



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2001

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

Rappel : une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, 0[$, pour fonction de répartition $t \mapsto 1 - e^{-\lambda t}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, 0[$, et pour espérance $\frac{1}{\lambda}$.

- 1) Il s'agit de calculer $P(-X \leq t)$ pour tout réel t , puis de dériver la fonction obtenue là où c'est possible.

Pour tout réel t , $P(-X \leq t) = P(X \geq -t) = 1 - P(X < -t) = 1 - P(X \leq -t)$, car X est à densité donc $P(X = -t) = 0$.

Si $t \geq 0$, alors $-t \leq 0$ et $P(X \leq -t) = 0$ (pour $t > 0$ car $X \geq 0$ presque sûrement, et pour $t = 0$ car $P(X \leq 0) = 1 - e^0 = 0$). Donc $F_{-X}(t) = 1$.

Si $t < 0$, alors $-t > 0$ et $P(X \leq -t) = 1 - e^{at}$, donc $F_{-X}(t) = e^{at}$.

Ainsi :

$$F_{-X}(t) = e^{at} \text{ si } t < 0 \text{ et } F_{-X}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0.$$

La fonction F_{-X} est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et $\lim_{t \rightarrow 0^-} e^{at} = 1 = F_{-X}(0)$: elle est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc $-X$ est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant F_{-X} hors de 0 et en choisissant une valeur arbitraire en 0 :

$$f_{-X}(t) = a e^{at} \text{ si } t \leq 0 \text{ et } f_{-X}(t) = 0 \text{ si } t > 0.$$

Conclusion

$-X$ a pour fonction de répartition F_{-X} ci-dessus et pour densité f_{-X} .

- 2) On écrit $Y - X = Y + (-X)$ et on applique le théorème de convolution.

Hypothèses. X et Y sont indépendantes, donc Y et $-X$ sont indépendantes (une fonction de X et une fonction de Y sont indépendantes). Y admet la densité f_Y

($f_Y(u) = be^{-bu}$ pour $u \geq 0$, 0 sinon), bornée par b ; $-X$ admet la densité f_{-X} , bornée par a . Le théorème du cours assure alors que, si la fonction h définie par

$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u) f_{-X}(t-u) du$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors h est une densité de $Y + (-X)$.

Calcul. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le produit $f_Y(u)f_{-X}(t-u)$ est non nul seulement si $u \geq 0$ et $t-u \leq 0$, c'est-à-dire si $u \geq \max(0, t)$. Notons $m = \max(0, t)$. Alors :

$$h(t) = \int_m^{+\infty} b e^{-bu} a e^{a(t-u)} du = ab e^{at} \int_m^{+\infty} e^{-(a+b)u} du.$$

Pour $M > m$, $\int_m^M e^{-(a+b)u} du = \frac{e^{-(a+b)m} - e^{-(a+b)M}}{a+b}$, qui tend vers $\frac{e^{-(a+b)m}}{a+b}$ quand $M \rightarrow +\infty$ car $a+b > 0$. L'intégrale converge et $h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{at-(a+b)m}$.

Si $t > 0$: $m = t$ et $h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{at-(a+b)t} = \frac{ab}{a+b} e^{-bt}$.

Si $t \leq 0$: $m = 0$ et $h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{at}$.

La fonction h est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \frac{ab}{a+b} = h(0)$: h est continue sur $\mathbb{R}$.

Vérification (facultative) : $h \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{ab}{a+b} e^{at} dt + \int_0^{+\infty} \frac{ab}{a+b} e^{-bt} dt = \frac{ab}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Conclusion

$Y - X$ admet la densité h donnée par l'énoncé.

3) On exprime l'événement $\{Z \leq s\}$ à l'aide de $Y - X$ et on intègre h .

Soit $s \geq 0$. Comme $Z = |X - Y| = |Y - X|$, on a $\{Z \leq s\} = \{-s \leq Y - X \leq s\}$. La variable $Y - X$ étant à densité h :

$$\begin{aligned} P(Z \leq s) &= \int_{-s}^s h(t) dt = \frac{ab}{a+b} \left(\int_{-s}^0 e^{at} dt + \int_0^s e^{-bt} dt \right) \\ &= \frac{ab}{a+b} \left(\frac{1 - e^{-as}}{a} + \frac{1 - e^{-bs}}{b} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$P(Z \leq s) = \frac{b(1 - e^{-as}) + a(1 - e^{-bs})}{a+b} = \frac{a+b - b e^{-as} - a e^{-bs}}{a+b}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } s \geq 0, \quad P(Z \leq s) = 1 - \frac{b e^{-as} + a e^{-bs}}{a+b}.$$

- 4) a) On étudie la fonction de répartition F_Z de Z et on applique la caractérisation des variables à densité.

Pour $s < 0$, $\{Z \leq s\} = \emptyset$ car $Z \geq 0$, donc $F_Z(s) = 0$. Pour $s \geq 0$, $F_Z(s)$ est donné par la question 3.

F_Z est continue sur $] -\infty, 0[$ (constante) et sur $[0, +\infty[$ (combinaison d'exponentielles).

En 0 : $F_Z(0) = 1 - \frac{b+a}{a+b} = 0 = \lim_{s \rightarrow 0^-} F_Z(s)$. Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Par conséquent Z est une variable à densité. Pour $s > 0$:

$$F'_Z(s) = -\frac{-ab e^{-as} - ab e^{-bs}}{a+b} = \frac{ab}{a+b} (e^{-as} + e^{-bs}).$$

Conclusion

une densité de Z est f_Z définie par $f_Z(s) = 0$ si $s \leq 0$ et $f_Z(s) = \frac{ab}{a+b} (e^{-as} + e^{-bs})$ si $s > 0$.

Remarque : pour $s > 0$, $f_Z(s) = h(s) + h(-s)$, ce qui est cohérent avec $Z = |Y - X|$.

b) Il faut justifier la convergence (absolue) de $\int_{-\infty}^{+\infty} s f_Z(s) ds$, puis la calculer.

Méthode 1 — Calcul direct de l'intégrale.

