



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b .

1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

2) Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h , définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{-bt} \text{ pour } t > 0 \text{ et } h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{at} \text{ pour } t \leq 0.$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Établir l'égalité $P(Z \leq s) = 1 - \frac{b e^{-as} + a e^{-bs}}{a+b}$.

4) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 2

Soient n un entier ≥ 2 et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I est la matrice identité de E . On note ${}^t A$ la transposée d'un élément A de E . Si $A = (a_{ij})$ appartient à E , on appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$ la somme $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ des éléments diagonaux de A .

On considère l'application g de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à deux matrices A et B de E , fait correspondre le réel $g(A, B) = \text{Tr}({}^t A B)$.

1) Montrer que l'application Tr qui, à tout élément de E , associe sa trace, est une forme linéaire sur E .

2) a) Soit M une matrice de E . Montrer que $\text{Tr}(M) = \text{Tr}({}^t M)$.

- b) En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E , on a $g(A, B) = g(B, A)$.
- 3) Soit A un élément de E . Montrer que $g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A .
- 4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E .
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :
- $f(e_1) = e_n$ et, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, $f(e_k) = e_{k-1}$.
- 5) a) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que $n = 4$.

- 6) Calculer U^2 et U^3 et montrer que (I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g .
- 7) On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U^2, U^3) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F .

Problème

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p . Un joueur dispose initialement d'une fortune a . On note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du n -ième lancer. On convient que F_0 est la variable aléatoire certaine égale à a . On obtient la fortune F_{n+1} à partir de F_n de la manière suivante :

avant le lancer $n + 1$, le joueur mise une partie X_n , entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. Si le lancer $n + 1$ fait apparaître pile, la fortune F_{n+1} est

égale à $2X_n$; s'il fait apparaître face, la fortune F_{n+1} est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On suppose de plus que, pour tout entier $n \geq 0$, le résultat du lancer $n + 1$ est indépendant du couple (F_n, X_n) : pour tous entiers i et k ,

$$P(\text{pile au lancer } n + 1 \cap \{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}) = p P(\{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}).$$

On étudie, dans ce problème, deux exemples (parties 1 et 2) dans lesquels les mises X_n sont des variables aléatoires. À cet effet, on associe aux variables aléatoires F_n des polynômes G_n dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

$E(X)$ et $V(X)$ désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X .

Résultats préliminaires

- 1) Pour tout entier positif ou nul n , montrer que F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$.

Pour tout entier positif ou nul n , on définit le polynôme G_n par :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) x^k.$$

- 2) a) Calculer $G_n(1)$.
- b) Que représente concrètement $G_n(0)$? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n(0)$ est croissante et convergente.
- c) Montrer que $G'_n(1) = \frac{E(F_n)}{2}$. Établir de même que $V(F_n) = 4G''_n(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2$.

3) Montrer que le polynôme G_n est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Première partie

Soit n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de X_n sachant $\{F_n = 2k\}$ est une loi uniforme sur $\{0, 1, 2, \dots, 2k-1, 2k\}$.

1) Établir, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2k$, l'égalité

$$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k).$$

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer $n+1$.)

2) En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P(F_{n+1} = 2j)$.

3) Montrer que pour x appartenant à $[0, 1[$:

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)(x-1)} P(F_n = 2k).$$

4) En déduire, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, l'égalité :

$$(1-x) G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2) dt \quad (1)$$

5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geq 0$, on a $E(F_n) = a$.

Deuxième partie (Les deux sous-parties A et B sont indépendantes)

On suppose maintenant que la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $\{F_n = 2k\}$ est une loi binomiale de paramètres $2k$ et r , r étant un réel de $]0, 1[$.

A) Simulation informatique de l'expérience

On considère le programme Python suivant :

Python

```
import numpy.random as rd

def mise(m, s):
    ...
    ...
    return ...

n = int(input("n = "))
p = float(input("p = "))
r = float(input("r = "))
a = int(input("a = "))
F = a
for i in range(1, n + 1):
    X = mise(F, r)
    if rd.random() < p:
        ...
    ...
```

La commande `rd.random()` est une fonction sans argument. À son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$; des appels successifs fournissent des nombres indépendants. La commande `input` affiche le message indiqué et renvoie le texte saisi par l'utilisateur, converti ici en entier par `int` ou en réel par `float`.

La fonction `mise` est une fonction qui simule une loi binomiale de paramètres m et s . Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m , la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binomiale de paramètres m et s . Dans cette fonction, on n'utilisera pas la commande `rd.binomial`, mais uniquement la commande `rd.random`.

1) Rédiger les lignes manquantes dans la définition de la fonction `mise`.

- 2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_1, \dots, F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

B) Étude théorique

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + (1-p)(1-r)^2$ et $B = 2[pr + (1-p)(1-r)]$.

- 1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$G_{n+1}(x) = p G_n[(xr + 1 - r)^2] + (1-p) G_n[(x - xr + r)^2] \quad (2)$$

Dans les questions 2 et 3, on suppose que $p = \frac{1}{2}$.

On considère le trinôme Q défini par $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$, et la suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q(u_n)$.

- 2) a) Montrer, pour tout réel x , l'égalité : $Q(x) = x + A(x-1)^2$.

b) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q .

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

- 3) a) Montrer, en utilisant (2) et la convexité de G_n , que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a l'inégalité : $G_{n+1}(x) \geq G_n[Q(x)]$.

b) Établir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité : $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n)$. Conclure.

On revient au cas général p quelconque.

4) a) Montrer à l'aide de (2) que la suite $(E(F_n))_n$ est géométrique de raison B .

b) En posant $p' = \frac{1}{2} - p$ et $r' = \frac{1}{2} - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r .

c) Montrer que si la suite $(E(F_n))_n$ tend vers 0, alors la suite $(P(F_n = 0))_n$ tend vers 1.

5) a) Pour tout entier $n \geq 0$, établir à l'aide de (2) une relation entre $G''_{n+1}(1)$, $G''_n(1)$ et $G'_n(1)$.

b) Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{G''_n(1)}{B^n}$ est arithmético-géométrique.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une expression explicite de $G''_n(1)$ en fonction de a, n, A, B .

On suppose, dans cette dernière question, que $p = r = \frac{1}{3}$.

6) a) Calculer les trois réels A, B, B^2 et en déduire un équivalent de $V(F_n)$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la probabilité $P(F_n < 2^{n/4}a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités : $2^{1/4} > \frac{10}{9}$ et $3\sqrt{2} > 4$.)