



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2002

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

1. EXERCICE.

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Id_E désigne l'identité de E et Θ l'endomorphisme nul.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à l'entier n .

Si g est un endomorphisme de E , on définit g^n par : $g^0 = Id_E$ et $g^n = g^{n-1} \circ g$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$, on note $P(g)$ l'endomorphisme de E égal à :

$$P(g) = a_0 Id_E + a_1 g + \dots + a_p g^p$$

On rappelle que pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

Puissance d'un endomorphisme.

On désigne par T le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation :

$$T(f) = \Theta$$

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de T . Déterminer le polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $T = (X - 1)Q$ et vérifier que Q n'admet aucune racine réelle.
2. On désigne par φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de P par T .
 - a. Rappeler le théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes.
 - b. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 - c. L'endomorphisme φ est-il injectif? Est-il surjectif?
3. On note L_1, L_2, L_3 les polynômes définis par :

$$L_1(X) = X - 1, \quad L_2(X) = X(X - 1), \quad L_3(X) = X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$$

- a. Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) appartenant à $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

Vérifier que $c_n = \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer a_0 et b_0 , puis établir que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}b_n$$

On pourra commencer par montrer que $\varphi(X^{n+1}) = \varphi(X\varphi(X^n))$, et remarquer que $T = 3(X - 1)L_3$.

c. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$$

d. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = (b_n - a_n)^2 + 2a_n^2$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$. En déduire la convergence des suites (a_n) , (b_n) , (c_n) vers des réels respectifs a, b, c que l'on déterminera.

4. On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

a. Montrer que $h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E)$.

b. Prouver enfin que h est un projecteur.

2. EXERCICE.

On se propose ici d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où x est un réel quelconque et a_n un réel défini par :

$$a_n = \int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2} \right]^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.1. Étude de l'absolue convergence de la série.

1. Prouver que pour tout n entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$$

2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur x , pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

2.2. Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.

On suppose maintenant $-1 \leq x < 1$.

1. Pour $t \in [0, 1]$, montrer que :

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x)$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{2 dt}{2 - x - xt^2}$

3. On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2 dt}{2 - x - xt^2}$$

Montrer que pour tous les entiers naturels n :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

4. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $u_n(x)$.
5. Donner la valeur de a_0 , puis établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k + 3)a_{k+1} = 1 + (k + 1)a_k$$

6. Écrire en Python une fonction `approx_f(x, p)` permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, le réel x (avec $-1 \leq x < 1$) et l'entier p étant supposés donnés.

3. PROBLÈME.

Deux biens C_1 et C_2 indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché.

On appelle « panier de biens » tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'ensemble D suivant :

$$D = \{(x, y) \text{ tels que } 0 \leq x, 0 \leq y \leq 5, 2x + 3y \leq 19\}$$

x, y désignent respectivement les quantités du bien C_1 et du bien C_2 qui peuvent être physiquement consommées par un agent économique.

Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.

On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.

Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble B des couples (x, y) de D tels que $x + y \leq 8$.

Les préférences de ce consommateur sur B sont définies de la façon suivante :

(x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si

$$(y - 3) \exp(x + 2) \geq (y' - 3) \exp(x' + 2)$$

L'application u définie sur B par :

$$u(x, y) = (y - 3) \exp(x + 2), \quad \text{pour } (x, y) \in B$$

s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

3.1. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

- a. (x, y) est préféré ou indifférent à (x, y) .
- b. Si (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') et si (x', y') est préféré ou indifférent à (x'', y'') alors (x, y) est préféré ou indifférent à (x'', y'') .
- c. (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') ou (x', y') est préféré ou indifférent à (x, y) .

3.2. Courbes d'indifférence.

- 1. Représenter graphiquement l'ensemble B dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de B .
- 2. Dans ce qui suit, pour m réel, on désigne par A_m l'ensemble défini par :

$$A_m = \{(x, y) \in B \text{ tel que } u(x, y) = m\}$$

- a. Déterminer la fonction numérique f_m telle que, pour m fixé, on ait, pour tout élément (x, y) de A_m , $y = f_m(x)$.
- b. Étudier et représenter dans le même repère que celui de la question 3.2.1 la fonction $y = f_m(x)$ pour $m = -8$, $m = 0$, $m = 8$.

$$(e^{-2} \approx 0,14, e^{-3} \approx 0,05, e^{-4} \approx 0,02, e^{-5} \approx 0,007, e^{-6} \approx 0,002, e^{-7} \approx 0,001)$$

- c. Déterminer m_0 pour que la courbe représentative de $y = f_{m_0}(x)$ soit tangente à la droite (T) d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

Représenter $y = f_{m_0}(x)$ sur le graphique.

$$(e^3 \approx 20,09, e^2 \approx 7,39, e \approx 2,72)$$

3.3. Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. On admet que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est borné.
2. Justifier l'existence d'un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x, y) de B .
3. On note $\overset{\circ}{B}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples solutions du système :

$$0 < x, \quad 0 < y < 5, \quad 2x + 3y < 19, \quad x + y < 8$$

Montrer que u n'admet pas d'extremum local sur $\overset{\circ}{B}$.

4. On étudie dans cette question le maximum de la fonction u sur B , sous la contrainte

$$2x + 3y = 19$$

- a. Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction g de la variable réelle, définie sur $[2, 5]$ par :

$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3} \exp(x + 2)$$

b. Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

5. Étudier de même la recherche du maximum de la fonction u sur B , sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Dédire de ce qui précède la valeur du couple (x_0, y_0) .

3.4. Étude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien C_1 .

Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, le numéro X_i affecté au i -ème consommateur interrogé est une variable aléatoire.

Les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :

- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.
- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier N , avec N supérieur ou égal à 2.

Enfin, on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

3.4.1. Partie 1

On suppose que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi, une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$.

Pour tous entiers naturels n et j , $\binom{n}{j}$ désigne le coefficient binomial, avec par convention : $\binom{n}{j} = 0$ pour $j > n$.

Étude d'un cas particulier.

1. Pour cette question seulement, $N = 3$.

a. Donner la loi des variables T_1 et T_2 .

b. Calculer leur espérance et leur variance.

Étude de la loi de T_1 .

1. Quel est l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_1 ?

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, la probabilité de l'événement $\{T_1 > n\}$ est donnée par :

$$P(T_1 > n) = \frac{\binom{N}{n}}{N^n}$$

En déduire la loi de T_1 .

3. Montrer que l'espérance de T_1 est donnée par :

$$E(T_1) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

4. De même, prouver que :

$$E(T_1^2 - T_1) = 2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1}$$

En déduire la variance $V(T_1)$ de T_1 en fonction de N .

5. Donner les limites de $E(T_1)$ et $V(T_1)$ lorsque N tend vers l'infini.

Étude de la loi de T_2 .

1. Montrer que, pour tous entiers naturels r, n :

$$\sum_{k=0}^r \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1}$$

2. Quel est l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_2 ?

3. Par récurrence sur l'entier n inférieur ou égal à N , prouver que :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq j) = \frac{\binom{j}{n}}{N^n}$$

4. En déduire la loi de T_2 .

5. Quelle est votre conclusion ?

3.4.2. Partie 2

On suppose que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires à densité qui suivent une loi uniforme sur le segment $[1, N]$.

1. Montrer que la densité de probabilité f_n d'une somme de n variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$, est donnée sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Prouver que si la variable X suit une loi uniforme sur le segment $[1, N]$, alors la variable Y , définie par $X = 1 + (N-1)Y$, suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
3. En déduire la loi de T_2 .