La fonction $s \mapsto s f_Z(s)$ est nulle sur $] -\infty, 0]$ et positive sur $]0, +\infty[$: la convergence absolue équivaut à la convergence. Pour $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} s e^{-\lambda s} ds$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$. En effet, pour $M > 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, M]$ ($u(s) = s$, $v(s) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda s}$, de classe C^1) donne :

$$\int_0^M s e^{-\lambda s} ds = \left[-\frac{s}{\lambda} e^{-\lambda s} \right]_0^M + \frac{1}{\lambda} \int_0^M e^{-\lambda s} ds = -\frac{M}{\lambda} e^{-\lambda M} + \frac{1 - e^{-\lambda M}}{\lambda^2},$$

qui tend vers $\frac{1}{\lambda^2}$ quand $M \rightarrow +\infty$ par croissances comparées.

Par linéarité des intégrales convergentes, Z admet une espérance et :

$$E(Z) = \frac{ab}{a+b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}.$$

Méthode 2 — Reconnaître des densités exponentielles.

On écrit, pour $s > 0$, $f_Z(s) = \frac{b}{a+b} (a e^{-as}) + \frac{a}{a+b} (b e^{-bs})$. Les fonctions $s \mapsto s a e^{-as}$ et $s \mapsto s b e^{-bs}$ sont, sur $]0, +\infty[$, les intégrandes définissant l'espérance de lois exponentielles de paramètres a et b : leurs intégrales convergent et valent $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Par linéarité :

$$E(Z) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab(a+b)}.$$

La méthode 1 est purement calculatoire ; la méthode 2 évite tout calcul en exploitant les

résultats connus sur les lois usuelles, ce qui est utile dès qu'une densité est combinaison linéaire de densités connues.

Conclusion

$$Z \text{ admet une espérance et } E(Z) = \frac{a^2 + b^2}{ab(a + b)}.$$

Exercice 2

- 1) L'application Tr est à valeurs réelles. Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les coefficients diagonaux de $\lambda A + B$ sont $\lambda a_{ii} + b_{ii}$, donc :

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

Conclusion

Tr est une forme linéaire sur E .

- 2) a) Soit $M = (m_{ij})$. Le coefficient d'indice (i, i) de ${}^t M$ est m_{ii} : M et ${}^t M$ ont les mêmes coefficients diagonaux.

Conclusion

$$\text{Tr}({}^t M) = \text{Tr}(M).$$

- b) Soient $A, B \in E$. D'après 2a appliquée à $M = {}^t A B$ et comme

$${}^t({}^t A B) = {}^t B {}^t({}^t A) = {}^t B A :$$

$$g(A, B) = \text{Tr}({}^t A B) = \text{Tr}({}^t({}^t A B)) = \text{Tr}({}^t B A) = g(B, A).$$

Conclusion

g est symétrique.

- 3) Plus généralement, soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans E . Le coefficient d'indice (j, j) de ${}^tAB$ est

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

(le coefficient (j, i) de ${}^tA$ est a_{ij}). Donc :

$$g(A, B) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Avec $B = A$:

$$g(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

Conclusion

$g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A .

- 4) Il faut vérifier que g est bilinéaire, symétrique, définie positive.

Symétrie : question 2b.

Linéarité à droite : pour $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tA(\lambda B + C) = \lambda {}^tAB + {}^tAC$, et par linéarité de la trace (question 1), $g(A, \lambda B + C) = \lambda g(A, B) + g(A, C)$.

Linéarité à gauche : elle découle de la linéarité à droite et de la symétrie.

Positivité : $g(A, A)$ est une somme de carrés (question 3), donc $g(A, A) \geq 0$.

Caractère défini : si $g(A, A) = 0$, la somme de réels positifs

$$\sum a_{ij}^2$$

est nulle, donc tous les a_{ij} sont nuls et $A = 0$.

Conclusion

g est un produit scalaire sur E .

5) a) Méthode 1 — Image d'une base.

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et l'image de la base $\mathcal{B}$ est la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$, qui contient exactement les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans un autre ordre : c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Un endomorphisme qui envoie une base sur une base est bijectif (son image contient une famille génératrice, donc il est surjectif, et en dimension finie un endomorphisme surjectif est bijectif par le théorème du rang).

Méthode 2 — Construction de la réciproque.

Soit φ l'endomorphisme défini par $\varphi(e_k) = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\varphi(e_n) = e_1$. Alors $f \circ \varphi(e_k) = f(e_{k+1}) = e_k$ pour $k \leq n-1$ et $f \circ \varphi(e_n) = f(e_1) = e_n$; de même $\varphi \circ f(e_1) = \varphi(e_n) = e_1$ et $\varphi \circ f(e_k) = \varphi(e_{k-1}) = e_k$ pour $k \geq 2$. Les applications linéaires $f \circ \varphi$ et $\varphi \circ f$ coïncident avec l'identité sur une base, donc sont égales à l'identité.

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 fournit explicitement $f^{-1} = \varphi$, ce qui servira en 5b.

Conclusion

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) La k -ième colonne de U contient les coordonnées de $f(e_k)$: la première colonne est celle de e_n et, pour $2 \leq k \leq n$, la k -ième colonne est celle de e_{k-1} . Ainsi $U = (u_{ij})$ avec $u_{n1} = 1$, $u_{k-1,k} = 1$ pour $2 \leq k \leq n$, et tous les autres coefficients nuls.

Calcul de U^n . Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Par récurrence immédiate sur m , $f^m(e_k) = e_{k-m}$ pour $0 \leq m \leq k-1$; en particulier $f^{k-1}(e_k) = e_1$, donc $f^k(e_k) = f(e_1) = e_n$. En appliquant la même formule à e_n : $f^m(e_n) = e_{n-m}$ pour $0 \leq m \leq n-1$. Avec $m = n-k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$f^n(e_k) = f^{n-k}(f^k(e_k)) = f^{n-k}(e_n) = e_k.$$

f^n et id coïncident sur la base $\mathcal{B}$, donc $f^n = \text{id}$. Comme la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ est U^n , on obtient $U^n = I$.

Inverse de U .

Méthode 1 — Produit ${}^tU U$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de U . Le coefficient (i, j) de ${}^tU U$ est

$$\sum_{k=1}^n u_{ki} u_{kj},$$

produit scalaire canonique de C_i et C_j . Or les colonnes de U sont les colonnes $E_n, E_1, \dots, E_{n-1}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, deux à deux distinctes : ce produit vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc ${}^tU U = I$. La matrice carrée U admet un inverse à gauche, donc elle est inversible et $U^{-1} = {}^tU$.

