



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1999

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $n \geq 1$ et $f_n(x, y) = (x^n - y) e^{x-y}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.(a) Il s'agit de reconnaître f_n comme produit et composée de fonctions de classe C^2 .

La fonction $(x, y) \mapsto x^n - y$ est polynomiale en (x, y) , donc de classe C^2 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction $(x, y) \mapsto x - y$ est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et $\exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; par composition, $(x, y) \mapsto e^{x-y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion

f_n , produit de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1.(b) On dérive le produit, en notant que $\partial_1(e^{x-y}) = e^{x-y}$ et $\partial_2(e^{x-y}) = -e^{x-y}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f_n(x, y) = nx^{n-1}e^{x-y} + (x^n - y)e^{x-y} = e^{x-y} (nx^{n-1} + x^n - y),$$

$$\partial_2 f_n(x, y) = -e^{x-y} - (x^n - y)e^{x-y} = e^{x-y} (y - x^n - 1).$$

(Pour $n = 1$, le terme nx^{n-1} vaut 1.)

2.(a) On cherche les points critiques de f_2 .

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert et f_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$: si f_2 admet un extremum local en un point, son gradient y est nul. Les conditions nécessaires d'existence d'un extremum sont donc $\partial_1 f_2(x, y) = 0$ et $\partial_2 f_2(x, y) = 0$.

Comme $e^{x-y} > 0$, ces conditions équivalent au système

$$\begin{cases} 2x + x^2 - y = 0 \\ y - x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = x^2 + 1$; en reportant dans la première :
 $2x + x^2 - x^2 - 1 = 0$, soit $x = \frac{1}{2}$, puis $y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Réciproquement, $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ vérifie bien les deux équations.

Conclusion

le seul point critique de f_2 est $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

2.(b) On calcule les dérivées secondes, la hessienne au point critique, puis le signe de ses valeurs propres.

Dérivées partielles d'ordre 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, à partir de

$\partial_1 f_2(x, y) = e^{x-y}(x^2 + 2x - y)$ et $\partial_2 f_2(x, y) = e^{x-y}(y - x^2 - 1)$:

$$\partial_{1,1}^2 f_2(x, y) = e^{x-y}(x^2 + 2x - y) + e^{x-y}(2x + 2) = e^{x-y}(x^2 + 4x + 2 - y),$$

$$\partial_{2,1}^2 f_2(x, y) = \partial_2 (\partial_1 f_2)(x, y) = -e^{x-y}(x^2 + 2x - y) - e^{x-y} = e^{x-y}(y - x^2 - 2x - 1),$$

$$\partial_{1,2}^2 f_2(x, y) = \partial_1 (\partial_2 f_2)(x, y) = e^{x-y}(y - x^2 - 1) - 2x e^{x-y} = e^{x-y}(y - x^2 - 2x - 1),$$

$$\partial_{2,2}^2 f_2(x, y) = -e^{x-y}(y - x^2 - 1) + e^{x-y} = e^{x-y}(x^2 + 2 - y).$$

On retrouve l'égalité des dérivées croisées, conformément au théorème de Schwarz (f_2 est de classe C^2).

Méthode 1 — Hessienne et valeurs propres (nature locale)

Au point $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$, on a $x_0 - y_0 = -\frac{3}{4}$ et :

$$x_0^2 + 4x_0 + 2 - y_0 = \frac{1}{4} + 2 + 2 - \frac{5}{4} = 3, \quad y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - 1 - 1 = -1,$$

$$x_0^2 + 2 - y_0 = \frac{1}{4} + 2 - \frac{5}{4} = 1.$$

La hessienne de f_2 en (x_0, y_0) est donc

$$\nabla^2 f_2(x_0, y_0) = e^{-3/4} A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recherche des valeurs propres de A par résolution de $AZ = \lambda Z$, avec $Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$:

$$\begin{cases} 3u - v = \lambda u \\ -u + v = \lambda v \end{cases}$$

La seconde équation donne $u = (1 - \lambda)v$. Si $v = 0$, alors $u = 0$, ce qui est exclu ; donc $v \neq 0$. En reportant dans la première : $3(1 - \lambda)v - v = \lambda(1 - \lambda)v$, et en divisant par $v \neq 0$: $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$, donc $\lambda \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$.

Réciproquement, pour chacune de ces deux valeurs, $Z = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie

$AZ = \lambda Z$ (la seconde équation est vraie par construction et la première équivaut à $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$). Les valeurs propres de A sont $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$, et celles de $\nabla^2 f_2(x_0, y_0)$ sont $e^{-3/4}(2 - \sqrt{2})$ et $e^{-3/4}(2 + \sqrt{2})$.

Comme $\sqrt{2} < 2$, ces deux valeurs propres sont strictement positives. f_2 est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique et toutes les valeurs propres de la hessienne y sont strictement positives : f_2 admet en (x_0, y_0) un minimum local strict.

Sa valeur est $f_2(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) e^{-3/4} = -e^{-3/4}$.

Méthode 2 — Étude directe du signe de $f_2 - f_2(x_0, y_0)$ (nature globale)

Posons, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $s = y - x^2$. Alors $x^2 - y = -s$ et $x - y = (x - x^2) - s$, donc

$$f_2(x, y) = -s e^{-s} e^{x-x^2}.$$

Si $s \leq 0$, alors $f_2(x, y) \geq 0 > -e^{-3/4}$.

Si $s > 0$: la fonction $g : t \mapsto t e^{-t}$ a pour dérivée $g'(t) = (1-t)e^{-t}$, donc elle est maximale

sur $\mathbb{R}_+$ en $t = 1$ et $0 < s e^{-s} \leq e^{-1}$. Par ailleurs $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, donc

$0 < e^{x-x^2} \leq e^{1/4}$. En multipliant ces inégalités entre nombres positifs :

$$s e^{-s} e^{x-x^2} \leq e^{-1} e^{1/4} = e^{-3/4}, \text{ soit } f_2(x, y) \geq -e^{-3/4}.$$

Dans tous les cas, $f_2(x, y) \geq -e^{-3/4} = f_2(x_0, y_0)$, avec égalité si et seulement si $s = 1$ et $x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $(x, y) = (x_0, y_0)$.

Comparaison des méthodes : la méthode 1 est la méthode générale du programme mais ne donne qu'une information locale ; la méthode 2 repose sur une réécriture propre à cette fonction et fournit en plus le caractère global.

