrice symétrique.

Conclusion

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

Question 3.4.1.f

On construit une base orthonormale de vecteurs propres en concaténant une base orthonormale de E_n et le vecteur normé $\frac{B}{\sqrt{n}}$.

E_n , muni de la restriction du produit scalaire canonique, est un espace euclidien de dimension $n - 1 \geq 1$: il admet une base orthonormale $(W_1, \dots, W_{n-1})$. Posons $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}B$; comme ${}^tBB = n$, $\|W_n\| = 1$.

D'après 3.4.1.e, pour $i \leq n - 1$, $\langle W_i, B \rangle = 0$, donc $\langle W_i, W_n \rangle = 0$. La famille $(W_1, \dots, W_n)$ est orthonormale, donc libre; elle comporte n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Soit P la matrice dont les colonnes sont $W_1, \dots, W_n$. Le coefficient (i, j) de ${}^tPP$ est ${}^tW_iW_j = \langle W_i, W_j \rangle$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon : ${}^tPP = I_n$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Comme $AW_i = nW_i$ pour $i \leq n-1$ et $AW_n = 0$, on a $AP = PD$ avec :

$$D = \text{diag}(n, \dots, n, 0)$$

($n-1$ coefficients égaux à n , puis 0), d'où $P^{-1}AP = D$. La dernière colonne de P est $\frac{1}{\sqrt{n}}B$, proportionnelle à B .

Conclusion

il existe P inversible, de dernière colonne proportionnelle à B , telle que ${}^tP = P^{-1}$ et $P^{-1}AP = D = \text{diag}(n, \dots, n, 0)$.

Remarque : pour toute matrice P satisfaisant ces conditions, les $n-1$ premières colonnes sont des vecteurs propres associés à n et la dernière, de norme 1 (voir 3.4.1.g), vaut $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}B$.

Question 3.4.1.g

Les coefficients de ${}^tP$ sont $p_{ij} = \text{coefficient}(j, i)$ de P : la ligne i de ${}^tP$ est formée des coordonnées de la colonne i de P , notée W_i .

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$: la relation $AP = PD$ donne $AW_i = nW_i$ avec $W_i \neq 0$ (P inversible), donc W_i est un vecteur propre associé à n , et d'après 3.4.1.e :

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$: ${}^tPP = I_n$ donne, pour le coefficient diagonal (i, i) , ${}^tW_i W_i = 1$, soit :

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1$$

Conclusion

les deux familles d'égalités sont établies.

Question 3.4.2.a

On effectue le changement de variable $X = PY$, puis on calcule directement ${}^tXAX$.

Première égalité. Comme $P^{-1} = {}^tP$, on a $P {}^tP = I_n$, donc $PY = P {}^tPX = X$. Alors, avec ${}^t(PY) = {}^tY {}^tP$:

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tXAX = \frac{1}{n} {}^tY ({}^tPAP) Y = \frac{1}{n} {}^tY (P^{-1}AP) Y = \frac{1}{n} {}^tY DY$$

Seconde égalité. Notons

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Méthode 1 — Calcul direct avec $A = nI_n - J$.

JX est la colonne dont tous les coefficients valent

$$\sum_{j=1}^n x_j = n\bar{x},$$

donc $JX = n\bar{x}B$ et ${}^tXJX = n\bar{x} {}^tXB = n\bar{x} \cdot n\bar{x} = n^2\bar{x}^2$. D'où :

$$q(X) = \frac{1}{n} (n {}^tXX - {}^tXJX) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Par ailleurs, en développant :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Méthode 2 — À partir de l'écriture ${}^tYDY$.

Notons $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Comme $D = \text{diag}(n, \dots, n, 0)$,

$${}^tYDY = n \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = n ({}^tYY - y_n^2).$$

Or

$${}^tYY = {}^tXP {}^tPX = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

et y_n est le produit de la dernière ligne de ${}^tP$, c'est-à-dire de la transposée de la dernière colonne $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}B$ de P , par X :

$$y_n = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j = \pm \sqrt{n} \bar{x}.$$

Ainsi :

$$q(X) = \frac{1}{n} \cdot n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Comparaison : la méthode 1 repose sur la structure simple $A = nI_n - J$; la méthode 2 exploite le fait que P conserve la norme et que sa dernière colonne est dirigée par B , ce qui éclaire la géométrie : $q(X)$ est le carré de la distance de X à la droite $\text{Vect}(B)$.

Conclusion

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tY DY = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2.$$

Question 3.4.2.b

Avec $Y = (y_1, \dots, y_n) = {}^tPX$, on a

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j$$

par définition du produit matriciel et des p_{ij} . Comme $D = \text{diag}(n, \dots, n, 0)$:

$${}^tY DY = \sum_{i=1}^{n-1} n y_i^2 + 0 \cdot y_n^2 = n \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

donc

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tY DY = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

Conclusion

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2.$$

Question 3.4.3.a

On utilise la stabilité de la loi normale par multiplication par un réel non nul et par somme de variables indépendantes, puis la linéarité de l'espérance et la variance d'une somme de variables indépendantes.

Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $K_i = \{j : p_{ij} \neq 0\}$. D'après 3.4.1.g,

$$\sum_j p_{ij}^2 = 1,$$

donc $K_i \neq \emptyset$, et

$$Y_i = \sum_{j \in K_i} p_{ij} X_j.$$

Pour $j \in K_i$, $p_{ij} X_j$ suit une loi normale (rappel du préambule, $p_{ij} \neq 0$). Ces variables, fonctions respectivement des X_j mutuellement indépendantes, sont mutuellement indépendantes. Par récurrence sur le nombre de termes, en utilisant le lemme des coalitions (une somme partielle est indépendante du terme suivant) et la stabilité par somme des lois normales indépendantes, Y_i suit une loi normale.

Espérance : par linéarité et d'après 3.4.1.g,

$$E(Y_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} E(X_j) = m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$$

Variance : les X_j étant indépendantes, leurs covariances deux à deux sont nulles, donc

$$V(Y_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 V(X_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = \sigma^2$$

Conclusion

Y_i suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$; en particulier $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

Question 3.4.3.b

Pour toute issue, appliquons les résultats de 3.4.2 à la colonne $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ des valeurs prises par les X_j . Comme

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = M_n,$$

la question 3.4.2.a donne

$$q(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

et la question 3.4.2.b donne

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} X_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

Conclusion

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

Question 3.4.3.c

On se ramène à la question 3.1.3 avec $n - 1$ variables.

Pour $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, Y_i suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (question 3.4.3.a), donc par transformation affine $\frac{Y_i}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Les Y_i étant (par hypothèse admise) mutuellement indépendantes, les $\frac{Y_i}{\sigma}$, fonctions respectives des Y_i , le sont aussi. D'après 3.4.3.b :

$$U_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2$$

La question 3.1.3, établie pour tout entier naturel non nul et toute famille de variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, s'applique avec $n - 1 \geq 1$ variables : U_n suit la loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n-1}{2} \right)$.

Conclusion

U_n suit la loi du Chi-deux à $n - 1$ degrés de liberté; sa fonction de répartition est G_{n-1} .

Question 3.4.3.d

On procède comme en 3.3.2 avec la relation $(n - 1)S_n = \sigma^2 U_n$.

Notons $d_1 = \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)$ et $d_2 = \chi_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)$, définis par 3.1.5 (avec $n - 1 \geq 1$), strictement positifs, et $d_1 < d_2$.

Par définition,

$$(n - 1)S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \sigma^2 U_n.$$

Comme $d_1, d_2, \sigma^2 > 0$:

$$\frac{(n - 1)S_n}{d_2} \leq \sigma^2 \iff \sigma^2 U_n \leq \sigma^2 d_2 \iff U_n \leq d_2$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(n - 1)S_n}{d_1} \iff \sigma^2 d_1 \leq \sigma^2 U_n \iff d_1 \leq U_n$$

Ces équivalences étant vraies pour toute issue :

Conclusion

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right].$$

Question 3.4.3.e

D'après 3.4.3.c, U_n est à densité de fonction de répartition G_{n-1} , donc $P(U_n = d_1) = 0$ et, avec 3.4.3.d :

$$P(d_1 \leq U_n \leq d_2) = G_{n-1}(d_2) - G_{n-1}(d_1) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

Conclusion

la probabilité de l'événement

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

est $1-\alpha$: on dispose d'un intervalle de confiance de σ^2 au niveau $1-\alpha$ sans connaître m , au prix d'un degré de liberté en moins par rapport à 3.3.

Relevé des adaptations

Problème 3, rappels initiaux : ajout de la définition de la loi $\gamma(\nu)$ (forme ν , taux 1) et de la loi gamma de paramètres (b, ν) par sa densité $f_{b,\nu}$. Justification : le programme actuel ne connaît que les lois gamma de taux 1 ; les paramètres $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(2, \frac{n}{2}\right)$ de l'énoncé original (paramètre d'échelle 2, paramètre de forme) doivent donc être définis dans l'énoncé. Les questions 3.1.2, 3.1.3 et 3.1.5 sont inchangées ; le corrigé établit le lien $X \sim \Gamma(b, \nu) \iff \frac{X}{b} \sim \gamma(\nu)$.

Problème 3, définition de Y_n (3.1) : rectification de la coquille de l'original, qui écrit

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2;$$

l'énoncé adapté donne

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Problème 3, hypothèse sur les X_i : la notation $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de l'original est remplacée par $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec la précision « d'espérance m et d'écart-type $\sigma > 0$ ». Justification : notation du programme actuel ; la condition $\sigma > 0$ est nécessaire aux divisions par σ^2 .

Problème 3, rappel sur les estimateurs : les définitions de l'original (« estimateur » si $E(Z_n) \rightarrow \theta$, « convergent » si $V(Z_n) \rightarrow 0$) sont remplacées par celles du programme actuel (estimateur : fonction de l'échantillon ne dépendant pas du paramètre ; biais ; sans biais ; convergent : convergence en probabilité vers θ). La question 3.2.1 est corrigée avec ces définitions, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Question 3.3 (préambule) : ajout de « Soit α un réel de l'intervalle $]0, 1[$ ». Justification : le niveau α intervenant en 3.3.2 et 3.4.3.d-e n'est pas défini dans l'original (oubli d'énoncé) ; sans cette hypothèse, $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ et $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ ne sont pas définis.

Question 3.2.2.c : l'énoncé est conservé ; le corrigé précise que l'estimateur sans biais $\frac{n}{n-1}V_n$ n'est défini que pour $n \geq 2$.

La loi du Chi-deux n'est pas supposée connue : elle est définie dans l'énoncé (question 3.1.5) et toutes ses propriétés utilisées sont établies dans le corrigé.