Méthode 2 — Matrice de la réciproque.

D'après 5a (méthode 2), $f^{-1} = \varphi$, de matrice $M = (m_{ij})$ avec $m_{k+1,k} = 1$ pour $1 \leq k \leq n-1$, $m_{1n} = 1$ et les autres coefficients nuls. Or le coefficient (i, j) de ${}^tU$ est u_{ji} : il vaut 1 exactement pour $(i, j) = (k, k-1)$ avec $2 \leq k \leq n$, c'est-à-dire $(i, j) = (k+1, k)$ avec $1 \leq k \leq n-1$, et pour $(i, j) = (1, n)$. Donc ${}^tU = M$, matrice de f^{-1} , d'où $U^{-1} = {}^tU$.

La méthode 1 repose sur une propriété des colonnes de U (orthonormalité) et se généralise à toute matrice de permutation ; la méthode 2 est plus élémentaire.

Conclusion

$$U^n = I \text{ et } U^{-1} = {}^tU.$$

6) Ici $n = 4$. On a :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U^2 est la matrice de f^2 : $f^2(e_1) = f(e_4) = e_3$, $f^2(e_2) = f(e_1) = e_4$, $f^2(e_3) = f(e_2) = e_1$, $f^2(e_4) = f(e_3) = e_2$. U^3 est la matrice de f^3 : $f^3(e_1) = f(e_3) = e_2$, $f^3(e_2) = f(e_4) = e_3$,

$f^3(e_3) = f(e_1) = e_4$, $f^3(e_4) = f(e_2) = e_1$. D'où :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $U^3 = {}^tU$, ce qui est cohérent avec $U^4 = I$ et $U^{-1} = {}^tU$.

Orthogonalité.

Méthode 1 — Positions des coefficients non nuls.

D'après le calcul de la question 3,

$$g(A, B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

Les coefficients égaux à 1 se trouvent aux positions suivantes (les autres sont nuls) :

$I : (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4); U : (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1); U^2 : (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2);$
 $U^3 : (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3).$

Ces quatre ensembles de positions sont deux à deux disjoints : pour deux matrices distinctes de la famille, chaque produit $a_{ij}b_{ij}$ est nul, donc leur produit scalaire est nul.

Méthode 2 — Utilisation de la trace.

Pour $0 \leq i < j \leq 3$, ${}^t(U^i) = ({}^tU)^i = (U^{-1})^i = U^{-i}$, donc
 $g(U^i, U^j) = \text{Tr}(U^{-i}U^j) = \text{Tr}(U^{j-i})$ avec $j - i \in \{1, 2, 3\}$. Les matrices U, U^2, U^3 ont une diagonale nulle (voir ci-dessus), donc leur trace est nulle.

La méthode 1 est un simple constat sur les coefficients ; la méthode 2 utilise la structure ($U^{-1} = {}^tU$) et se généralise à n quelconque.

Conclusion

(I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour g . De plus chacune de ces matrices a quatre coefficients égaux à 1, donc $g(U^k, U^k) = 4$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (avec $U^0 = I$).

7) La famille (I, U, U^2, U^3) est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, donc libre : c'est une base orthogonale de F , et $\left(\frac{1}{2}U^k\right)_{0 \leq k \leq 3}$ en est une base orthonormale. Le projeté orthogonal de V sur F s'écrit dans cette base :

$$W = \sum_{k=0}^3 g\left(V, \frac{1}{2}U^k\right) \frac{1}{2}U^k = \sum_{k=0}^3 \frac{g(V, U^k)}{4} U^k.$$

Calcul de $g(V, U^k)$: V n'a de coefficients non nuls (égaux à 1) que sur sa première ligne, donc $g(V, U^k)$ est la somme des coefficients de la première ligne de U^k . Chacune des matrices I, U, U^2, U^3 possède exactement un coefficient égal à 1 sur sa première ligne, donc $g(V, U^k) = 1$ pour tout k .

D'où $W = \frac{1}{4}(I + U + U^2 + U^3)$. Les positions des coefficients égaux à 1 des quatre

matrices formant une partition des 16 positions (question 6), $I + U + U^2 + U^3$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Vérification : $V - W \in F^\perp$ car

$$g(V - W, U^k) = 1 - \frac{1}{4} g(I + U + U^2 + U^3, U^k) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 0.$$

Conclusion

$$W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice dont tous les coefficients valent $\frac{1}{4}$.

Problème

Remarques préliminaires. Comme a est pair, $a_0 = \frac{a}{2}$ est un entier et $a_n = 2^{n-1}a = 2^n a_0$ est un entier pour tout $n \geq 0$; de plus $2a_n = 2^n a$ et $a_{n+1} = 2a_n$. L'énoncé indique que la mise X_n est une partie entière de la fortune : X_n prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, F_n\}$.

On note P_{n+1} l'événement « le lancer $n + 1$ donne pile » et $\overline{P_{n+1}}$ son contraire.

L'hypothèse d'indépendance du préambule donne, pour tous entiers i, k :

$$P(P_{n+1} \cap \{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}) = p P(\{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\})$$

et, par différence,

$$P(\overline{P_{n+1}} \cap \{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}) = (1 - p) P(\{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}).$$

Résultats préliminaires

- 1) On raisonne par récurrence sur n . Notons $\mathcal{H}_n$: « F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, \dots, 2a_n\}$ ».

Initialisation : $F_0 = a = 2a_0$, et $a = 2a_0$ appartient à $\{0, 2, \dots, 2a_0\}$.

Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$. Alors X_n est un entier compris entre 0 et F_n , donc $F_n - X_n$ aussi. Ainsi F_{n+1} , égal à $2X_n$ ou à $2(F_n - X_n)$, est un entier pair compris entre 0 et $2F_n \leq 4a_n = 2a_{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \geq 0$, F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$.

- 2) a) D'après la question 1, les événements $\{F_n = 2k\}$, $0 \leq k \leq a_n$, forment un système complet d'événements (certains pouvant être de probabilité nulle). Donc :

$$G_n(1) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) = 1.$$

Conclusion

$$G_n(1) = 1.$$

- b) $G_n(0)$ est le coefficient constant de G_n : $G_n(0) = P(F_n = 0)$. C'est la probabilité que le joueur soit ruiné à l'issue du n -ième lancer.