Conclusion

f_2 admet en $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ un minimum, local strict (méthode 1) et même global strict (méthode 2), égal à $-e^{-3/4}$.

3.(a) Pour $n = 1$, d'après 1.(b) :

$$\partial_1 f_1(x, y) = e^{x-y}(1 + x - y) \text{ et } \partial_2 f_1(x, y) = e^{x-y}(y - x - 1).$$

Comme $e^{x-y} > 0$, le gradient de f_1 est nul en (x, y) si et seulement si $1 + x - y = 0$ et $y - x - 1 = 0$, deux équations équivalentes à $y = x + 1$.

Conclusion

le gradient de f_1 s'annule exactement aux points de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$, c'est-à-dire aux points $(x, x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$: il y en a une infinité.

3.(b) On commence par la hessienne, puis on conclut par une étude directe.

Hessienne aux points critiques. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\partial_{1,1}^2 f_1(x, y) &= e^{x-y}(2 + x - y), & \partial_{1,2}^2 f_1(x, y) &= \partial_{2,1}^2 f_1(x, y) = -e^{x-y}(2 + x - y), \\ \partial_{2,2}^2 f_1(x, y) &= e^{x-y}(2 + x - y).\end{aligned}$$

En un point de $\mathcal{D}$, $x - y = -1$, donc la hessienne vaut $e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle vérifie

$$e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2e^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ de vecteurs propres, donc les

valeurs propres de la hessienne sont 0 et $2e^{-1}$. Il y a une valeur propre nulle (et pas de valeurs propres de signes opposés) : le critère du second ordre ne permet pas de conclure. On étudie donc directement f_1 .

Étude directe. Pour tout (x, y) , $f_1(x, y) = (x - y)e^{x-y} = \psi(x - y)$ avec $\psi(t) = t e^t$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(t) = (1 + t)e^t$, du signe de $1 + t$: ψ est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Elle admet donc en -1 un minimum global : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \geq \psi(-1) = -e^{-1}$.

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = \psi(x - y) \geq -e^{-1}$, et pour tout point $(a, a + 1)$ de $\mathcal{D}$, $f_1(a, a + 1) = \psi(-1) = -e^{-1}$.

Conclusion

en chaque point de la droite $y = x + 1$, f_1 atteint son minimum global $-e^{-1}$. Ce minimum n'est pas strict, puisqu'il est atteint en tous les points de cette droite ; c'est cohérent avec la valeur propre nulle de la hessienne, de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirigeant la droite.

Exercice 2

1.(a) On résout $MX = \lambda X$ en exploitant la structure de M : sa première ligne est

$(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ et son bloc inférieur droit est la matrice $V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de la question 3.

Un calcul utile. Posons $W = V - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } W^3 = W^2 W = 0.$$

(Détail : la première et la troisième ligne de W sont égales à $(2 \ 1 \ -2)$; son produit par les colonnes de W donne $4 + 1 - 4 = 1$, $2 + 0 - 2 = 0$, $-4 - 1 + 4 = -1$; la deuxième ligne $(1 \ 0 \ -1)$ donne $2 - 2 = 0$, $1 - 1 = 0$, $-2 + 2 = 0$. Enfin $(1 \ 0 \ -1)W = (2 - 2 \ 1 - 1 \ -2 + 2) = (0 \ 0 \ 0)$.)

Valeurs propres possibles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel

que $MX = \lambda X$. La première ligne donne $x_1 = \lambda x_1$.

Si $\lambda \neq 1$, alors $x_1 = 0$, donc $Y \neq 0$, et les trois dernières lignes donnent $WY = \lambda Y$, soit $WY = (\lambda - 2)Y$. Par récurrence immédiate $W^3 Y = (\lambda - 2)^3 Y$, donc $(\lambda - 2)^3 Y = 0$ et, comme $Y \neq 0$, $\lambda = 2$.

Ainsi toute valeur propre de M appartient à $\{1, 2\}$.

Sous-espace propre associé à 2. La première ligne de $(M - 2I_4)X = 0$ s'écrit $-x_1 = 0$. Avec $x_1 = 0$, les trois dernières lignes se réduisent à $WY = 0$, c'est-à-dire, en notant

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_3 = y_1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

qui n'est pas réduit à $\{0\}$: 2 est valeur propre de M .

Sous-espace propre associé à 1. Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $(M - I_4)X = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation de la troisième : $-x_1 + x_2 = 0$, donc $x_2 = x_1$. La deuxième donne alors $x_4 = 3x_1 + x_3$, et la première $-x_1 + 3x_1 + x_3 - 6x_1 - 2x_3 = 0$, soit $x_3 = -4x_1$, puis $x_4 = -x_1$. Réciproquement ces valeurs vérifient les trois équations.

Donc

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right) :$$

1 est valeur propre de M .

Conclusion

les valeurs propres de M sont exactement 1 et 2, avec

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ,$$

tous deux de dimension 1.

1.(b) On utilise le critère de diagonalisation par les dimensions des sous-espaces

propres : $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 4.

Ici $\dim E_1(M) + \dim E_2(M) = 1 + 1 = 2 < 4$.

Conclusion

M n'est pas diagonalisable.

2. On effectue le produit par blocs, ou, ce qui revient au même, coefficient par coefficient.

Notons $L_1, \dots, L_4$ les lignes de H et $K_1, \dots, K_4$ les colonnes de H' .

Première ligne de HH' : $L_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$, donc la première ligne de HH' est la première ligne de H' , à savoir $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$: elle s'écrit $(1 \ O)$.

Première colonne de HH' : $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ C' \end{pmatrix}$. Pour $i \in \{2, 3, 4\}$, la ligne L_i s'écrit

$(c_{i-1} \ a_{i-1,1} \ a_{i-1,2} \ a_{i-1,3})$, où $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$. Le coefficient $(i, 1)$ de HH' vaut

$$c_{i-1} \cdot 1 + \sum_{k=1}^3 a_{i-1,k} c'_k,$$

qui est la $(i-1)$ -ième composante de $C + AC'$.

Bloc inférieur droit : pour $i, j \in \{2, 3, 4\}$,

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{1,j-1} \\ a'_{2,j-1} \\ a'_{3,j-1} \end{pmatrix},$$

donc le coefficient (i, j) de HH' vaut

$$c_{i-1} \cdot 0 + \sum_{k=1}^3 a_{i-1,k} a'_{k,j-1},$$

qui est le coefficient $(i-1, j-1)$ de AA' .

Conclusion

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ avec } C'' = C + AC'.$$

3. On raisonne par récurrence en utilisant la question 2. Notons $C_M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte

$$\text{que } M = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C_M & V \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$: « il existe $U_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec $U_1 = C_M$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. On applique la question 2 avec $H = M^n$ (donc $C = U_n$, $A = V^n$) et $H' = M$ (donc $C' = C_M$, $A' = V$) :

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n + V^n C_M & V^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie avec $U_{n+1} = U_n + V^n C_M$.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$, où $U_1 = C_M$ et $U_{n+1} = U_n + V^n C_M$. En posant $U_0 = 0$, la formule vaut aussi pour $n = 0$ puisque $M^0 = I_4$.

4. Question adaptée au programme actuel : le titre « Calcul de V^b » du document source est une coquille pour « Calcul de V^n ».

Puissances de W . D'après le calcul fait en 1.(a) : $W^0 = I_3$, $W^1 = W$, $W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$W^3 = 0$, et donc, pour tout $k \geq 3$, $W^k = W^3 W^{k-3} = 0$.

Puissances de V . $V = 2I_3 + W$, et les matrices $2I_3$ et W commutent. La formule du binôme s'applique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} W^k.$$

Les termes d'indice $k \geq 3$ sont nuls. Pour $n \geq 2$, il reste

$$V^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} W + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} W^2 = 2^{n-3} (8I_3 + 4nW + n(n-1)W^2).$$

Cette dernière formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$: pour $n = 0$ elle donne $2^{-3} \cdot 8I_3 = I_3$; pour $n = 1$ elle donne $2^{-2}(8I_3 + 4W) = 2I_3 + W = V$.

Calcul explicite des coefficients :

$$V^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} n^2 + 7n + 8 & 4n & -n^2 - 7n \\ 4n & 8 & -4n \\ n^2 + 7n & 4n & 8 - 7n - n^2 \end{pmatrix}.$$

(Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ vaut $8 + 4n \cdot 2 + n(n-1) \cdot 1 = n^2 + 7n + 8$ et le coefficient $(1, 3)$ vaut $0 + 4n \cdot (-2) + n(n-1) \cdot (-1) = -n^2 - 7n$.)

$$\text{Vérification pour } n = 1 : 2^{-2} \begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = V.$$

Conclusion

$W^0 = I_3, W^1 = W, W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, W^n = 0$ pour $n \geq 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, V^n est donnée par la matrice ci-dessus.

5.(a) D'après 1.(a), $E_1(M)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; le seul vecteur propre de

$E_1(M)$ de première composante 1 est

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $X \in E_1(M)$, $MX = X$ (on le vérifie : $-1 + 4 - 4 + 2 = 1$, $2 + 1 - 8 + 1 = -4$, $1 + 2 - 4 + 0 = -1$).

Par récurrence : $M^0 X = X$, et si $M^n X = X$, alors $M^{n+1} X = M(M^n X) = MX = X$.

Conclusion

$MX = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n X = X$.

5.(b) On compare deux expressions de $M^n X$.

Méthode 1 — Par le vecteur propre X

Notons $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, de sorte que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}$. D'après la question 3, pour $n \geq 1$, le

produit par blocs donne

$$M^n X = \begin{pmatrix} 1 \\ U_n + V^n Y \end{pmatrix}.$$

Comme $M^n X = X$, on obtient $U_n + V^n Y = Y$, soit $U_n = Y - V^n Y$.

Calcul de $V^n Y$ avec la question 4 :

première composante :

$$2^{n-3} [(n^2 + 7n + 8) - 16n + (n^2 + 7n)] = 2^{n-3}(2n^2 - 2n + 8) = 2^{n-2}(n^2 - n + 4);$$

deuxième composante : $2^{n-3} [4n - 32 + 4n] = 2^{n-3}(8n - 32) = 2^n(n - 4);$

troisième composante :

$$2^{n-3} [(n^2 + 7n) - 16n - (8 - 7n - n^2)] = 2^{n-3}(2n^2 - 2n - 8) = 2^{n-2}(n^2 - n - 4).$$

Méthode 2 — Par la relation de récurrence de la question 3

La question 3 donne $U_{n+1} = U_n + V^n C_M$. On peut aussi appliquer la question 2 dans l'autre ordre ($H = M, H' = M^n$) : $M^{n+1} = MM^n$ donne $U_{n+1} = C_M + VU_n$, relation de type arithmético-géométrique. Le vecteur Y vérifie $Y = C_M + VY$ (c'est la traduction des trois dernières lignes de $MX = X$). Par différence, $U_{n+1} - Y = V(U_n - Y)$, donc par récurrence $U_n - Y = V^n(U_0 - Y) = -V^n Y$ avec $U_0 = 0$. On retrouve $U_n = Y - V^n Y$.

La méthode 1 utilise directement l'indication de l'énoncé ; la méthode 2 montre que le vecteur propre X joue le rôle du point fixe d'une suite arithmético-géométrique, technique réutilisable dès qu'une matrice a cette structure triangulaire par blocs.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$ (et aussi $n = 0$),

$$a_n = 1 - 2^{n-2}(n^2 - n + 4), \quad b_n = -4 + 2^n(4 - n), \quad c_n = -1 - 2^{n-2}(n^2 - n - 4).$$

Vérification pour $n = 1$: $a_1 = 1 - 2 = -1$, $b_1 = -4 + 6 = 2$, $c_1 = -1 + 2 = 1$, ce qui est bien la première colonne C_M de M privée de son premier coefficient.