Croissance. Sur l'événement $\{F_n = 0\}$, la mise X_n est un entier compris entre 0 et 0, donc $X_n = 0$ et F_{n+1} vaut $2X_n = 0$ ou $2(F_n - X_n) = 0$: un joueur ruiné le reste. Ainsi $\{F_n = 0\} \subset \{F_{n+1} = 0\}$, et par croissance de la probabilité $P(F_n = 0) \leq P(F_{n+1} = 0)$.

Convergence. La suite $(G_n(0))$ est croissante et majorée par 1 (c'est une probabilité), donc elle converge par le théorème de la limite monotone.

Conclusion

$G_n(0) = P(F_n = 0)$ est la probabilité de ruine au temps n ; la suite $(G_n(0))$ est croissante et convergente.

c) La variable F_n est finie, donc admet des moments de tout ordre. Pour tout réel x :

$$G'_n(x) = \sum_{k=1}^{a_n} k P(F_n = 2k) x^{k-1}$$

et

$$G''_n(x) = \sum_{k=2}^{a_n} k(k-1) P(F_n = 2k) x^{k-2}.$$

En $x = 1$, et comme les termes d'indice $k = 0$ (pour G'_n) et $k \in \{0, 1\}$ (pour G''_n) sont nuls, le théorème de transfert donne :

$$G'_n(1) = \sum_{k=0}^{a_n} k P(F_n = 2k) = E\left(\frac{F_n}{2}\right) = \frac{E(F_n)}{2},$$

$$G''_n(1) = \sum_{k=0}^{a_n} k(k-1) P(F_n = 2k) = E\left(\frac{F_n}{2} \left(\frac{F_n}{2} - 1\right)\right) = \frac{E(F_n^2)}{4} - \frac{E(F_n)}{2}.$$

Donc $E(F_n^2) = 4G''_n(1) + 2E(F_n)$ et, par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(F_n) = E(F_n^2) - E(F_n)^2 = 4G''_n(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2.$$

Conclusion

$$G'_n(1) = \frac{E(F_n)}{2} \text{ et } V(F_n) = 4G''_n(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2.$$

- 3) G_n est un polynôme, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geq 0$, chaque terme $k(k-1)P(F_n = 2k)x^{k-2}$ ($k \geq 2$) est positif, donc $G''_n(x) \geq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Une fonction de classe C^2 sur un intervalle, à dérivée seconde positive, y est convexe.

Conclusion

G_n est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Première partie

Hypothèse de cette partie : pour $0 \leq k \leq a_n$ tel que $P(F_n = 2k) > 0$ et pour $0 \leq i \leq 2k$, $P_{\{F_n=2k\}}(X_n = i) = \frac{1}{2k+1}$. On en déduit, pour tout k et tout $i \in \{0, \dots, 2k\}$:

$$P(\{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k),$$

cette égalité étant aussi vraie (les deux membres sont nuls) lorsque $P(F_n = 2k) = 0$.

- 1) Soit $0 \leq j \leq 2k$. On décompose selon le résultat du lancer $n+1$ (système complet $(P_{n+1}, \overline{P_{n+1}})$).

Sur $\{F_n = 2k\} \cap P_{n+1}$, on a $F_{n+1} = 2X_n$, donc $F_{n+1} = 2j$ si et seulement si $X_n = j$. Sur $\{F_n = 2k\} \cap \overline{P_{n+1}}$, on a $F_{n+1} = 2(2k - X_n)$, donc $F_{n+1} = 2j$ si et seulement si $X_n = 2k - j$. Ainsi, par réunion disjointe :

$$\begin{aligned} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) &= P(P_{n+1} \cap \{X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\}) \\ &+ P(\overline{P_{n+1}} \cap \{X_n = 2k - j\} \cap \{F_n = 2k\}). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse d'indépendance du préambule, puis l'hypothèse de loi uniforme (avec j

et $2k - j$ dans $\{0, \dots, 2k\}$:

$$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1} + (1-p) \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1} = \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1}.$$

Conclusion

pour $0 \leq j \leq 2k$,

$$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k).$$

2) Soit $0 \leq j \leq a_{n+1}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $(\{F_n = 2k\})_{0 \leq k \leq a_n}$:

$$P(F_{n+1} = 2j) = \sum_{k=0}^{a_n} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}).$$

Si $j > 2k$, l'événement $\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}$ est impossible, car sur $\{F_n = 2k\}$, $F_{n+1} \leq 2F_n = 4k < 2j$. Si $j \leq 2k$, la question 1 s'applique.

Conclusion

pour $0 \leq j \leq a_{n+1}$,

$$P(F_{n+1} = 2j) = \sum_{\frac{j}{2} \leq k \leq a_n} \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1},$$

la somme portant sur les entiers k tels que $\frac{j}{2} \leq k \leq a_n$.

- 3) On reporte l'expression de la question 2 dans la définition de G_{n+1} et on permute deux sommes finies. Pour tout réel x , comme $a_{n+1} = 2a_n$:

$$G_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{2a_n} \sum_{\substack{j \\ \frac{j}{2} \leq k \leq a_n}} \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1} x^j = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1} \sum_{j=0}^{2k} x^j,$$

car les couples (j, k) concernés sont exactement ceux tels que $0 \leq k \leq a_n$ et $0 \leq j \leq 2k$.

Pour $x \in [0, 1[$, on a $x \neq 1$, et la somme géométrique vaut

$$\sum_{j=0}^{2k} x^j = \frac{x^{2k+1} - 1}{x - 1}.$$

Conclusion

pour $x \in [0, 1[$,

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)(x-1)} P(F_n = 2k).$$

- 4) Calculons d'abord le second membre de (1). La fonction

$$t \mapsto G_n(t^2) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) t^{2k}$$

est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\int_x^1 G_n(t^2) dt = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_x^1 = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{1 - x^{2k+1}}{2k+1} P(F_n = 2k).$$

Méthode 1 — Égalité sur $[0, 1[$ puis argument polynomial.