Problème

Partie I : Répartition des revenus dans une population donnée

1. On intègre la densité. Pour $x < r_0$, f est nulle sur $] -\infty, x]$, donc $F(x) = 0$.

Pour $x \geq r_0$: $f(t) = \alpha r_0^\alpha t^{-\alpha-1}$ sur $[r_0, x]$, donc

$$F(x) = \int_{r_0}^x \alpha r_0^\alpha t^{-\alpha-1} dt = \alpha r_0^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{r_0}^x = r_0^\alpha (r_0^{-\alpha} - x^{-\alpha}) = 1 - \left(\frac{r_0}{x} \right)^\alpha.$$

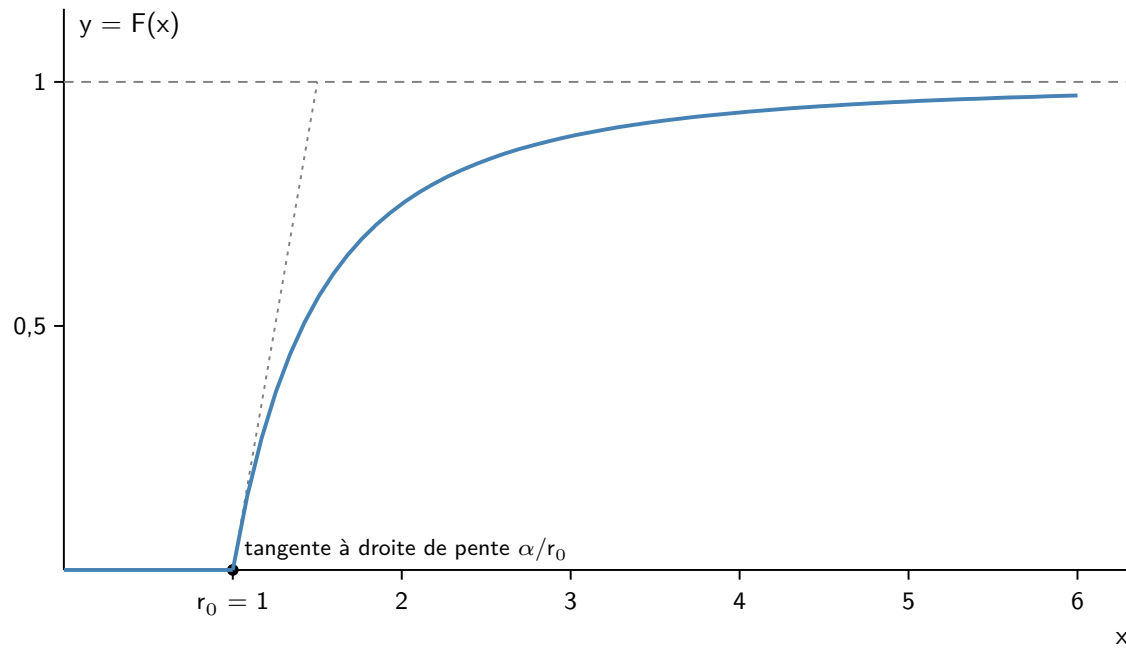
Conclusion

$$F(x) = 0 \text{ si } x < r_0 \text{ et } F(x) = 1 - \left(\frac{r_0}{x} \right)^\alpha \text{ si } x \geq r_0.$$

Allure du graphe : F est nulle sur $] -\infty, r_0]$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $]r_0, +\infty[$ avec $F'(x) = f(x) > 0$: elle y est strictement croissante.

$F''(x) = -\alpha(\alpha+1)r_0^\alpha x^{-\alpha-2} < 0$: F est concave sur $[r_0, +\infty[$. En r_0 , la dérivée à gauche vaut 0 et la dérivée à droite vaut $\frac{\alpha}{r_0}$: le graphe présente un point anguleux. Enfin

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (car $\alpha > 0$) : la droite $y = 1$ est asymptote horizontale.



Le tracé ci-dessus correspond à $\alpha = 2$ et $r_0 = 1$; pour d'autres valeurs, l'allure est la même.

2. On calcule l'espérance de X après en avoir justifié l'existence.

X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge. Ici $xf(x)$ est nul sur $] -\infty, r_0[$ et vaut $\alpha r_0^\alpha x^{-\alpha} \geq 0$ sur $[r_0, +\infty[$. Comme $\alpha > 1$, l'intégrale de référence $\int_{r_0}^{+\infty} x^{-\alpha} dx$ converge. Pour $A > r_0$:

$$\int_{r_0}^A \alpha r_0^\alpha x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha r_0^\alpha}{\alpha - 1} (r_0^{1-\alpha} - A^{1-\alpha}) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\alpha r_0}{\alpha - 1},$$

car $1 - \alpha < 0$.

Conclusion

$$m = E(X) = \frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}.$$

3.(a) Le revenu moyen m d'un individu pris au hasard dans la population (chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi) est le quotient du montant total des revenus par l'effectif : $m = \frac{M}{N}$.

Conclusion

$$M = Nm = \frac{N\alpha r_0}{\alpha - 1} \text{ (dans l'unité } u\text{)}.$$

3.(b) On exprime $P(X \geq r)$ de deux façons.

Première expression : l'individu est choisi au hasard, de façon équiprobable, parmi les N individus, dont $N(r)$ ont un revenu au moins égal à r . Donc $P(X \geq r) = \frac{N(r)}{N}$.

Seconde expression : X est une variable à densité, donc $P(X = r) = 0$ et $P(X \geq r) = P(X > r) = 1 - P(X \leq r) = 1 - F(r)$.

En égalant : $N(r) = [1 - F(r)]N$.

Avec la question 1 :

$N(r) = N$ si $0 \leq r \leq r_0$ (car $F(r) = 0$ si $r < r_0$, et $F(r_0) = 0$), et $N(r) = N \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha$ si $r \geq r_0$.

Remarque de cohérence : on vérifie que

$$\int_0^{+\infty} N(r) dr = Nr_0 + Nr_0^\alpha \frac{r_0^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \frac{N\alpha r_0}{\alpha - 1} = M. \text{ Avec } \alpha = 2 \text{ et } r_0 = 1, \text{ on obtient}$$

$N(r) = \frac{N}{r^2}$ pour $r \geq 1$ et $M = 2N$: ce sont exactement les hypothèses des parties II et III.

Conclusion

$$N(r) = N \text{ si } r \leq r_0 \text{ et } N(r) = N \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha \text{ si } r \geq r_0.$$

4. Un même revenu s'écrit Xu dans l'unité u et $X'u' = X'\lambda u$ dans l'unité u' . Donc $X'\lambda = X$, soit $X' = \frac{X}{\lambda}$.

Loi de X' : pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $\lambda > 0$,

$$F_{X'}(x) = P\left(\frac{X}{\lambda} \leq x\right) = P(X \leq \lambda x) = F(\lambda x).$$

Donc $F_{X'}(x) = 0$ si $\lambda x < r_0$, c'est-à-dire $x < \frac{r_0}{\lambda}$, et

$$F_{X'}(x) = 1 - \left(\frac{r_0}{\lambda x}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{r_0/\lambda}{x}\right)^\alpha \text{ si } x \geq \frac{r_0}{\lambda}.$$

C'est la fonction de répartition obtenue à la question 1 en remplaçant r_0 par

$r'_0 = \frac{r_0}{\lambda} > 0$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X' suit la loi de Pareto

de paramètres $\alpha, \frac{r_0}{\lambda}, 0$; une densité de X' est $x \mapsto \frac{\alpha}{r'_0} \left(\frac{r'_0}{x}\right)^{\alpha+1}$ si $x \geq r'_0$, et 0 sinon (obtenue en dérivant $F_{X'}$ sauf en r'_0).

Conclusion

$X' = \frac{X}{\lambda}$ suit une loi de Pareto de même paramètre α , le revenu minimal devenant $\frac{r_0}{\lambda}$.

Partie II : Étude d'un modèle d'imposition par tranches

- 1.(a) La tranche $[0, 1[$ correspond à $n = 0$: $\tau_0 = \frac{1}{2}(1 - e^0) = 0$.

Conclusion

la tranche $[0, 1[$ n'est pas imposée (taux nul).

1.(b) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le programme Turbo-Pascal demandé par le document source, qui saisissait r et b puis affichait $i(r)$, est remplacé par une fonction Python prenant r et b en arguments et renvoyant $i(r)$.

Principe : si $n \leq r < n + 1$, c'est-à-dire $n = \lfloor r \rfloor$, on a ici $q_k = k$, donc toutes les tranches complètes $[k, k + 1[$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ contribuent chacune $(k + 1 - k)\tau_k = \tau_k$, et la tranche entamée $[n, n + 1[$ contribue $(r - n)\tau_n$:

$$i(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k + (r - n)\tau_n.$$

Pour $0 \leq r < 1$, $n = 0$, la somme est vide et $i(r) = r\tau_0 = 0$, conformément à la définition.

Méthode 1 — Accumulation des tranches par une boucle

Python

```
import numpy as np

def impot(r, b):
    n = int(np.floor(r))          # r appartient à [n, n+1[
    s = 0
    for k in range(n):           # tranches complètes [k, k+1[, k = 0, ..., n-1
        s = s + 0.5 * (1 - np.exp(-b * k))
    s = s + (r - n) * 0.5 * (1 - np.exp(-b * n))  # tranche [n, n+1[ entamée
    return s
```

La variable n contient la partie entière de r (convertie en entier pour `range`) ; `range(n)` parcourt $k = 0, \dots, n - 1$ (borne exclusive) ; s accumule les taux τ_k , puis on ajoute la contribution $(r - n)\tau_n$ de la dernière tranche.

Méthode 2 — Formule fermée par somme géométrique

Avec $q = e^{-b} \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{k=0}^{n-1} q^k \right) = \frac{1}{2} \left(n - \frac{1 - q^n}{1 - q} \right),$$

d'où un calcul sans boucle :

Python

```
import numpy as np

def impot2(r, b):
    n = int(np.floor(r))
    q = np.exp(-b)
    s = 0.5 * (n - (1 - q**n) / (1 - q)) # somme des taux tau_0, ..., tau_(n-1)
    return s + (r - n) * 0.5 * (1 - q**n)
```

La méthode 1 suit directement la définition par tranches et s'adapterait à des taux quelconques ; la méthode 2 exploite la forme géométrique particulière des taux.

Ces deux codes ont été exécutés et donnent les mêmes valeurs. Par exemple, avec $b = 1$:

`impot(0.7, 1)` renvoie 0 et `impot(2.5, 1)` renvoie environ 0,5322, qui est bien

$$\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-2}).$$

2. On établit la convergence par comparaison, puis on calcule chaque I_n .

Convergence : pour $n \geq 1$, $0 \leq \tau_n \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq \frac{\tau_n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$$

converge.

Montant de chaque tranche : la tranche $[0, 1[$ rapporte $I_0 = \tau_0 \int_0^1 N(r) dr = 0$ car

$\tau_0 = 0$. Pour $n \geq 1$, sur $[n, n+1]$ on a $N(r) = \frac{N}{r^2}$ (y compris en $r = 1$, où

$N(1) = N = \frac{N}{1^2}$), donc

$$I_n = \tau_n \int_n^{n+1} \frac{N}{r^2} dr = N \tau_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{N \tau_n}{n(n+1)}.$$

Le montant total encaissé est la somme des montants rapportés par toutes les tranches, soit la somme de la série convergente

$$\sum_{n \geq 0} I_n.$$

Conclusion

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n = N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)}.$$

3.(a) On décompose en éléments simples et on utilise la série admise. Posons $x = e^{-b}$; comme $b > 0, 0 < x < 1$.

Comme $\tau_n = \frac{1}{2}(1 - x^n)$ et que les séries

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

et

$$\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$$

convergent (termes positifs majorés par $\frac{1}{n^2}$), la linéarité donne

$$I(b) = \frac{N}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \right).$$

Première somme (télescopique) :

$$\sum_{n=1}^K \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{K+1} \rightarrow 1.$$

Seconde somme : $\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}$, et les deux séries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+1}$$

convergent. D'après le résultat admis,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x).$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x).$$

Par suite

$$I(b) = \frac{N}{2} \left(1 - 1 - \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \right) = -\frac{N}{2} \cdot \frac{1-x}{x} \ln(1-x).$$

Or $\frac{1-x}{x} = \frac{1-e^{-b}}{e^{-b}} = e^b - 1.$

Conclusion

$$I(b) = \frac{N}{2} (1 - e^b) \ln(1 - e^{-b}).$$

3.(b) Pour $b > 0$, $e^{-b} < 1$ donc $1 - e^{-b} > 0$. La fonction $b \mapsto 1 - e^{-b}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$: par composition, $b \mapsto \ln(1 - e^{-b})$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Le produit par $b \mapsto \frac{N}{2}(1 - e^b)$, dérivable sur $\mathbb{R}$, est dérivable.

Conclusion

I est dérivable, donc continue, sur $]0, +\infty[$.