Pour $x \in [0, 1[$, en multipliant l'égalité de la question 3 par $1 - x = -(x - 1)$:

$$(1 - x)G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{1 - x^{2k+1}}{2k + 1} P(F_n = 2k) = \int_x^1 G_n(t^2) dt.$$

Les deux membres de (1) sont des fonctions polynomiales de x (le second d'après le calcul ci-dessus) qui coïncident sur l'ensemble infini $[0, 1[$. Leur différence est un polynôme ayant une infinité de racines, donc le polynôme nul : l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 — Calcul direct sur $\mathbb{R}$.

D'après le calcul de la question 3, valable pour tout réel x avant division,

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{P(F_n = 2k)}{2k + 1} \sum_{j=0}^{2k} x^j.$$

Comme

$$(1 - x) \sum_{j=0}^{2k} x^j = 1 - x^{2k+1}$$

pour tout réel x (somme télescopique), on obtient directement

$$(1 - x)G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{1 - x^{2k+1}}{2k + 1} P(F_n = 2k),$$

qui est le second membre.

La méthode 1 répond au « en déduire » en utilisant le prolongement d'une identité polynomiale ; la méthode 2 évite la division par $x - 1$ et prouve l'égalité d'un seul coup sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

$$\text{pour tout réel } x, \quad (1-x)G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2) dt.$$

5) Méthode 1 — Dérivation de (1) (méthode imposée par l'énoncé).

Posons $\psi(x) = \int_x^1 G_n(t^2) dt = - \int_1^x G_n(t^2) dt$. La fonction $t \mapsto G_n(t^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental du calcul intégral donne que ψ est dérivable et $\psi'(x) = -G_n(x^2)$; puis ψ est de classe C^2 et $\psi''(x) = -2x G'_n(x^2)$.

Pour le premier membre $\phi(x) = (1-x)G_{n+1}(x)$: $\phi'(x) = -G_{n+1}(x) + (1-x)G'_{n+1}(x)$ et $\phi''(x) = -2G'_{n+1}(x) + (1-x)G''_{n+1}(x)$.

L'égalité $\phi = \psi$ sur $\mathbb{R}$ entraîne $\phi'' = \psi''$. En $x = 1$: $-2G'_{n+1}(1) = -2G'_n(1)$, donc $G'_{n+1}(1) = G'_n(1)$, c'est-à-dire, d'après la question 2c des préliminaires, $E(F_{n+1}) = E(F_n)$.

La suite $(E(F_n))$ est donc constante, égale à $E(F_0) = a$.

Méthode 2 — Calcul direct à partir de la loi de F_{n+1} .

D'après les questions 1 et 2,

$$E(F_{n+1}) = \sum_{j=0}^{a_{n+1}} 2j P(F_{n+1} = 2j) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{P(F_n = 2k)}{2k+1} \sum_{j=0}^{2k} 2j$$

(même permutation de sommes finies qu'en question 3). Or

$$\sum_{j=0}^{2k} 2j = 2k(2k+1),$$

donc

$$E(F_{n+1}) = \sum_{k=0}^{a_n} 2k P(F_n = 2k) = E(F_n).$$

La méthode 1 illustre l'intérêt des polynômes G_n (les moments se lisent sur les dérivées en 1) ; la méthode 2 est un calcul direct d'espérance, plus court ici mais moins réutilisable pour la variance.

Conclusion

pour tout $n \geq 0$, $E(F_n) = a$.

Deuxième partie

A) Simulation informatique de l'expérience

Code adapté en Python.

- 1) Pour simuler une loi binomiale de paramètres m et s , on réalise m épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre s et on compte les succès. Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $P(U < s) = s$: le test `rd.random() < s` est un succès de probabilité s , et les appels successifs sont indépendants.

Python

```
import numpy.random as rd

def mise(m, s):
    x = 0
    # nombre de succès
```

```
for k in range(m):          # m épreuves (aucune si m = 0)
    if rd.random() < s:      # succès avec probabilité s
        x = x + 1
return x
```

La variable x compte les succès ; la boucle `for k in range(m)` est exécutée m fois. La valeur renvoyée est un entier entre 0 et m , de loi binomiale de paramètres m et s (nombre de succès dans m épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre s). Pour $m = 0$, la boucle n'est pas exécutée et la fonction renvoie 0, ce qui correspond à la loi binomiale de paramètres 0 et s (certaine égale à 0) : c'est le cas d'un joueur ruiné.

- 2) À chaque passage dans la boucle, on tire la mise X selon la loi binomiale de paramètres F et r , puis on simule le lancer : pile si `rd.random() < p` (probabilité p), auquel cas la nouvelle fortune est $2X$; sinon face et la nouvelle fortune est $2(F - X)$. On affiche ensuite la fortune obtenue.

Python

```
import numpy.random as rd

def mise(m, s):
    x = 0
    for k in range(m):
        if rd.random() < s:
            x = x + 1
    return x

n = int(input("n = "))
p = float(input("p = "))
r = float(input("r = "))
a = int(input("a = "))
F = a
for i in range(1, n + 1):
    X = mise(F, r)
    if rd.random() < p:
```

```
F = 2 * X
else:
    F = 2 * (F - X)
print(F)
```

La boucle `for i in range(1, n + 1)` est exécutée pour $i = 1, \dots, n$; à l'issue du passage d'indice i , F contient F_i , qui est affiché. Le tirage du lancer est fait après celui de la mise, avec un nouvel appel à `rd.random()`, ce qui respecte l'indépendance entre le lancer $n + 1$ et le couple (F_n, X_n) .

Contrôle par exécution. Le code a été exécuté (en remplaçant les saisies par des affectations) : les valeurs affichées sont des entiers pairs. Sur 200 000 simulations avec $a = 4$, $p = r = \frac{1}{3}$, $n = 4$, la moyenne empirique de F_4 est proche de $4 \left(\frac{10}{9}\right)^4 \approx 6,10$, valeur théorique donnée par la question B4a. Cette observation expérimentale ne constitue pas une preuve.

B) Étude théorique

1) On reprend le raisonnement des questions 1 à 3 de la première partie avec la loi binomiale.

Pour $0 \leq k \leq a_n$ et $0 \leq i \leq 2k$, l'hypothèse donne

$$P(\{X_n = i\} \cap \{F_n = 2k\}) = \binom{2k}{i} r^i (1-r)^{2k-i} P(F_n = 2k)$$

(égalité vraie aussi si $P(F_n = 2k) = 0$).