3.(c) Limite en 0. Pour $b > 0$, posons $v(b) = \frac{1 - e^{-b}}{b}$; $v(b) \rightarrow 1$ quand $b \rightarrow 0$ (taux d'accroissement de $b \mapsto e^{-b}$ en 0), et $v(b) > 0$. Alors $\ln(1 - e^{-b}) = \ln b + \ln v(b)$ et

$$I(b) = \frac{N}{2} \cdot \frac{1 - e^b}{b} \cdot (b \ln b + b \ln v(b)).$$

Quand $b \rightarrow 0^+$: $\frac{1 - e^b}{b} \rightarrow -1$ (taux d'accroissement de $\exp$ en 0), $b \ln b \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $b \ln v(b) \rightarrow 0 \cdot \ln 1 = 0$. Donc $\lim_{b \rightarrow 0} I(b) = 0$.

Limite en $+\infty$. Avec $x = e^{-b}$, $I(b) = -\frac{N}{2}(1-x)\frac{\ln(1-x)}{x}$ et $x \rightarrow 0^+$ quand $b \rightarrow +\infty$.

Or $\ln(1-x) \sim -x$ quand $x \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln(1-x)}{x} \rightarrow -1$, et $(1-x) \rightarrow 1$. Donc

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \frac{N}{2}.$$

Conclusion

$$\lim_{b \rightarrow 0} I(b) = 0 \text{ et } \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \frac{N}{2}.$$

3.(d) On établit que I est strictement croissante.

Méthode 1 — Signe de la dérivée

Pour $b > 0$:

$$I'(b) = \frac{N}{2} \left[-e^b \ln(1 - e^{-b}) + (1 - e^b) \frac{e^{-b}}{1 - e^{-b}} \right].$$

Or $(1 - e^b)e^{-b} = e^{-b} - 1 = -(1 - e^{-b})$, donc le second terme vaut -1 et

$$I'(b) = \frac{N}{2} [-e^b \ln(1 - e^{-b}) - 1] = \frac{N}{2} e^b [-\ln(1 - x) - x]$$

avec $x = e^{-b} \in]0, 1[$.

Par concavité de $\ln$ (inégalité de la tangente en 1) : pour tout $t > 0$, $t \neq 1$, $\ln t < t - 1$.

Avec $t = 1 - x \in]0, 1[$: $\ln(1 - x) < -x$, soit $-\ln(1 - x) - x > 0$. Donc $I'(b) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Méthode 2 — Sans dérivée, à partir de la série

Si $0 < b < b'$, alors pour tout $n \geq 1$, $e^{-b'n} < e^{-bn}$, donc $\tau_n(b) < \tau_n(b')$ et $\frac{\tau_n(b)}{n(n+1)} < \frac{\tau_n(b')}{n(n+1)}$. Les deux séries convergent ; en sommant (inégalité stricte dès le premier terme, inégalités larges ensuite), $I(b) < I(b')$.

La méthode 1 exploite la formule fermée de 3.(a) ; la méthode 2, plus économique, n'utilise que l'expression en série de la question 2 et la monotonie de chaque terme.

Tableau de variations :

b	0		$+\infty$
$I'(b)$		+	
$I(b)$	0 (limite)	strictement croissante	$\frac{N}{2}$ (limite)

Conclusion

I est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de limite 0 en 0 et $\frac{N}{2}$ en $+\infty$.

4. Question adaptée au programme actuel : le document source écrit « dans cette partie III » ; il s'agit évidemment de la partie II, dans laquelle se trouve la question. On utilise la fonction I de la question 3.

I est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de limites 0 et $\frac{N}{2}$ aux bornes. D'après le théorème de la bijection, I réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, \frac{N}{2}[$. En particulier, pour tout $b > 0$, $I(b) < \frac{N}{2}$.

Le dixième du montant total est $\frac{M}{10} = \frac{2N}{10} = \frac{N}{5} \in]0, \frac{N}{2}[$: il existe un unique $b > 0$ tel que $I(b) = \frac{N}{5}$. (Une résolution numérique par dichotomie donne $b \approx 0,221$; c'est une approximation, non une preuve.)

Le tiers du montant total est $\frac{2N}{3} > \frac{N}{2} > I(b)$ pour tout $b > 0$.

Conclusion

l'État peut prélever le dixième des revenus (pour une unique valeur de b), mais jamais le tiers : avec ce système, l'impôt total reste toujours strictement inférieur à $\frac{N}{2}$, soit le quart des revenus.

Partie III : Étude d'un modèle d'imposition continu

1. τ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\tau'(r) = \frac{b}{2}e^{-br} > 0$: τ est strictement croissante. $\tau(0) = 0$ et, comme $b > 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{-br} = 0$, donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} \tau(r) = \frac{1}{2}$.

r	0		$+\infty$
$\tau'(r)$		+	
$\tau(r)$	0	strictement croissante	$\frac{1}{2}$ (limite)

Conclusion

τ croît strictement de 0 à $\frac{1}{2}$ (limite non atteinte) ; tous les taux restent strictement inférieurs à 50 %.

- 2.(a) La fonction $r \mapsto \frac{e^{-br}}{r^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et $0 \leq \frac{e^{-br}}{r^2} \leq \frac{1}{r^2}$ car $e^{-br} \leq 1$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$ converge.

Conclusion

par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$ converge.

2.(b) On découpe l'intégrale en 1 et on utilise la linéarité.

Sur $[0, 1]$, $N(r)\tau(r) = \frac{N}{2}(1 - e^{-br})$, fonction continue, et

$$\int_0^1 \frac{N}{2}(1 - e^{-br}) dr = \frac{N}{2} \left(1 - \left[\frac{-e^{-br}}{b} \right]_0^1 \right) = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1 - e^{-b}}{b} \right) = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{e^{-b} - 1}{b} \right).$$

Sur $[1, +\infty[$, $N(r)\tau(r) = \frac{N}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-br}}{r^2} \right)$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$ convergent (question 2.(a)), donc par linéarité $\int_1^{+\infty} N(r)\tau(r) dr$ converge et vaut $\frac{N}{2} \left(1 - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \right)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} N(r)\tau(r) dr$ converge (relation de Chasles) et

$$J(b) = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{e^{-b} - 1}{b} \right) + \frac{N}{2} \left(1 - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \right).$$

Conclusion

$$J(b) = \frac{N}{2} \left[2 + \frac{e^{-b} - 1}{b} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \right].$$

2.(c) On compare les intégrandes. Notons τ_b le taux associé au paramètre b . Soit $0 < b < b'$.