Étape 1 (analogue de la question 1). Pour $0 \leq j \leq 2k$, la même décomposition selon le résultat du lancer $n + 1$ et l'hypothèse d'indépendance donnent :

$$\begin{aligned} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) &= p P(\{X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\}) \\ &+ (1-p) P(\{X_n = 2k-j\} \cap \{F_n = 2k\}), \end{aligned}$$

soit, avec $\binom{2k}{2k-j} = \binom{2k}{j}$:

$$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = \binom{2k}{j} [p r^j (1-r)^{2k-j} + (1-p)(1-r)^j r^{2k-j}] P(F_n = 2k).$$

Pour $j > 2k$, cette probabilité est nulle, comme dans la première partie.

Étape 2 (analogue de la question 2). Par la formule des probabilités totales, pour $0 \leq j \leq a_{n+1}$:

$$P(F_{n+1} = 2j) = \sum_{\frac{j}{2} \leq k \leq a_n} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}).$$

Étape 3 (analogue de la question 3). Pour tout réel x , en permutant les sommes finies :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} [p (rx)^j (1-r)^{2k-j} + (1-p) ((1-r)x)^j r^{2k-j}].$$

Par la formule du binôme,

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (rx)^j (1-r)^{2k-j} = (rx + 1-r)^{2k} = [(xr + 1-r)^2]^k$$

et

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} ((1-r)x)^j r^{2k-j} = ((1-r)x + r)^{2k} = [(x - xr + r)^2]^k.$$

Donc :

$$G_{n+1}(x) = p \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) [(xr + 1 - r)^2]^k + (1 - p) \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) [(x - xr + r)^2]^k.$$

Conclusion

pour tout réel x et tout $n \geq 0$,

$$G_{n+1}(x) = p G_n [(xr + 1 - r)^2] + (1 - p) G_n [(x - xr + r)^2].$$

2) a) Ici $p = \frac{1}{2}$, donc $A = \frac{r^2 + (1 - r)^2}{2}$. Remarquons que $A > 0$ et que

$r^2 + (1 - r)^2 = 1 - 2r(1 - r) < 1$, donc $0 < A < \frac{1}{2}$; ces encadrements serviront en 2b et 2c.

Pour tout réel x , $x + A(x - 1)^2 = Ax^2 + (1 - 2A)x + A$, et

$$1 - 2A = 1 - r^2 - (1 - r)^2 = 2r - 2r^2 = 2r(1 - r).$$

Conclusion

$$Q(x) = x + A(x - 1)^2 \text{ pour tout réel } x.$$

b) Il s'agit de montrer que $Q([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Méthode 1 — Variations de Q .

$Q'(x) = 2Ax + 2r(1 - r) > 0$ pour $x \geq 0$, car $A > 0$ et $r(1 - r) > 0$. Donc Q est strictement croissante sur $[0, 1]$, et $Q([0, 1]) = [Q(0), Q(1)]$. Or $Q(0) = A \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $Q(1) = 2A + 2r(1 - r) = r^2 + (1 - r)^2 + 2r(1 - r) = (r + 1 - r)^2 = 1$. Donc $Q([0, 1]) = [A, 1] \subset [0, 1]$.

Méthode 2 — Encadrement à l'aide de 2a.

Soit $x \in [0, 1]$. D'une part $Q(x) = x + A(x-1)^2 \geq x \geq 0$. D'autre part $Q(x) - 1 = (x-1) + A(x-1)^2 = (x-1)(1 + A(x-1))$, avec $x-1 \leq 0$ et $1 + A(x-1) \geq 1 - A > 0$; donc $Q(x) \leq 1$.

La méthode 1 fournit l'image exacte de $[0, 1]$; la méthode 2 utilise directement la forme canonique de 2a, qui servira aussi en 2c.

Conclusion

l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q .

c) Par récurrence, $u_n \in [0, 1]$ pour tout n : $u_0 = 0 \in [0, 1]$ et, si $u_n \in [0, 1]$, alors $u_{n+1} = Q(u_n) \in [0, 1]$ d'après 2b.

Monotonie : d'après 2a, $u_{n+1} - u_n = Q(u_n) - u_n = A(u_n - 1)^2 \geq 0$. La suite est croissante.

Convergence : croissante et majorée par 1, elle converge (théorème de la limite monotone) vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

Limite : Q est continue en ℓ (fonction polynomiale), donc $Q(u_n) \rightarrow Q(\ell)$; en passant à la limite dans $u_{n+1} = Q(u_n)$, on obtient $\ell = Q(\ell)$, c'est-à-dire $A(\ell - 1)^2 = 0$, d'où $\ell = 1$ car $A > 0$.

Conclusion

(u_n) est croissante et converge vers 1.

3) a) Soit $n \geq 0$ et $x \geq 0$. Posons $\alpha = (xr + 1 - r)^2$ et $\beta = (x - xr + r)^2$, qui sont des réels positifs. Avec $p = \frac{1}{2}$, la relation (2) s'écrit $G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(\alpha) + \frac{1}{2}G_n(\beta)$.

Calcul de $\frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= r^2 x^2 + 2r(1-r)x + (1-r)^2 + (1-r)^2 x^2 + 2r(1-r)x + r^2 \\ &= (r^2 + (1-r)^2) x^2 + 4r(1-r)x + r^2 + (1-r)^2,\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha + \beta}{2} = Ax^2 + 2r(1-r)x + A = Q(x).$

G_n étant convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ (préliminaire 3) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité de convexité avec les coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ donne $G_n\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}G_n(\alpha) + \frac{1}{2}G_n(\beta).$

Conclusion

pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$, $G_{n+1}(x) \geq G_n[Q(x)].$

b) Fixons $n \geq 0$ et montrons par récurrence finie, pour $m \in \{0, \dots, n\}$, la propriété $\mathcal{P}_m$:
« $G_{n+1}(0) \geq G_{n+1-m}(u_m)$ ».