Pour tout $r > 0$, $-b'r < -br$, donc $e^{-b'r} < e^{-br}$ et $\tau_b(r) < \tau_{b'}(r)$; pour $r = 0$, $\tau_b(0) = \tau_{b'}(0) = 0$. Comme $N(r) > 0$, on a pour tout $r \geq 0$: $N(r)\tau_b(r) \leq N(r)\tau_{b'}(r)$.

Les intégrales $J(b)$ et $J(b')$ convergent (question 2.(b)). Par croissance de l'intégrale, $J(b) \leq J(b')$.

L'inégalité est même stricte : sur $[0, 1]$, la fonction $r \mapsto N(r)(\tau_{b'}(r) - \tau_b(r))$ est continue, positive et non identiquement nulle (strictement positive en $r = 1$), donc son intégrale sur $[0, 1]$ est strictement positive, et l'intégrale sur $[1, +\infty[$ de cette même différence est positive.

Conclusion

J est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3.(a) Pour $r \geq 1$ et $b > 0$, $e^{-br} \leq e^{-b}$, donc $0 \leq \frac{e^{-br}}{r^2} \leq \frac{e^{-b}}{r^2}$. Par croissance de l'intégrale (intégrales convergentes) :

$$0 \leq \varphi(b) \leq e^{-b} \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = e^{-b}.$$

Comme $e^{-b} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne la limite.

Conclusion

$0 \leq \varphi(b) \leq e^{-b}$ et $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi(b) = 0$.

3.(b) Première inégalité. Pour $A > 1$, l'intégrale convergente se décompose en

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr = \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr, \text{ et le second terme est positif (intégrande positive, } A \leq +\infty). \text{ D'où } \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr \leq \varphi(b).$$

Encadrement. Pour $r \in [1, A]$, $e^{-br} \geq e^{-bA}$, donc

$$\int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr \geq e^{-bA} \int_1^A \frac{dr}{r^2} = e^{-bA} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = e^{-bA} - \frac{e^{-bA}}{A} \geq e^{-bA} - \frac{1}{A},$$

car $0 < e^{-bA} \leq 1$. Par ailleurs, d'après 3.(a), $\varphi(b) \leq e^{-b} \leq 1$. D'où

$$e^{-bA} - \frac{1}{A} \leq \varphi(b) \leq 1.$$

Choix de η . Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 1$ tel que $\frac{1}{A} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $\varepsilon \geq 2$, tout $\eta > 0$ convient : $1 - \varepsilon \leq -1 < -\frac{1}{A} < e^{-bA} - \frac{1}{A}$ (car $\frac{1}{A} < 1$ et $e^{-bA} > 0$).

Si $0 < \varepsilon < 2$, posons $\eta = -\frac{1}{A} \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$. Pour $0 < b < \eta$, $-bA > \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, donc $e^{-bA} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et

$$e^{-bA} - \frac{1}{A} > 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon.$$

Limite en 0. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 < b < \eta$:

$$1 - \varepsilon < \varphi(b) \leq 1, \text{ d'où } |\varphi(b) - 1| < \varepsilon.$$

Conclusion

$$\lim_{b \rightarrow 0} \varphi(b) = 1.$$

3.(c) Écriture intégrale. Soit $b > 0$ et h tel que $|h| < \frac{b}{2}$; alors $b + h > \frac{b}{2} > 0$ et $\varphi(b + h)$ est défini. Par linéarité des intégrales convergentes :

$$\varphi(b + h) - \varphi(b) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(b+h)r} - e^{-br}}{r^2} dr = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}(e^{-hr} - 1)}{r^2} dr.$$

Inégalité. Fixons $r > 0$ et appliquons l'inégalité des accroissements finis à $g : t \mapsto e^{-tr}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, entre 0 et h (pour $h = 0$ l'inégalité est triviale). Pour t entre 0 et h , $|t| \leq |h| < \frac{b}{2}$, donc

$$|g'(t)| = r e^{-tr} \leq r e^{|t|r} \leq r e^{\frac{br}{2}}.$$

$$\text{D'où } |g(h) - g(0)| \leq |h| r e^{\frac{br}{2}}, \text{ c'est-à-dire } |e^{-hr} - 1| \leq |h| r e^{\frac{br}{2}}.$$

Majoration. Pour $r \geq 1$:

$$\left| \frac{e^{-br}(e^{-hr} - 1)}{r^2} \right| \leq \frac{e^{-br}|h|r e^{\frac{br}{2}}}{r^2} = |h| \frac{e^{-\frac{br}{2}}}{r} \leq |h| e^{-\frac{br}{2}}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{br}{2}} dr = \frac{2}{b} e^{-\frac{b}{2}}$ converge. L'intégrale définissant $\varphi(b+h) - \varphi(b)$ est donc absolument convergente; en passant à la limite dans l'inégalité triangulaire écrite sur $[1, A]$:

$$|\varphi(b+h) - \varphi(b)| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{-br}(e^{-hr} - 1)}{r^2} \right| dr \leq |h| \int_1^{+\infty} e^{-\frac{br}{2}} dr = \frac{2}{b} e^{-\frac{b}{2}} |h|.$$

On peut donc prendre $K_b = \frac{2}{b} e^{-\frac{b}{2}}$, qui ne dépend que de b .

Conclusion

pour $|h| < \frac{b}{2}$, $|\varphi(b+h) - \varphi(b)| \leq K_b |h|$; quand $h \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers 0, donc $\varphi(b+h) \rightarrow \varphi(b)$: φ est continue en tout $b > 0$, donc continue sur $]0, +\infty[$.

4.(a) Pour $b > 0$, $J(b) = \frac{N}{2} \left[2 + \frac{e^{-b} - 1}{b} - \varphi(b) \right]$. La fonction $b \mapsto \frac{e^{-b} - 1}{b}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues, dénominateur non nul) et φ est continue sur $]0, +\infty[$ (question 3.(c)).

Conclusion

J est continue sur $]0, +\infty[$.

4.(b) Limite en 0 : $\frac{e^{-b} - 1}{b} = -\frac{e^{-b} - e^0}{-b - 0} \rightarrow -1$ (taux d'accroissement de $\exp$ en 0), et $\varphi(b) \rightarrow 1$ (question 3.(b)). Donc $J(b) \rightarrow \frac{N}{2}(2 - 1 - 1) = 0$.