Initialisation : $u_0 = 0$, donc $\mathcal{P}_0$ est l'égalité $G_{n+1}(0) = G_{n+1}(u_0).$

Hérédité : soit $m \leq n-1$ tel que $\mathcal{P}_m$ soit vraie. Comme $n+1-m = (n-m) + 1$ avec $n-m \geq 0$ et $u_m \geq 0$ (question 2c), la question 3a donne

$G_{n+1-m}(u_m) \geq G_{n-m}(Q(u_m)) = G_{n-m}(u_{m+1}).$ Donc $G_{n+1}(0) \geq G_{n+1-(m+1)}(u_{m+1})$:
 $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.

Pour $m = n$: $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n).$

Conclusion. G_1 est une fonction polynomiale, donc continue en 1, et $u_n \rightarrow 1$:

$G_1(u_n) \rightarrow G_1(1) = 1$ (préliminaire 2a). Pour tout $n \geq 0$,

$G_1(u_n) \leq G_{n+1}(0) = P(F_{n+1} = 0) \leq 1.$ Par encadrement, $P(F_{n+1} = 0) \rightarrow 1$, donc
 $P(F_n = 0) \rightarrow 1.$

Ainsi, lorsque $p = \frac{1}{2}$, la probabilité que le joueur soit ruiné tend vers 1, quelle que soit la valeur de r . On verra en 4a que dans ce cas $B = 1$ et $E(F_n) = a$: l'espérance de la fortune reste constante alors que la ruine devient quasi certaine.

4) a) Dérivons la relation (2), valable pour tout réel x (composées de fonctions polynomiales) :

$$G'_{n+1}(x) = 2pr(xr + 1 - r) G'_n [(xr + 1 - r)^2] \\ + 2(1 - p)(1 - r)(x - xr + r) G'_n [(x - xr + r)^2].$$

En $x = 1 : xr + 1 - r = 1$ et $x - xr + r = 1$, d'où

$$G'_{n+1}(1) = [2pr + 2(1 - p)(1 - r)] G'_n(1) = B G'_n(1).$$

Avec $G'_n(1) = \frac{E(F_n)}{2}$ (préliminaire 2c), on obtient $E(F_{n+1}) = B E(F_n)$.

Conclusion

$(E(F_n))$ est géométrique de raison B , et $E(F_n) = a B^n$ pour tout $n \geq 0$.

b) Avec $p = \frac{1}{2} - p'$ et $r = \frac{1}{2} - r'$, on a $1 - p = \frac{1}{2} + p'$ et $1 - r = \frac{1}{2} + r'$, donc :

$$B = 2 \left[\left(\frac{1}{2} - p' \right) \left(\frac{1}{2} - r' \right) + \left(\frac{1}{2} + p' \right) \left(\frac{1}{2} + r' \right) \right] = 2 \left[\frac{1}{2} + 2p'r' \right] = 1 + 4p'r'.$$

Comme $p, r \in]0, 1[$, on a $|p'| < \frac{1}{2}$ et $|r'| < \frac{1}{2}$, donc $|4p'r'| < 1$ et $B \in]0, 2[$. La limite de $E(F_n) = aB^n$ (avec $a > 0$) se déduit de celle de la suite géométrique (B^n) :

si $p'r' > 0$, c'est-à-dire si p et r sont tous deux strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$ ou tous deux strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$: $B > 1$ et $E(F_n) \rightarrow +\infty$;

si $p'r' = 0$, c'est-à-dire si $p = \frac{1}{2}$ ou $r = \frac{1}{2}$: $B = 1$ et $E(F_n) = a$ pour tout n ;

si $p'r' < 0$, c'est-à-dire si l'un des deux réels p, r est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et l'autre strictement supérieur : $0 < B < 1$ et $E(F_n) \rightarrow 0$.

Interprétation : la fortune moyenne croît lorsque le joueur mise en moyenne davantage sur le côté le plus probable de la pièce.

c) F_n est une variable positive, d'espérance finie, et à valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots\}$: on a $\{F_n \neq 0\} = \{F_n \geq 2\}$. Par l'inégalité de Markov :

$$1 - P(F_n = 0) = P(F_n \geq 2) \leq \frac{E(F_n)}{2}.$$

Si $E(F_n) \rightarrow 0$, alors par encadrement $0 \leq 1 - P(F_n = 0) \leq \frac{E(F_n)}{2} \rightarrow 0$.

Conclusion

si $(E(F_n))$ tend vers 0, alors $(P(F_n = 0))$ tend vers 1. C'est le cas lorsque $p'r' < 0$.

5) a) Notons $\varphi_1(x) = (xr + 1 - r)^2$ et $\varphi_2(x) = (x - xr + r)^2$. Pour un polynôme φ , la dérivée seconde de $x \mapsto G_n(\varphi(x))$ est $\varphi''(x)G'_n(\varphi(x)) + \varphi'(x)^2G''_n(\varphi(x))$.

On a $\varphi_1(1) = 1$, $\varphi'_1(x) = 2r(xr + 1 - r)$, $\varphi'_1(1) = 2r$, $\varphi''_1 = 2r^2$, et $\varphi_2(1) = 1$, $\varphi'_2(x) = 2(1 - r)(x - xr + r)$, $\varphi'_2(1) = 2(1 - r)$, $\varphi''_2 = 2(1 - r)^2$.

En dérivant deux fois (2) et en évaluant en 1 :

$$G''_{n+1}(1) = p [2r^2 G'_n(1) + 4r^2 G''_n(1)] + (1 - p) [2(1 - r)^2 G'_n(1) + 4(1 - r)^2 G''_n(1)].$$

Conclusion

pour tout $n \geq 0$, $G''_{n+1}(1) = 4A G''_n(1) + 2A G'_n(1)$.

b) D'après 4a et le préliminaire 2c, $G'_n(1) = \frac{E(F_n)}{2} = \frac{a}{2} B^n$. Donc

$G''_{n+1}(1) = 4A G''_n(1) + aA B^n$. Comme $B > 0$ (question 4b), on peut diviser par B^{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{4A}{B} v_n + \frac{aA}{B}.$$

Conclusion

(v_n) est arithmético-géométrique, de coefficient $\frac{4A}{B}$ et de terme constant $\frac{aA}{B}$.

c) Premier terme : $F_0 = a = 2 \cdot \frac{a}{2}$, donc $G_0(x) = x^{a/2}$ et

$$v_0 = G_0''(1) = \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) = \frac{a(a-2)}{4}.$$

Cas $4A \neq B$. Le réel $\ell = \frac{aA}{B-4A}$ vérifie $\ell = \frac{4A}{B}\ell + \frac{aA}{B}$. La suite $(v_n - \ell)$ est alors géométrique de raison $\frac{4A}{B}$, donc $v_n = \left(\frac{4A}{B}\right)^n (v_0 - \ell) + \ell$, et :

$$G_n''(1) = B^n v_n = (4A)^n \left(\frac{a(a-2)}{4} - \frac{aA}{B-4A} \right) + \frac{aA}{B-4A} B^n.$$

Cas $4A = B$ (par exemple $p = r = \frac{1}{2}$, où $A = \frac{1}{4}$ et $B = 1$). La suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{aA}{B} = \frac{a}{4}$, donc $v_n = \frac{a(a-2)}{4} + \frac{na}{4}$, et :

$$G_n''(1) = \frac{a(a-2+n)}{4} B^n.$$

Conclusion

$G_n''(1)$ est donné par l'une de ces deux formules selon que $4A \neq B$ ou $4A = B$. Ces formules ont été contrôlées par un calcul exact de la loi de F_n pour de petites valeurs de n .

6) a) Avec $p = r = \frac{1}{3}$:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1+8}{27} = \frac{1}{3}, \quad B = 2 \left[\frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right] = \frac{10}{9}, \quad B^2 = \frac{100}{81}.$$

On a $4A = \frac{4}{3} \neq \frac{10}{9} = B$: on utilise le premier cas de 5c. Comme

$$B - 4A = \frac{10}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{2}{9}, \text{ on a } \frac{4A}{B-4A} = -6, \text{ donc :}$$

$$4G_n''(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(a(a-2) - \frac{4aA}{B-4A} \right) + \frac{4aA}{B-4A} B^n = (a^2 + 4a) \left(\frac{4}{3}\right)^n - 6a \left(\frac{10}{9}\right)^n.$$

Avec $E(F_n) = a \left(\frac{10}{9}\right)^n$ et le préliminaire 2c :

$$V(F_n) = (a^2 + 4a) \left(\frac{4}{3}\right)^n - 6a \left(\frac{10}{9}\right)^n + 2a \left(\frac{10}{9}\right)^n - a^2 \left(\frac{100}{81}\right)^n,$$

soit $V(F_n) = a(a+4) \left(\frac{4}{3}\right)^n - 4a \left(\frac{10}{9}\right)^n - a^2 \left(\frac{100}{81}\right)^n$. (Contrôle : pour $n = 0$, on trouve $0 = V(F_0)$.)

Équivalent : en factorisant par $\left(\frac{4}{3}\right)^n$,

$$V(F_n) = a(a+4) \left(\frac{4}{3}\right)^n \left[1 - \frac{4}{a+4} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{a}{a+4} \left(\frac{25}{27}\right)^n \right],$$

car $\frac{10/9}{4/3} = \frac{5}{6}$ et $\frac{100/81}{4/3} = \frac{25}{27}$. Ces deux raisons appartiennent à $]0, 1[$, donc le crochet tend vers 1.

Conclusion

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{10}{9}, \quad B^2 = \frac{100}{81} \text{ et } V(F_n) \sim a(a+4) \left(\frac{4}{3}\right)^n \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

b) On majore $P(F_n \geq 2^{n/4}a)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Posons $\theta = \frac{10}{9 \cdot 2^{1/4}}$. L'inégalité $2^{1/4} > \frac{10}{9}$ donne $0 < \theta < 1$. Soit $n \geq 1$. Alors

$$B^n = \left(\frac{10}{9}\right)^n < 2^{n/4}, \text{ et } \varepsilon_n = a(2^{n/4} - B^n) = a 2^{n/4} (1 - \theta^n) > 0.$$

Si $F_n \geq 2^{n/4}a$, alors $F_n - E(F_n) \geq 2^{n/4}a - aB^n = \varepsilon_n > 0$, donc $|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon_n$. Ainsi $\{F_n \geq 2^{n/4}a\} \subset \{|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon_n\}$. La variable F_n est finie, donc admet une variance, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(F_n \geq 2^{n/4}a) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon_n^2}.$$

Majorations. D'après 6a, $V(F_n) \leq a(a+4) \left(\frac{4}{3}\right)^n$ (les deux autres termes sont négatifs).

Comme $0 < \theta < 1$ et $n \geq 1$, $\theta^n \leq \theta$, donc $1 - \theta^n \geq 1 - \theta > 0$ et $\varepsilon_n^2 \geq a^2 2^{n/2} (1 - \theta)^2$. D'où :

$$0 \leq P(F_n \geq 2^{n/4}a) \leq \frac{a+4}{a(1-\theta)^2} \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \right)^n, \text{ car } 2^{n/2} = (\sqrt{2})^n.$$

L'inégalité $3\sqrt{2} > 4$ donne $0 < \frac{4}{3\sqrt{2}} < 1$, donc le majorant tend vers 0, et par encadrement $P(F_n \geq 2^{n/4}a) \rightarrow 0$.

Conclusion

$P(F_n < 2^{n/4}a) = 1 - P(F_n \geq 2^{n/4}a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Bien que la variance de F_n croisse comme $\left(\frac{4}{3}\right)^n$, la fortune reste, avec une probabilité tendant vers 1, inférieure à $2^{n/4}a$.

Relevé des adaptations

Problème, préambule : ajout explicite de l'hypothèse d'indépendance entre le résultat du lancer $n + 1$ et le couple (F_n, X_n) . Cette hypothèse, implicite dans le texte original, est indispensable aux questions 1 de la première partie et B1 de la deuxième partie ; l'énoncé original n'en donnait que l'indication « système complet d'événements ».

Deuxième partie, A : code adapté en Python. Le programme original en langage non Python est remplacé par un programme Python de même structure (fonction mise, saisie des paramètres par input, boucle sur les lancers) dont les blancs sont conservés ; l'instruction d'initialisation du générateur aléatoire, inutile en Python, est supprimée ; la description de la fonction random est remplacée par celle de `rd.random()` et de `input`. La consigne « on n'utilisera pas `rd.binomial` » est ajoutée pour préserver l'objectif de la question 1 (simuler une loi binomiale à partir de tirages uniformes), qui serait sinon trivial.

Les autres questions sont conformes au programme et conservées telles quelles.