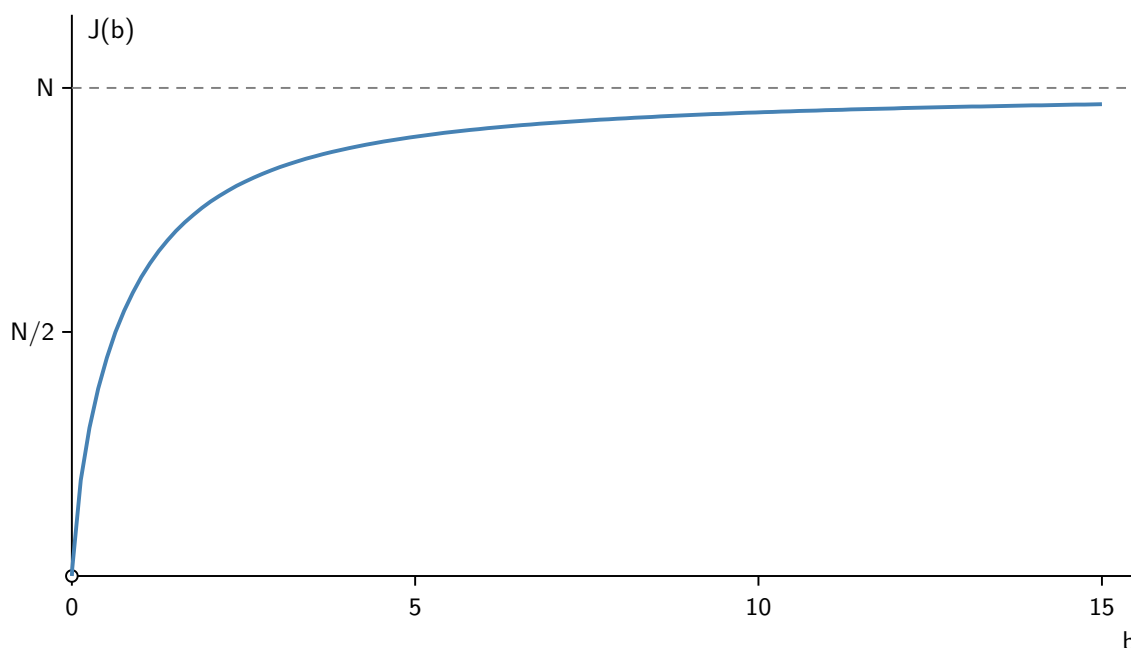
Limite en $+\infty$: $0 \leq \left| \frac{e^{-b} - 1}{b} \right| \leq \frac{1}{b} \rightarrow 0$, et $\varphi(b) \rightarrow 0$ (question 3.(a)). Donc

$$J(b) \rightarrow \frac{N}{2} \cdot 2 = N.$$

Conclusion

$$\lim_{b \rightarrow 0} J(b) = 0 \text{ et } \lim_{b \rightarrow +\infty} J(b) = N.$$

4.(c) Synthèse : J est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (questions 2.(c) et 4.(a)), tend vers 0 en 0 et vers N en $+\infty$. Son graphe part de l'origine (point limite non atteint), croît strictement et admet la droite $y = N$ pour asymptote horizontale en $+\infty$, en restant strictement en dessous.



La courbe ci-dessus est un tracé numérique (avec $N = 1$, φ étant évaluée numériquement) : elle illustre l'allure établie, sans constituer une preuve. Elle suggère en outre une tangente très raide au voisinage de 0 et une approche lente de l'asymptote, ce qui n'est pas démontré ici.

5. Le tiers du montant total est $\frac{M}{3} = \frac{2N}{3}$.

J est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de limites 0 et N : d'après le théorème de la bijection, J réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, N[$. Comme $\frac{2N}{3} \in]0, N[$, il existe un unique $b > 0$ tel que $J(b) = \frac{2N}{3}$. (Numériquement, $b \approx 1,27$; il s'agit d'une approximation.)

Conclusion

avec le modèle continu, l'État peut prélever le tiers des revenus, pour une unique valeur du paramètre b , contrairement au modèle par tranches de la partie II où le prélèvement reste inférieur au quart des revenus. Plus généralement, il peut prélever toute fraction strictement inférieure à la moitié des revenus.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 2.(b) : énoncé conservé ; la nature du point critique est établie par la matrice hessienne et le signe de ses valeurs propres (obtenues par résolution de $AZ = \lambda Z$), au lieu de l'ancien critère utilisant r, s, t , hors programme. Une étude directe complémentaire donne le caractère global.
- Exercice 1, question 3.(b) : énoncé conservé ; la hessienne ayant une valeur propre nulle, la conclusion est obtenue par l'étude directe de f_1 .
- Exercice 2, question 1.(a) : énoncé conservé ; les valeurs propres sont déterminées par résolution de $MX = \lambda X$ et l'identité $W^3 = 0$, sans polynôme caractéristique ni déterminant.
- Exercice 2, question 4 : le titre « Calcul de V^b » du document source est une coquille, rectifiée en « Calcul de V^n ».
- Exercice 2, question 5.(b) : le renvoi « Déduire du 5a » est écrit « Déduire du 5.(a) » pour suivre la numérotation du sujet.
- Partie II, question 1.(b) : Code adapté en Python. Le programme Turbo-Pascal qui saisissait r et b et affichait $i(r)$ est remplacé par une fonction Python `impot(r, b)` renvoyant $i(r)$; la commande `np.floor` est précisée dans l'énoncé.
- Partie II, question 2 : la phrase du document source, interrompue en fin de ligne (« pour mettre en évidence qu'il dépend »), est complétée en « qu'il dépend du

paramètre b ».

- Partie II, question 4 : le document source renvoie à « cette partie III » alors que la question appartient à la partie II et porte sur l'impôt $I(b)$; le renvoi est rectifié en « partie II ».
- Partie I, question 1 et partie III, question 4.(c) : les allures de graphes demandées sont tracées dans le corrigé sous forme de figures SVG calculées à partir des formules (cas $\alpha = 2, r_0 = 1$ pour F ; tracé numérique avec $N = 1$ pour J). Le sujet original ne comporte aucune figure.